

É Possível Eliminar o Conceito de Força da Mecânica Clássica?

(Is it possible to eliminate the concept of force from classical mechanics?)

A.S. Sant'Anna

*Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná
Caixa Postal, 19081, Curitiba, PR, 81531-990*

Christiano Garcia

*PET/CAPES, Matemática, Universidade Federal do Paraná
C.P. 19081, Curitiba, PR, 81531-990*

Recebido 4 de novembro, 1997

Apresentamos um sistema axiomático para a mecânica clássica não-relativística de partículas, no qual o conceito de força não é assumido como noção primitiva. Nossa formulação é inspirada na mecânica de Hertz, a qual considera apenas três conceitos primitivos: *tempo*, *espaço* e *massa*. Hertz também considerava apenas uma Lei Fundamental: *Todo sistema livre persiste em seu estado de repouso ou de movimento uniforme no caminho mais retilíneo possível*. Fazemos algumas comparações entre nossa formulação para a mecânica clássica de partículas e as idéias de Hertz.

We present an axiomatic framework for non-relativistic classical particle mechanics where the concept of force is not assumed as a primitive notion. Our formulation is inspired on Hertz's mechanics, which considers only three primitive concepts: *time*, *space*, and *mass*. It is also emphasized that there is just one Fundamental Law: *Every free system persists in its state of rest or of uniform motion in a straightest path*. We make some comparisons between our formulation for classical particle mechanics and Hertz's ideas.

I. Introdução

Alguns físicos do final do século XIX consideravam que força era um conceito antropomórfico que poderia ser eliminado da mecânica [1]. Existia uma forte influência do kantianismo entre físicos alemães daquela época como Mach, Helmholtz e Hertz com respeito às relações de coordenação entre fatos e idéias. O conceito de força, neste contexto, aparentava ter um *status* hipotético e inobservável.

Em [1] Hertz mostrou estar insatisfeito com a obscuridade do conceito de força. Assim sendo, ele apresentou uma formulação para a mecânica clássica¹ onde a noção de força não é primitiva. Na mecânica de

Hertz existem apenas três conceitos primitivos, a saber, tempo, espaço e massa. Hertz também considera que seu sistema tem apenas uma Lei Fundamental (usando a terminologia do próprio autor): "Todo sistema livre persiste em estado de repouso ou movimento uniforme, seguindo o caminho mais retilíneo possível." Originalmente, numa clara alusão à obra de I. Newton, Hertz estabeleceu a Lei Fundamental como se segue:

Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam.

Desse modo, Hertz considerava, pelo menos *a priori*, apenas sistemas livres. No entanto, como partes de um

¹ Obviamente estamos falando da mecânica não relativística, uma vez que o livro original de Hertz foi publicado em 1894. A referência [1] que citamos é tão somente uma tradução do original em Alemão [2].

sistema livre podem constituir sistemas não-livres, resultados sobre sistemas não-livres podem ser obtidos a partir da Lei Fundamental. Hertz também considerou que todo sistema não-livre pode ser concebido como uma “parte” de um sistema estendido que seja livre.

Consideramos bastante elucidativas as palavras que se seguem de E. Mach [5]:

O livro de Hertz deve, de fato, ser lido por todos aqueles interessados nos problemas da mecânica.[...]

Hertz, após eliminar o conceito de força, inicia com as noções de tempo, espaço e massa apenas, tendo em mente a idéia de expressar somente aquilo que pode ser observado de fato. O único princípio que ele emprega pode ser concebido como uma combinação da lei de inércia com o princípio de mínimo vínculo de Gauss. Massas livres movem-se uniformemente em linhas retas. Se elas são colocadas em algum tipo de conexão, terão suas trajetórias desviadas do movimento retilíneo, em acordo com o princípio de Gauss, um mínimo possível; seu movimento está mais próximo do movimento *livre* que qualquer outro movimento *concebível*. Hertz afirma que as massas movem-se em resposta a sua conexão com o caminho mais *retilíneo*. Todo desvio no movimento de uma partícula massiva da uniformidade e retilinearidade deve-se, em seu sistema, não a uma força mas a uma rígida conexão com outras massas. E onde essas massas não são visíveis, ele concebe massas ocultas com movimentos ocultos. Todas as forças físicas são concebidas como o efeito de tais ações. Força, contra-força, energia, em seu sistema, são tão somente conceitos secundários e auxiliares. (Nossa tradução)

