

Estudo Numérico do Movimento de Projéteis

(Numerical study of projectile motion)

Justino Fazuri

*Departamento de Engenharia Mecânica e Produção,
Universidade Federal do Ceará
Caixa Postal 12144, 60455-760, Fortaleza, CE, Brasil*

J. Mauricio O. Matos*

*Departamento de Física,
Universidade Federal do Ceará
Caixa Postal 6030, 60451-970, Fortaleza, CE, Brasil*

Recebido 15 de Dezembro, 1997

Métodos numéricos simples são aplicados na obtenção da solução das equações do movimento de um modelo para um projétil lançado da superfície da terra. No modelo estudado são levados em conta a resistência do ar, o efeito dos ventos e a variação da densidade do ar com a altitude. Mostra-se que é possível, ao nível de um curso introdutório de física geral, estudar-se um modelo padrão mais elaborado do que o modelo parabólico e obter-se resultados suficientemente precisos quando comparados com métodos numéricos mais complexos e com resultados experimentais.

Simple numerical methods are applied to obtain the solution of projectile motion launched from earth surface. In the model studied it is taken into account the air resistance, the wind and the atmosphere density variation with the altitude. It is shown, at an introductory physics course level, that it is possible to study more involved models than the parabolic model and to obtain accurate results as compared with more complex numerical methods and experimental data.

I. Introdução

Há mais ou menos três décadas passadas os cientistas eram classificados em duas categorias. Os experimentais e os teóricos. Com o aperfeiçoamento e popularização dos computadores, um novo tipo de cientista tem surgido, o cientista computacional. Para este cientista o computador é a sua ferramenta principal utilizada para realizar experimentos ou simulações computacionais. Numa simulação computacional, o cientista estabelece um modelo teórico no computador, obtém resultados e estuda as consequências de tais resultados. Trabalhando com modelos bem definidos produz resultados exatos para o modelo em questão. Os resultados da simulação também podem ser comparados com resultados teóricos existentes e com dados experimentais. De modo que as simulações podem ser usadas

para testar teorias e mesmo substituí-las se assim for necessário.

Com o objetivo de introduzir estudantes do primeiro ano de física e engenharias no processo de estabelecer um modelo para um problema físico e resolvê-lo no computador, propomos o estudo de um modelo geral para simular o movimento de um projétil que levasse em conta os efeitos da resistência do ar.

O estudo do movimento de projéteis lançados da superfície da terra é um problema antigo que tem a sua origem na parte final do famoso livro, *Discursos sobre duas novas Ciências* (1638), de Galileu Galilei. Neste livro Galileu demonstra que a trajetória de uma partícula viajando nas proximidades da superfície da terra e através de um meio não resistente é uma

* Autor para o qual a correspondência deve ser enviada. E-mail: mauricio@fisica.ufc.br

parábola[1]. Desde então tal movimento tem sido estudado e modelos têm sido propostos na tentativa de incorporar os efeitos devidos à presença da atmosfera.

Nos cursos introdutórios de física, o movimento de projéteis é abordado como um exemplo importante de movimento em duas dimensões. É uma das aplicações da dinâmica que desperta um interesse particular entre os estudantes, talvez pela sua conexão prática com esportes e balística.

Nos livros-texto[2], o problema é tratado como na formulação de Galileu, isto é, despreza-se a resistência do ar, de modo que o movimento dá-se apenas sob o efeito da força gravitacional. Ou seja, o movimento ocorre como se não existisse a atmosfera terrestre. Neste caso, as equações do movimento são obtidas facilmente e demonstra-se que a trajetória descrita pelo objeto é uma parábola. No entanto, é sabido[3] que os efeitos da resistência do ar sobre o movimento de um projétil não são desprezíveis. A existência da atmosfera influencia sobremaneira o movimento, de modo que a trajetória não é mais parabólica; na verdade esta não pode ser descrita por uma equação matemática simples. O alcance, a altura máxima atingida e o tempo de voo, por sua vez, não podem ser calculados analiticamente, e mais ainda, o ângulo de lançamento para o alcance máximo depende da velocidade de lançamento e da natureza do projétil, podendo diferir em vários graus do ângulo de 45°.