J.C.C. McKinsey, A.C. Suggar e P. Suppes [6] axiomatizaram, em 1953, a mecânica clássica não relativística de partículas, assumindo a noção de força como um dos conceitos primitivos de tal axiomática. Chamamos tal sistema axiomático de sistema M.S.S.. Pelo método de Padoa [7] [8] é possível provar a independência do conceito de força no sistema M.S.S.. Isso significa que não é possível definir força em M.S.S. a partir dos demais conceitos primitivos da teoria tais como espaço, tempo e massa. Em geral, a noção de força é assumida como primitiva nas inúmeras

formulações existentes para a mecânica clássica não-relativística. E quando tais formulações satisfazem os padrões da matemática moderna, geralmente é possível provar a independência de tal noção em relação aos demais conceitos primitivos. Isso significa que, em geral, o conceito de força é, em certo sentido, indispensável nas formulações axiomáticas existentes na literatura especializada.

Inspirado nas idéias de Hertz, um de nós [9] [10] recentemente desenvolveu um sistema axiomático para a mecânica clássica de partículas não-relativística, onde o conceito de força não surge como primitivo. Uma espécie de proto-força é definida e leis físicas como a Terceira Lei de Newton (numa versão mais fraca) surgem como teoremas.

II. Axiomatização

Em 1900, por ocasião do Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, D. Hilbert apresentou uma lista de 23 problemas os quais ele considerava que deveriam ser o legado da matemática do século XIX para os matemáticos do século seguinte [3] [4]. O sexto problema de tal lista dizia respeito à axiomatização de teorias físicas:

Investigações sobre os fundamentos da geometria sugerem o problema: tratar da mesma maneira, por meio de axiomas, as ciências físicas nas quais a matemática tem um importante papel: primeiramente a teoria de probabilidades e a mecânica. (Nossa tradução)

P. Suppes defende o ‘slogan’ de que axiomatizar uma teoria é definir um predicado conjuntista [11]. Não podemos detalhar aqui o programa de Suppes, pela limitação de espaço para apresentação de nosso trabalho. No entanto, podemos resumir a idéia principal ao afirmarmos que tal proposta consiste em se definir uma estrutura matemática para a teoria a ser axiomatizada, fundamentada na teoria de conjuntos. As vantagens de se axiomatizar teorias físicas via predicados conjuntistas são muitas: (i) responder de maneira precisa a questões de caráter filosófico sobre reducionismo de uma teoria em outra; isso é conseguido graças ao conceito de isomorfismo, uma vez que fundamentamos toda a teoria física na teoria de conjuntos; (ii) temos um melhor controle sobre o que de fato estamos falando na teoria; (iii) podemos estabelecer teoremas metamatemáticos para a física; (iv) podemos melhor com-

preender o papel desempenhado pelos conceitos fundamentais em física tais como tempo, espaço, massa, força, spin e outros; (v) podemos buscar estruturas matematicamente cada vez mais simples que permitam descrever uma variedade cada vez maior de fenômenos físicos.

III. Sistema M.S.S.

Nesta seção apresentamos a formulação que McKinsey, Suggar e Suppes apresentaram para a mecânica clássica de partículas elementares em 1953 [6], a qual aqui abreviamos por sistema M.S.S.. No entanto, a definição 2 e o teorema 1 são originais.

O sistema M.S.S. tem seis noções primitivas: P , T , m , s , f , e g . P e T são conjuntos, m é uma função real unária definida em P , s e g são funções vetoriais definidas em $P \times T$, e f é uma função vetorial definida em $P \times P \times T$. Os vetores correspondentes às imagens de s , f e g são pertencentes a \mathbb{R}^3 . Intuitivamente, P corresponde ao conjunto de partículas e T a um intervalo de tempo. $m(p)$ deve ser fisicamente interpretado como a massa da partícula $p \in P$. $s_p(t)$, corresponde ao vetor posição de p no instante $t \in T$. $f(p, q, t)$ é a força interna que a partícula q exerce sobre p , no instante t . Finalmente, $g(p, t)$ deve ser fisicamente interpretada como a força externa sobre p no instante t .

Agora, podemos apresentar os axiomas do sistema M.S.S.:

Definição 1 $\mathcal{P} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ é um sistema M.S.S. se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

P1 P é um conjunto finito não vazio.

P2 T é um intervalo de números reais.

P3 Se $p \in P$ e $t \in T$, $s_p(t)$ é um vetor de um espaço vetorial real de três dimensões, tal que $\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$ existe.

P4 Se $p \in P$, $m(p)$ é um número real positivo.

P5 Se $p, q \in P$ e $t \in T$, $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.

P6 Se $p, q \in P$ e $t \in T$,

$$[s_p(t), f(p, q, t)] = -[s_q(t), f(q, p, t)].$$

P7 Se $p, q \in P$ e $t \in T$,

$$m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t).$$

Os colchetes $[,]$ no axioma **P6** denotam produto externo usual entre vetores de \mathbb{R}^3 .

Axioma **P5** corresponde a uma versão fraca da Terceira Lei de Newton: para cada força (ação) existe uma força em sentido contrário (reação) com a mesma intensidade (representada pela norma do vetor força). Axiomas **P6** e **P5**, correspondem à versão forte dessa mesma lei, pois axioma **P6** estabelece que a direção da ação e da reação deve ser a mesma da reta que une as duas partículas p e q .

Axioma **P7** corresponde à Segunda Lei de Newton.

Em [6] os autores apresentam a seguinte definição: *Sejam $\mathcal{P} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ um sistema M.S.S., P' um subconjunto não vazio de P e s' , f' , g' , e m' as restrições de s , f , g , e m , respectivamente a $P' \times T$, $P' \times P' \times T$, $P' \times T$ e P' . Diz-se que $\mathcal{P}' = \langle P', T, s', m', f', g' \rangle$ é um subsistema de \mathcal{P} .*

Tal definição apresenta uma certa inconveniência, pois os mesmos autores enunciam a seguinte sentença como teorema: *Todo sub-sistema de um sistema M.S.S. é um sistema M.S.S.* Essa afirmação é falsa e apresentamos o contra-exemplo que se segue abaixo:

Considere um sistema M.S.S. com quatro partículas p , q , q' e r , tais que $\forall t \in T$ temos

$$f(p, q, t) = (-1, 0, 0),$$

$$f(p, q', t) = (1, 0, 0),$$

$$f(q, q', t) = f(q, r, t) = f(q', r, t) = (0, 0, 0),$$

$$f(p, r, t) = (0, 1, 0),$$

$$m(p) = m(q) = m(q') = m(r) = 1$$

e

$$g(p, t) = g(q, t) = g(q', t) = g(r, t) = (0, 0, 0).$$

De acordo com o axioma **P7**:

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = (0, 1, 0).$$

Se considerarmos agora um sub-sistema $\mathcal{P}' = \langle P', T, s', m', f', g' \rangle$, tal que $P' = \{p, q, q'\}$, e substituirmos os valores das restrições de m , s , f e g no axioma **P7**, perceberemos facilmente que o mesmo axioma não será satisfeito.

Apresentamos aqui uma definição alternativa para subsistema:

Definição 2 *Sejam $\mathcal{P} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ um sistema M.S.S., P' um subconjunto não vazio de P e $s', f', g',$ e m' as restrições de $s, f, g,$ e $m,$ respectivamente a $P' \times T, P' \times P' \times T, P' \times T$ e P' . Diz-se que $\mathcal{P}' = \langle P', T, s', m', f', g' \rangle$ é um subsistema de \mathcal{P} se a seguinte condição for satisfeita: $\forall p, q \in P'$ e $\forall t \in T,$*

$$m'(p) \frac{d^2 s'_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P'} f'(p, q, t) + g'(p, t). \quad (1)$$

Com tal definição, temos o seguinte teorema:

Teorema 1 *Se \mathcal{P}' é sub-sistema de um sistema M.S.S. \mathcal{P} , então \mathcal{P}' é um sistema M.S.S..*

Dem.: A verificação dos axiomas **P1**~**P6** é consequência direta das propriedades das restrições de s, m e f . Já a verificação do axioma **P7** é consequência direta da equação (1).□

Definição 3 *Dois sistemas M.S.S.*

$$\mathcal{P} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$$

e

$$\mathcal{P}' = \langle P', T', s', m', f', g' \rangle$$

são equivalentes se, e somente se, $P = P', T = T', s = s',$ e $m = m'$.