Nos cursos de mecânica, no nível intermediário[4,5], juntamente com o modelo parabólico, são estudados alguns modelos que incluem efeitos da atmosfera, porém são ainda modelos integráveis e que não simulam satisfatoriamente o problema real. Como veremos abaixo, quando incorporamos efeitos mais realistas, devido à resistência do ar, as equações do movimento que descrevem o modelo são agora por demais complicadas, não apresentando soluções analíticas. Tivemos então que resolvê-las numericamente. Os métodos numéricos que foram usados são bastante simples para serem entendidos e programados por alunos iniciantes. A precisão dos resultados obtidos foi estabelecida pela comparação com os dados experimentais de um projétil disparado por um canhão 105 mm e com os resultados obtidos através de métodos numéricos mais sofisticados.

Durante as duas grandes guerras estudou-se intensivamente a trajetória de granadas lançadas de canhões com o objetivo de determinar-se o alcance, em função da inclinação do cano do canhão e da velocidade de saída do projétil, e conseqüentemente aumentar o per-

centual de acerto nos alvos. Os resultados eram resumidos em tabelas muito difíceis de serem elaboradas. É interessante notar que o desenvolvimento de um dos primeiros computadores foi exatamente para facilitar a confecção das tabelas de tiro de canhões usados na segunda guerra mundial. O Laboratório de Pesquisas Balísticas do Campo de Testes de Aberdeen em Maryland (EUA), foi o primeiro a usar, na elaboração de suas tabelas, os resultados obtidos através do Eniac (Computador e Integrador Numérico Eletrônico), computador primitivo de 18000 válvulas e pesando 30 toneladas[6,7].

Na seção seguinte estabelecemos o modelo, na seção III revisamos os métodos numéricos usados, na seção IV apresentamos os resultados e discussões e, finalmente, na seção V, as conclusões.

II. O modelo

A força de resistência do ar sobre um objeto movendo-se próximo à superfície da terra depende de vários fatores. Depende, por exemplo, da velocidade e da direção do movimento do objeto, sua forma, dimensões e rugosidade, se o objeto possui movimento de rotação, da densidade do ar, da velocidade relativa do ar. É claro que é muito difícil estabelecermos um modelo teórico que incorpore a resistência do ar tratando todos os efeitos pertinentes de uma maneira rigorosa. Em princípio, para cada projétil, deveríamos estabelecer um modelo particular. Juntamente com a dificuldade de incluirmos todos os efeitos importantes em um modelo, é necessário determinar-se experimentalmente alguns parâmetros que dependem da geometria e rugosidade da superfície do projétil e dos intervalos de velocidade envolvidos. Neste artigo estabeleceremos um modelo padrão de um projétil que consiste de uma esfera lisa de massa m e diâmetro d .

Historicamente, Isaac Newton foi o primeiro a propor uma lei de força para a força de resistência experimentalmente por um corpo movendo-se através de um fluido. Modernamente podemos escrever a intensidade desta força, para fluidos de baixa densidade, como o ar, da seguinte maneira [8]:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A \rho v_r^2. \quad (1)$$

Onde v_r é a velocidade do corpo em relação ao fluido, ρ é a densidade do fluido, A é a área do corpo projetada na direção do fluxo de ar e C_D é o coeficiente de arraste. Esta lei pode ser facilmente derivada usando-se

o teorema do momento linear [9]. Na figura 1, vemos o diagrama de forças que atuam em um projétil movendo-se no ar, juntamente com a velocidade \vec{v} do projétil em relação ao solo, a velocidade $\vec{\omega}$ do vento, e a velocidade relativa \vec{v}_r . A força de arraste pode ser escrita como $\vec{F}_D = -\frac{1}{2}C_D A \rho \nu_r \vec{v}_r$. As componentes cartesianas da velocidade relativa são: $\nu_{r_x} = \nu_x - \omega_x$ e $\nu_{r_y} = \nu_y - \omega_y$.

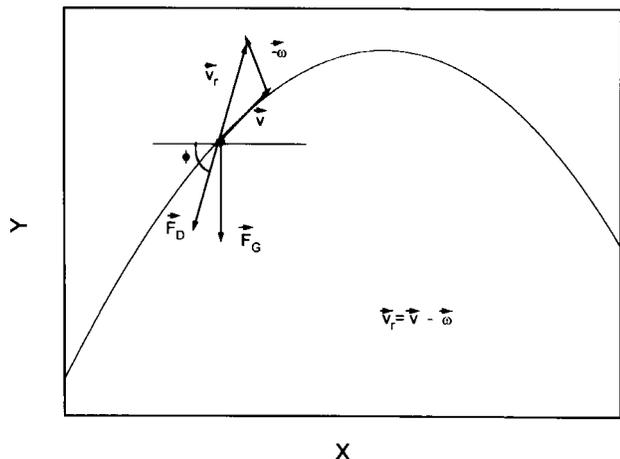


Figura 1. Diagrama das forças de arraste e gravitacional, velocidade do projétil, velocidade do vento, e velocidade relativa.

Observando a Fig. 1, as equações do movimento são então estabelecidas como

$$ma_x = -F_D \cos\phi = -F_D(\nu_x - \omega_x)/\nu_r \quad (2)$$

$$ma_y = -F_D \sin\phi = -F_D(\nu_y - \omega_y)/\nu_r - F_G \quad (3)$$

F_G é a intensidade da força gravitacional dada por

$$F_G = \frac{mg}{(1 + y/R_T)^2} \quad (4)$$

R_T é o raio da Terra, g é a aceleração da gravidade na superfície, m é a massa do projétil e y é a posição

vertical do projétil acima da superfície da terra. Substituindo as eqs. (1) e (4) nas eqs. (2) e (3) e fazendo $A = \pi d^2/4$, obtemos

$$a_x = -\left(\frac{\pi d^2}{8m}\right) C_D \rho \nu_r (\nu_x - \omega_x) \quad (2a)$$

$$a_y = -\left(\frac{\pi d^2}{8m}\right) C_D \rho \nu_r (\nu_y - \omega_y) - \frac{g}{(1 + y/R_T)^2} \quad (3a)$$

Na maioria das simulações do movimento de projéteis, as eqs. (2a) e (3a) são resolvidas admitindo-se ρ e C_D constantes. Sabemos, no entanto, que a densidade atmosférica decresce com a altitude e, certamente para lançamentos com grandes velocidades de saída, onde o projétil pode alcançar grandes altitudes, devemos levar em conta tal variação. Na presente simulação assumimos uma atmosfera isotérmica com densidade variável descrita pela função $\rho(y) = \rho_0 \exp(-ay)$. Na verdade $\rho(y)$ é um ajuste que fizemos dos valores medidos da densidade atmosférica [10] em função da altitude, onde $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$ e $a = 0,00013 \text{ m}^{-1}$. O coeficiente de arraste C_D geralmente é assumido constante e igual a 0,5. Porém, sabe-se que C_D depende da geometria do projétil, da rugosidade de sua superfície e da velocidade relativa do mesmo. Para uma esfera lisa, os dados experimentais mostram uma grande variação do coeficiente de arraste com o número de Mach, $M = \nu_r/\nu_s$, onde ν_s é a velocidade do som no ar. Consequentemente incorporamos no nosso modelo um coeficiente de arraste variável. Na figura 2 mostramos os dados experimentais de C_D [5,11], para uma esfera lisa e o ajuste feito para diferentes faixas de velocidade. Abaixo transcrevemos explicitamente as equações que ajustam C_D , em função de M , usadas segundo a faixa de velocidade nas equações (2a) e (3a).

$$C_D = 0,50; \quad (0 \leq M < 0,03)$$

$$C_D = -7782,58M^5 + 2536,15M^4 - 186,62M^3 - 11,78M^2 + 1,79M + 0,03; \quad (0,03 \leq M < 0,23)$$

$$C_D = 0,52M^2 - 0,09M + 0,07; \quad (0,23M < 0,60)$$

$$C_D = 2,42M^3 - 4,58M^2 + 2,93M - 0,43; \quad (0,60 \leq M < 1,0)$$

$$C_D = 0,45M^5 + 4,21M^4 + 15,23M^3 - 26,98M^2 + 23,42M - 7,58; \quad (1,00 \leq M < 2,0)$$