Definição 4 *Um sistema M.S.S. é dito isolado se, e somente se, para quaisquer $p \in P$ e $t \in T, g(p, t) = (0, 0, 0)$.*

Teorema 2 *Se*

$$\mathcal{P} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$$

e

$$\mathcal{P}' = \langle P', T', s', m', f', g' \rangle$$

são dois sistemas M.S.S. equivalentes, temos que para quaisquer $p \in P$ e $t \in T$

$$\sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t) = \sum_{q \in P'} f'(p, q, t) + g'(p, t).$$

O teorema abaixo é válido tanto para a definição de sub-sistema dada por McKinsey et al. [6] quanto para nossa própria definição 2:

Teorema 3 *Todo sistema M.S.S. é equivalente a um subsistema de um sistema M.S.S. isolado.*

O teorema que se segue pode ser facilmente provado utilizando a técnica criada por Padoa [8].

Teorema 4 *Massa e força interna são conceitos independentes das demais noções primitivas do sistema M.S.S..*

De acordo com Suppes [11]:

Alguns autores propuseram que deveríamos converter a Segunda Lei de Newton, i.e., axioma **P7**, em uma definição para força total atuando sobre uma dada partícula. [...] Isso proibiria em nosso sistema qualquer análise de forças internas e externas atuando sobre uma partícula. Ou seja, se todas as definições de força fossem eliminadas como conceitos primitivos e **P7** fosse utilizado como definição, as noções de forças interna e externa não seriam definíveis em nosso sistema axiomático. (Nossa tradução)

IV. Eliminando Força

Apresentamos aqui três predicados conjuntistas para definir a mecânica clássica não-relativística de partículas, tendo como inspiração as idéias de Hertz bem como o sistema M.S.S.. Esta seção é essencialmente baseada em [10], no entanto o teorema 5 é original.

Nossas noções primitivas são $P, T, s,$ e m . P e T são conjuntos, m é uma função real definida em $P,$ e s é uma função vetorial definida em $P \times T,$ da mesma forma que em M.S.S.. Os significados intuitivos de tais conceitos são também análogos aos de M.S.S..

Definição 5 $\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$ é um Sistema Clássico Proto-Livre de Partículas se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

H1 P é um conjunto finito não vazio.

H2 T é um intervalo de números reais.

H3 Se $p \in P$ e $t \in T, s_p(t)$ é um vetor de \mathbb{R}^3 tal que $\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$ existe.

H4 Se $p \in P, m(p)$ é um número real positivo.

Tais axiomas são idênticos aos primeiros quatro axiomas de M.S.S.. Não é possível definir força interna e força externa em nosso sistema, uma vez que tais conceitos são independentes dos demais. Para verificar isso basta aplicar a técnica de Padoa, já mencionada.

Definição 6 Um Sistema de Partículas Proto-Livre $\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$ é dito Sistema Livre de Partículas se, além dos axiomas **H1**~**H4**, satisfizer também o seguinte postulado:

H5 Se $p \in P$ e $t \in T$, $\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = 0$.

Axioma **H5** justifica o termo ‘Livre’ empregado acima. Consideramos que **H5** está em correspondência com a Lei Fundamental de Hertz.

Eventualmente podemos nos referir a sistemas livres de partículas simplesmente como sistemas livres. Sistemas proto-livres de partículas podemos chamar, para fins de abreviação, de sistemas proto-livres.

Obviamente, todo sistema livre é proto-livre. Porém, nem todo sistema proto-livre é livre, pois axioma **H5** é independente dos demais. Por isso estabelecemos a seguinte definição:

Definição 7 Um sistema proto-livre

$$\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$$

é dito um Sistema Não-Livre de Partículas, ou simplesmente, Sistema Não-Livre, se satisfizer, além dos axiomas **H1**~**H4**, o seguinte postulado:

H5' Se $p \in P$ e $t \in T$, $\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} \neq 0$.

Axiomas **H5** e **H5'** não são suficientes para se definir força na acepção de M.S.S.. Se acrescentarmos um desses axiomas a M.S.S., ainda permanecerá a independência do conceito de força neste sistema.