$$C_D = 0,45M^{-1} + 0,13; \quad (2,00 \leq M < 6,00)$$

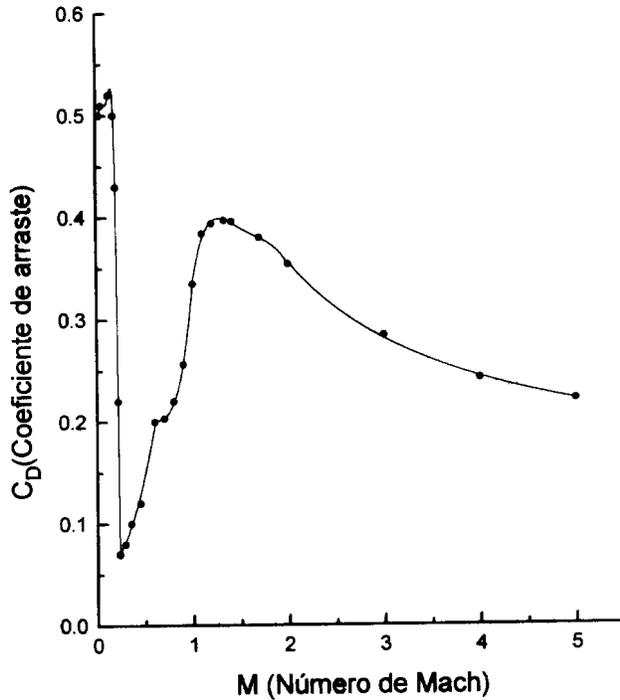


Figura 2. Gráfico do ajuste do coeficiente de arraste C_D em função do número de Mach (M).

Sabemos que além da força de atrito, anti-paralela à velocidade relativa do projétil, existe uma força de sustentação que depende da geometria do projétil bem como de rotações segundo algum eixo do projétil [5]. Para o projétil esférico, sem considerar rotações, este efeito não está incorporado nas equações do movimento.

Como podemos observar, as eqs. (2a) e (3a) são equações não lineares acopladas não apresentando portanto soluções analíticas. No entanto, como mostraremos a seguir, elas podem ser resolvidas por métodos numéricos simples, apresentando resultados satisfatórios quando comparados com resultados obtidos através de métodos mais elaborados.

III. Métodos Numéricos

Nesta seção faremos uma breve revisão de alguns métodos numéricos simples que são comumente usados na solução numérica das equações do movimento. Por simplicidade, nas equações que apresentaremos em seguida, apenas uma componente do movimento será apresentada, ficando implícita a validade das mesmas para as outras componentes.

A essência de um método numérico pode ser descrita simplesmente como sendo um processo sequencial. Sabendo-se a força e portanto a aceleração, começamos com a posição e a velocidade da partícula

num tempo t e produzimos uma nova posição e velocidade num tempo posterior $t + \Delta t$. Para o caso unidimensional as relações matemáticas entre posição, velocidade e aceleração são dadas por

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (6)$$

onde a aceleração pode ser uma função do tempo, da velocidade e da posição.

(a) Método de Euler do primeiro ponto (EPP)

As equações (5) e (6) podem ser resolvidas numericamente convertendo-as em um conjunto de equações lineares que possam ser resolvidas passo a passo. Lembrando a definição de derivada, podemos escrever a eq. (6) como

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\nu(t + \Delta t) - \nu(t)]}{\Delta t} \quad (7)$$

Se Δt é suficientemente pequeno, escrevemos uma aproximação da eq. (7),

$$\nu(t + \Delta t) = \nu(t) + a\Delta t, \quad (8)$$

que sugere a possibilidade de substituir as equações do movimento por equações lineares iterativas no tempo. Assumindo o intervalo de tempo Δt constante e fazendo $t_n = t_0 + n\Delta t$, $\nu(t_n) = \nu_n$, $a(t_n, \nu_n, x_n) = a_n$ e $\nu(t_n + \Delta t) = \nu_{n+1}$, teremos

$$\nu_{n+1} = \nu_n + a_n\Delta t \quad (9)$$

e

$$x_{n+1} = x_n + \nu_n\Delta t \quad (10)$$

onde n representa o número de intervalos de tempo Δt decorridos desde o início do movimento e a_n , ν_n e x_n o valor da aceleração, da velocidade e da posição, respectivamente, ao fim de n intervalos de tempo. As eqs. (9) e (10) podem ser consideradas como o ponto de partida no desenvolvimento de algoritmos elementares. Estas equações constituem o conhecido método de Euler ou o método do primeiro ponto, pois, no cálculo de x_{n+1} a velocidade usada é a velocidade ν_n no começo do intervalo de iteração.

(b) Método de Euler do ponto médio (EPM)

O método (EPM) é uma variante do método (EPP), onde no cálculo de x_{n+1} usa-se a média aritmética das velocidades no início e no fim do intervalo de iteração,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(\nu_n + \nu_{n+1})\Delta t. \quad (11)$$

Substituindo-se ν_{n+1} da eq. (9) na eq. (11) obtemos facilmente:

$$x_{n+1} = x_n + \nu_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n \Delta t^2 . \quad (12)$$

A aproximação (EPM) é mais razoável do que a aproximação (EPP). Na verdade ela reproduz resultados exatos quando a aceleração é constante. Esta aproximação também enseja uma interpretação física simples. Consistente com a eq. (8), a posição x_{n+1} é calculada assumindo-se a aceleração constante no intervalo Δt , diferentemente do caso anterior, onde x_{n+1} é calculado mantendo-se a velocidade constante no intervalo considerado. No entanto, ambas as aproximações não são indicadas na solução de sistemas periódicos pois os erros introduzidos em cada iteração são cumulativos. Por exemplo, aplicadas no caso do oscilador harmônico simples, estas aproximações apresentam soluções tais que a amplitude cresce em cada ciclo, ainda que, no caso da aproximação (EPM) a divergência seja mais lenta.

(c) Método de Euler do ponto final (EPF)

A aproximação, cuja equações escreveremos em seguida, foi descoberta quase que por acaso e, apesar de muito simples, estabiliza a trajetória de movimentos periódicos. Nesta aproximação, a velocidade é obtida da mesma maneira que nas aproximações anteriores, porém, no cálculo da posição, em vez de se usar a velocidade no começo do intervalo ou a velocidade média, usa-se a velocidade no fim do intervalo. Ou seja,

$$x_{n+1} = x_n + \nu_{n+1} \Delta t . \quad (13)$$

Pode-se mostrar que os erros introduzidos nesta aproximação são limitados, oscilatórios e cujo valor médio, integrado em meio período é zero [12]. Apesar da diferença entre a aproximação (EPP) e a aproximação (EPF) ser apenas a troca de ν_n por ν_{n+1} , esta última pode ser iterada um número maior de vezes fornecendo soluções mais precisas.

(d) Método de Diferenças Finitas

O método (DF) baseia-se na aproximação de uma derivada num ponto por uma coleção de valores próximos ao ponto considerado [13]. Por exemplo, as eqs. (5) e (6) são substituídas por

$$a_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (14)$$

e

$$\nu_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} \quad (15)$$

A eq. (14) pode ser escrita como

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_n \Delta t^2, \quad (14a)$$

possibilitando então o cálculo da velocidade e da posição através das eqs. (15) e (14a), respectivamente. Pode-se mostrar que o algoritmo (DF) descrito acima é absolutamente estável, no sentido de que o erro em x_n permanece limitado quando $n \rightarrow \infty$ [14]. Podemos notar que o método (DF) não se auto-inicia. Por exemplo, para determinarmos a velocidade em um instante, necessitamos conhecer a posição em dois outros instantes. Em geral os valores iniciais são obtidos por algum outro método, por exemplo, podemos usar o método (EPF).

As eqs. (14a) e (15) nos ensejam uma análise inter-comparativa entre os métodos descritos acima. Podemos ver que o método (EPF) é exatamente equivalente ao método (DF) com respeito à posição x . Por exemplo, usando a eq. (9) e a eq. (13) do método (EPF) podemos obter a eq. (14a) do método (DF), explicando portanto a estabilidade do método (EPF). Se procedermos da mesma maneira para o método (EPP), encontraremos que

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_{n-1} \Delta t^2,$$

sendo absolutamente instável [14].

(e) Método Runge-Kutta em quarta ordem (RK4)

O método (RK4) é um dos métodos numéricos mais usados na solução de equações diferenciais [13,15]. Formalmente é um método mais elaborado do que os métodos apresentados acima e os detalhes para a obtenção deste algoritmo serão omitidos, desde que, um dos nossos objetivos é resolver as equações do movimento usando métodos mais simples. Todavia, com as equações que apresentaremos abaixo, tal método pode ser implementado sem muita dificuldade e servir como teste de precisão para métodos menos sofisticados.

A velocidade e a posição são dadas pelas seguintes expressões:

$$\nu_{n+1} = \nu_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (16)$$

e

$$x_{n+1} = x_n + \left[\nu_n + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3) \right] \Delta t , \quad (17)$$

onde,

$$k_1 = a(t_n, \nu_n, x_n) \Delta t,$$

$$k_2 = a \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} \nu_n, \nu_n + \frac{k_1}{2} \right) \Delta t,$$

$$k_3 = a \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} \nu_n + \frac{\Delta t}{4} k_1, \nu_n + \frac{k_2}{2} \right) \Delta t,$$

$$k_4 = a \left(t_n + \Delta t, x_n + \nu_n \Delta t + \frac{\Delta t}{2} k_2, \nu_n + k_3 \right) \Delta t .$$