Definição 8 Sejam

$$\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$$

um sistema proto-livre, P' um sub-conjunto não vazio de P , e s' e m' as respectivas restrições de s e m a $P' \times T$ e P' . Chamamos

$$\mathcal{P}' = \langle P', T, s', m' \rangle$$

de sub-sistema de \mathcal{P} .

As definições de sub-sistema para sistemas livres e não livres são absolutamente análogas. É fácil também observar que o sub-sistema de um sistema livre não é necessariamente livre. Tal questão fica mais clara nos parágrafos seguintes.

Definição 9 Dois sistemas proto-livres

$$\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$$

e

$$\mathcal{P}' = \langle P', T', s', m' \rangle$$

são equivalentes se $P = P'$, $T = T'$, $s = s'$, e $m = m'$.

É óbvio que todo sub-sistema de um sistema livre ou mesmo de um sistema não-livre é também um sistema proto-livre. Portanto, todo sistema proto-livre é equivalente a um sub-sistema de um sistema não-livre. Ainda, todo sistema proto-livre é equivalente a um sub-sistema de um sistema livre.

Definição 10 O centro de massa $c(t)$ de um sistema proto-livre é dado por

$$c(t) = \frac{\sum_{p \in P} m(p) s_p(t)}{\sum_{p \in P} m(p)}$$

Tal definição é idêntica ao conceito de centro de massa em M.S.S., conforme [6].

Se estivermos lidando com um sistema não-livre, temos que:

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} \neq 0 \quad (2)$$

Se, no entanto, tivermos um sistema livre:

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

Isso nos permite definir aquilo que chamamos de proto-força externa $g_c(t)$ no sistema proto-livre:

Definição 11 $g_c(t) = \sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2}$

Se a proto-força externa é zero, o sistema proto-livre é livre. Se a proto-força externa for diferente de zero, o sistema proto-livre é não-livre. O conceito de proto-força externa não é equivalente à noção de força externa em M.S.S., uma vez que os domínios de ambas as funções não são iguais. Porém, em M.S.S. há um teorema que estabelece o que se segue:

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} = \sum_{p \in P} g(p, t).$$

Ou seja, se definirmos em M.S.S. a noção de proto-força externa da mesma forma como o fazemos na definição 11, tal noção corresponde à soma de todas as forças externas em M.S.S. que atuam sobre todas as partículas do sistema. Uma sentença como o teorema 2 carece de sentido no sistema proto-livre.

Teorema 5 Se $\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$ e $\mathcal{P}' = \langle P', T, s', m' \rangle$ são dois sistemas proto-livres equivalentes, suas proto-forças externas são iguais.

Dem.: Por hipótese $m = m'$ e $s = s'$. Logo

$$\frac{\sum_{p \in P} m(p)s_p(t)}{\sum_{p \in P} m(p)} = \frac{\sum_{p \in P'} m'(p)s'_p(t)}{\sum_{p \in P'} m(p)}.$$

Logo, $c(t) = c'(t)$, sendo $c(t)$ o centro de massa em \mathcal{P} e $c'(t)$ o centro de massa em \mathcal{P}' . Assim

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} = \frac{d^2 c'(t)}{dt^2},$$

o que implica que $g_c(t) = g_{c'}(t)$, de acordo com a definição de proto-força externa. \square

A recíproca do teorema acima não é verdadeira, o que pode facilmente ser mostrado com um contra-exemplo, o qual deixamos como exercício para o leitor.

Teorema 6 Se um sistema livre admite um sub-sistema não-livre, existe outro sub-sistema, diferente do primeiro, que também é não-livre.

Dem.: Um sistema livre tem o axioma **H5** satisfeito. Portanto,

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = 0.$$

Mas se tal sistema admite um sub-sistema não-livre, existe $P' \subset P$ ($P' \neq \emptyset$) tal que $P' \neq P$ e tal que $\sum_{p \in P'} m(p) \frac{d^2 s'_p(t)}{dt^2} \neq 0$. Assim, se assumimos $P'' = P - P'$,

$$\sum_{p \in P''} m''(p) \frac{d^2 s''_p(t)}{dt^2} \neq 0, \tag{4}$$

pois

$$\sum_{p \in P'} m'(p) \frac{d^2 s'_p(t)}{dt^2} + \sum_{p \in P''} m''(p) \frac{d^2 s''_p(t)}{dt^2} = \sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}. \tag{5}$$