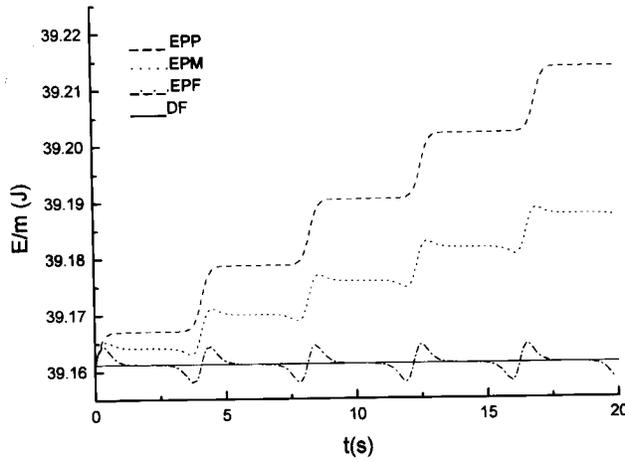


Figura 3. Energia mecânica do pêndulo simples em função do tempo calculada através dos métodos numéricos Euler do Primeiro Ponto (EPP), Euler do Ponto Médio (EPM), do Ponto Final (EPF) e Diferenças Finitas (DF).

Podemos notar que os métodos descritos acima são muito simples de programar porém, antes de aplicarmos tais métodos no modelo de projéteis, fizemos alguns cálculos no pêndulo simples, cuja equação do movimento é dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Verificamos que tanto o método (EPP) como o método (EPM) produzem resultados insatisfatórios, mesmo para valores de Δt muito pequenos. Por outro lado, os métodos (EPF) e (DF) produzem resultados comparáveis ao (RK4). Na figura 3 apresentamos a energia mecânica calculada em um dos testes feitos no pêndulo simples com $g = 9,81\text{m/s}^2$, $l = 2,0\text{m}$, com as condições iniciais, $\nu_0 = 8,85\text{m/s}$, $\theta_0 = 0$, e $\Delta t = 0,0001\text{s}$. Podemos observar que a energia mecânica cresce quando computada nas aproximações (EPP) e

(EPM). Mantêm-se constante quando computada pelo método (DF) e oscila quando calculada pelo método (EPF), porém com um valor médio igual ao valor calculado por (DF). O período do movimento obtido dos cálculos (DF) e (EPF) coincide com aquele obtido em um estudo do comportamento crítico do pêndulo simples [16] e com o valor obtido pelo método (RK4). Em vista de tais resultados, adotaremos os métodos (DF) e (EPF) na solução das equações (2a) e (3a). Os resultados obtidos serão comparados com cálculos feitos usando o método (RK4).

IV. Resultados

Antes de apresentarmos os resultados da simulação do movimento de um projétil e compará-los com dados experimentais, realizamos um teste de convergência entre os métodos (EPF), (DF) e (RK4) para a escolha de Δt . Na tabela 1 apresentamos os resultados do teste para um projétil com $m = 2,0\text{kg}$ e $d = 0,2\text{m}$. Assumimos $\nu_0 = 200\text{m/s}$ e $\theta_0 = 30^\circ$. Podemos notar da tabela 1 que o tempo de subida (t_s), a altura máxima atingida pelo projétil (H), o tempo de voo (t_ν) e o alcance (R) convergem, na precisão assumida, para os mesmos valores, nos três métodos, com $\Delta t = 0,001\text{s}$ para (RK4) e $\Delta t = 0,0001\text{s}$ para (EPF) e (DF). Em vista destes resultados no restante dos cálculos estes serão os valores de Δt usados correspondentemente.

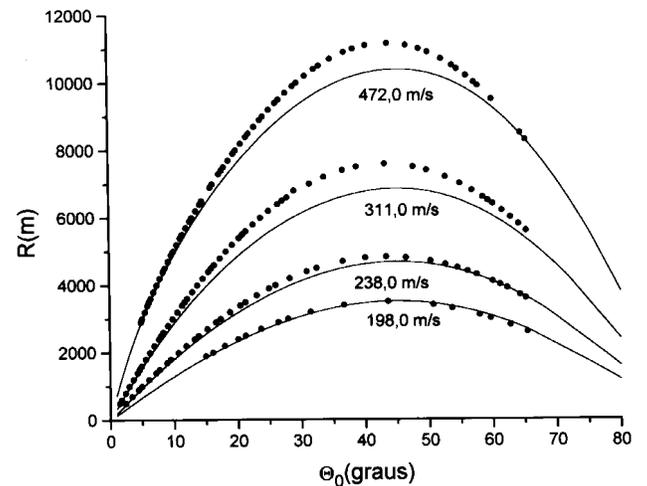


Figura 4. Alcance em função do ângulo de lançamento para um projétil lançado de um canhão 105 mm. Comparação entre o cálculo (EPF) e os pontos experimentais da Ref. 17.

Tabela 1. Estudo da convergência dos métodos numéricos EPF, DF e RK4 em função de Δt , para um projétil com $m=2,0$ kg e $d=0,2$ m. $v_0=200,0$ m/s, $\theta_0=30^\circ$.

	EPF	DF	RK4
$\Delta t=0,01s$			
$t_s(s)$	6,2	6,2	6,2
$H(m)$	238,7	239,2	239,6
$t_v(s)$	15,4	15,4	15,5
$R(m)$	1070,1	1070,8	1073,1
$\Delta t=0,001s$			
$t_s(s)$	6,2	6,2	6,2
$H(m)$	239,5	239,6	239,6
$t_v(m)$	15,5	15,5	15,5
$R(m)$	1073,0	1073,0	1073,0
$\Delta t=0,0001s$			
$t_s(s)$	6,2	6,2	6,2
$H(m)$	239,6	239,6	239,6
$t_v(s)$	15,5	15,5	15,5
$R(m)$	1073,0	1073,0	1073,0

Inicialmente simulamos o movimento de um projétil lançado por um canhão de 105 mm. O projétil tem uma massa de 14,980 kg e um diâmetro de 0,105 m. Este canhão foi um dos mais usados durante as décadas de 40, 50 e 60 pela maioria das artilharias ocidentais e podia lançar a ogiva com 7 velocidades de saída diferentes: 198,0, 216,0, 238,0, 267,0, 311,0, 376,0, e 472,0 m/s. A escolha do projétil 105 mm deveu-se ao fato de que existem tabelas de tiro para este canhão que fornecem resultados experimentais para R , H e t_v para cada velocidade de lançamento em função de θ_0 [17]. Na tabela 2 e figura 4 comparamos os cálculos (EPF), (DF) e (RK4) com os resultados experimentais para quatro velocidades de lançamento. Na primeira coluna da tabela 2, para uma dada velocidade de lançamento, θ_{max} é o ângulo para R máximo. H e t_v são a altura e o tempo de voo correspondentes. Os dados dispostos nas colunas 2, 3 e 4 foram obtidos para cada velocidade, computando-se valores de R , H e t_v em função de θ_0 . Ajustando-se os pontos calculados para R , H e t_v a

uma curva polinomial, determinamos o valor de θ_{max} que fornece o alcance máximo e posteriormente determinamos H e t_v para o valor obtido de θ_{max} . Os resultados experimentais foram tratados da mesma maneira e os valores correspondentes estão dispostos na coluna 5. Na figura 4 são mostrados os pontos experimentais e os ajustes do alcance da simulação (EPF). Notamos que os resultados (DF) e (RK4) são praticamente idênticos aos resultados (DF). A partir da tabela 2 podemos calcular o módulo dos erros relativos, mínimo e máximo, para θ_{max} , H e t_v . Do cálculo (EPF) para o alcance estes erros são 0,3% e 10,7%, respectivamente. O erro mínimo ocorrendo para a velocidade inicial de 198,0 m/s e o erro máximo para a velocidade inicial de 311,0 m/s. É interessante notar que para a velocidade de 472,0 m/s o erro no alcance diminui 3,0% comparado com o da velocidade de 311,0 m/s. Os erros mínimo e máximo para a altura máxima são, 1,1% e 2,9% correspondendo as velocidades de 238,0 m/s e 311,0 m/s. Os erros mínimo e máximo para o tempo de voo são, 0,6%

e 1,5%, para as velocidades de 238,0 m/s e 311,0 m/s, respectivamente. Finalmente, os erros para o ângulo de alcance máximo situam-se entre 1,1% para a velocidade inicial de 472,0 m/s e 3,4% para a velocidade de 311,0 m/s. Vale salientar que para os dados experimentais existem algumas incertezas. Por exemplo, é reportado [17] que existe, em média, um desvio de 0,5% para mais nos alcances. Também existe uma incerteza na velocidade de saída, pois a mesma é dependente da quantidade de explosivo e da temperatura, o que naturalmente afeta toda a trajetória. De modo que podemos estimar que os resultados para o alcance da simulação da tabela 2 divergem, no pior caso, de no máximo 10,0% dos resultados experimentais. Na tabela 3 apresentamos um