Podemos considerar $\mathcal{P}'' = \langle P'', T, s'', m'' \rangle$ como um sistema proto-livre com a condição extra dada pela equação 4. Portanto, \mathcal{P}'' é um sistema não-livre. \square

Considere, agora, um sistema de duas partículas p_1 e p_2 , tal que

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} = 0,$$

mas

$$\frac{d^2 s_{p_1}(t)}{dt^2} \neq 0.$$

Tal situação corresponde a um modelo para um sistema livre $\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$ com apenas duas partículas. Se qualquer sub-sistema não trivial \mathcal{P}' é não-livre, $\mathcal{P} - \mathcal{P}'$ também é não-livre, de acordo com o teorema acima. Portanto:

$$m(p_1) \frac{d^2 s_{p_1}}{dt^2} = -m(p_2) \frac{d^2 s_{p_2}}{dt^2}. \tag{6}$$

A equação (6) lembra a versão fraca da Terceira Lei de Newton. Se o sistema das duas partículas é livre, mas a partícula p_1 é elemento de um sistema não-livre, a outra partícula também é elemento de um sistema não-livre. Essa situação sugere uma ‘ação’ da partícula p_1 sobre a partícula p_2 e uma ‘reação’ de p_2 sobre p_1 , ou *vice versa*. À primeira vista a equação (6) parece tornar viável uma definição de força interna. No entanto, como eliminamos todas as noções de força como conceitos primitivos, baseados em M.S.S., não é possível estabelecer qualquer definição para forças, sejam internas ou externas.

Podemos ver esta questão sob outro ponto de vista. Tentemos adaptar o exemplo acima das duas partículas para M.S.S.. Uma vez que temos como dados apenas as massas e trajetórias de p_1 e p_2 , há uma ambigüidade na determinação das forças envolvidas. Podemos ter forças internas atuando entre as partículas ou podemos ter forças externas atuando sobre as mesmas de modo que a soma das forças externas seja o vetor nulo.

Sem qualquer noção de força na acepção usual, não temos ação-a-distância. Os axiomas **P5** e **P6** caracterizam a Terceira Lei de Newton e estabelecem que ação e reação ocorrem na mesma direção que une as duas partículas envolvidas. No sistema proto-livre, o fato do sub-sistema constituído por p_1 ser não-livre implica que o outro sub-sistema constituído por p_2 também é não-livre. Mas as trajetórias das partículas podem ser em quaisquer direções. Assim como a mecânica de Hertz, nosso sistema necessita de mais dados para lidar com ações-a-distância.

Hertz ‘define’ força como “o efeito que um sistema, entre dois sistemas acoplados, exerce sobre o outro, por consequência da Lei Fundamental” (nossa tradução) [1]. Duas partículas, e.g., são ditas *acopladas*, de acordo com o trabalho original de Hertz, quando o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal forma que uma ou mais coordenadas de uma partícula coincide com as mesmas coordenadas da outra partícula em um certo intervalo de tempo. Isso significa que Hertz ‘definia’

força em termos de espaço e tempo. Mas em nossa formulação isso não é possível.

Em sua maneira logicamente informal de escrever, Hertz estabeleceu um postulado extra que estabelecia que todo sistema não-livre poderia ser concebido como parte de um sistema livre. Seu objetivo era determinar o movimento das partículas em um sistema qualquer, utilizando apenas a Lei Fundamental. Em nosso sistema há uma afirmação semelhante ao postulado extra de Hertz, na forma de teorema, como se segue:

Teorema 7 *Todo sistema não-livre é equivalente a um sub-sistema de um sistema livre.*

Dem.: Considere um sistema não-livre

$$\mathcal{P} = \langle P, T, s, m \rangle$$

tal que

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} \neq 0.$$

Se definirmos um sistema não-livre

$$\mathcal{Q} = \langle \{q\}, T, s_q, m_q \rangle$$

com apenas uma partícula $q \notin P$, tal que

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = -m_q \frac{d^2 s_q(t)}{dt^2},$$

o sistema $\mathcal{P}_q = \langle P \cup \{q\}, T, s|_{P \cup \{q\}}, m|_{P \cup \{q\}} \rangle$ é livre, pois

$$\sum_{p \in P \cup \{q\}} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{p \in P} \left(m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} \right) + m_q \frac{d^2 s_q(t)}{dt^2} = 0.$$

Para completar a demonstração, duas verificações devem ainda ser feitas: (i) O sistema \mathcal{P}_q é livre, ou seja, deve satisfazer axiomas **H1**~**H5**; (ii) \mathcal{P} é equivalente a um sub-sistema de \mathcal{P}_q . Obviamente não há maiores problemas na demonstração. \square

O teorema 7 é muito semelhante ao teorema 3. Mas sua prova é mais simples.

V. Observações Finais

A idéia de eliminar força da mecânica clássica de partículas surge simplesmente do fato de que ações-a-distância têm um caráter metafísico. A maneira usual de se resolver esse problema é via teoria de campos, pois tal teoria permite estabelecer que cada ponto do

espaço-tempo participa de fato do processo de interação entre dois corpos distantes um do outro. No entanto, autores como Wittgenstein [12], o qual inclusive faz referência ao trabalho de Hertz, chegam a afirmar que mesmo espaço e tempo têm um caráter antropomórfico e que, portanto, não existem fisicamente. Além disso, se queremos resolver na própria mecânica os problemas causados pela ação-a-distância, talvez o melhor caminho seja de fato a teoria de Hertz. Não deixa de haver uma semelhança entre as antigas discussões sobre ação-a-distância em mecânica clássica e as atuais considerações a respeito do problema da não-localidade em mecânica quântica. Qual seria uma formulação a la Hertz para a mecânica quântica? Essa é uma fascinante questão a ser respondida.

Nosso trabalho permite outras investigações adicionais. Pode-se, por exemplo, procurar uma extensão de nossas idéias para a mecânica dos meios contínuos. Outra possibilidade é a eliminação de outros conceitos primitivos da mecânica tais como tempo, espaço e mesmo massa. Estamos, no momento, trabalhando com essas possibilidades.

VI. Agradecimentos

Agradecemos as críticas e sugestões de Heinz-Jürgen Schmidt (Universidade de Osnabrück, Alemanha) e Décio Krause (Universidade Federal do Paraná). Agradecemos também o apoio financeiro do Programa PET/CAPES.

Referências

References

- [1] Hertz, H.R., 1956, *The Principles of Mechanics*, Tradução para o Inglês feita por D.E. Jones e J.T. Walley, Dover Publications.
- [2] Hertz, H.R., 1894, *Die Prinzipien der Mechanik in Neuem Zusammenhange Dargestellt*, Barth, Leipzig.
- [3] Hilbert, D., 1900, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten, 253-297.
- [4] Hilbert, D., 1976, "Mathematical Problems", in *Mathematical Developments Arising from the Hilbert Problems*, edited by F.E. Browder, Proc. Symp. Pure Math., AMS **28** 1-34.
- [5] Mach, E., 1974, *The Science of Mechanics*, Tradução para o Inglês feita por T.J. McCormack, The Open Court Publishing Co.
- [6] McKinsey, J.C.C., A.C. Suggar e P. Suppes, 1953, 'Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics', *J. Rational Mechanics and Analysis*, **2** 253-272.

- [7] McKinsey, J.C.C., 1935, 'On the Independence of Undefined Ideas', *Bulletin of the American Mathematical Society*, 291-297.
- [8] Padoa, A., 1900, 'Essai d'une Théorie Algébrique des Nombres Entiers, Précédé d'une Introduction Logique à une Théorie Dédutive Quelconque', *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, **3**.
- [9] Sant'Anna, A.S., 1995, 'Set-Theoretical Predicate for Hertz's Mechanics', *Volume of Abstracts of the Xth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Florença, 491-491.
- [10] Sant'Anna, A.S., 1996, 'An axiomatic framework for classical particle mechanics without force', *Philosophia Naturalis* **33** 187-203.
- [11] Suppes, P., 1967, *Set-Theoretical Structures in Science*, mimeo. Stanford University.
- [12] Wittgenstein, L., 1981, *Tractatus Logico-Philosophicus*, tradução inglesa de D.F. Pears e B.F. McGuinness, Routledge & Kegan Paul.