estudo do efeito da atmosfera e do coeficiente C_D no movimento do projétil. Os resultados obtidos foram tratados da mesma maneira que os resultados da tabela 2 e o método numérico usado foi o (EPF). Para a velocidade de saída de 376,0 m/s obtemos para ρ e C_D variáveis, por exemplo, um alcance com um erro relativo de 10,0%. Para $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ e C_D variável o erro agora é de 16,5%. Para ρ variável e $C_D = 0,5$ o erro agora é de 54,3% e para ρ e C_D fixos o erro é de 64,9%. As outras grandezas computadas também apresentam grandes erros quando não se leva em conta as variações na densidade atmosférica e no coeficiente de arraste.

Tabela 2. Comparação entre os resultados calculados e os resultados experimentais para um projétil lançado de um canhão 105mm.

	EPF	DF	RK4	Referência 17
$v_0=198,0 \text{ m/s}$				
θ_{max}	44,7°	44,7°	44,7°	43,7°
$R(m)$	3510,4	3510,4	3510,4	3499,8
$H(m)$	913,6	913,6	913,6	890,4
$t_v(s)$	27,3	27,3	27,3	26,9
$v_0=238,0 \text{ m/s}$				
θ_{max}	44,8°	44,8°	44,8°	43,4°
$R(m)$	4679,0	4678,9	4679,0	4828,6
$H(m)$	1257,7	1257,8	1257,7	1243,3
$t_v(s)$	32,0	32,0	32,0	31,8
$v_0=311,0 \text{ m/s}$				
θ_{max}	44,6°	44,6°	44,6°	43,1°
$R(m)$	6847,0	6847,0	6847,1	7580,9
$H(m)$	1928,9	1928,9	1928,9	1985,7
t_v	39,6	39,6	39,6	40,2
$v_0=472,0 \text{ m/s}$				
θ_{max}	44,7°	44,7°	44,7°	44,2°
$R(m)$	10379,6	10379,7	10379,8	11102,8
$H(m)$	3211,5	3211,5	3211,6	3298,1
$t_v(s)$	50,7	50,7	50,7	51,2

Para estudarmos o efeito do vento na trajetória de um projétil, assumimos uma bola de futebol com $m=0,454$ kg, $d=0,222$ m lançada com $v_0=40,0$ m/s e $\theta_0=60,0^\circ$. Na figura 5 mostramos as trajetórias para $\omega = 0$ e as trajetórias para $\omega = 4,0$ com diferentes inclinações segundo o eixo x . Os dados da tabela 4 mostram sem sombra de dúvidas a importância do vento na trajetória da bola de futebol. No caso do vento soprando na direção do lançamento com a velocidade paralela ao eixo x , tem-se um aumento de 33,3% no alcance. Na terceira coluna da tabela 4 mostramos os dados obtidos do modelo parabólico. Ressalta-se claramente as diferenças no alcance, altura máxima atingida tempo de subida t_s , tempo de vôo t_v e o papel da atmosfera no movimento do projétil.

Finalmente apresentamos os resultados da simulação (EPF) para o famoso canhão alemão apelidado de “Big Bhertha”, que foi usado para bombardear Paris durante a primeira grande guerra mundial. A chamada arma de Paris atirava uma ogiva de massa $m=898,128$ kg, diâmetro $d=0,42$ m [18], com uma velocidade de saída $v_0=1450,0$ m/s [5]. O alcance máximo era de 122,0 km para um ângulo de lançamento de $55,0^\circ$ [5]. É interessante notar que foi naquela época que descobriu-se acidentalmente que o alcance máximo para um projétil com as características e velocidade de lançamento, da ogiva do “Big Bhertha”, dava-se para ângulos maiores do que 45° . Na figura 6 mostramos os resultados dos cálculos (EPF) para o alcance em função do ângulo de lançamento. Vemos claramente que a inclusão de uma atmosfera variável explica o efeito discutido acima. Na presente simulação obtivemos $\theta_{max} = 51,2^\circ$ e um alcance correspondente $R = 134$ km. Enquanto que se admitimos uma atmosfera com densidade constante obtemos, $\theta_{max} = 33,6^\circ$ e $R = 49$ km. Mais uma vez mostramos a importância da variação da densidade atmosférica na simulação do movimento de projéteis.

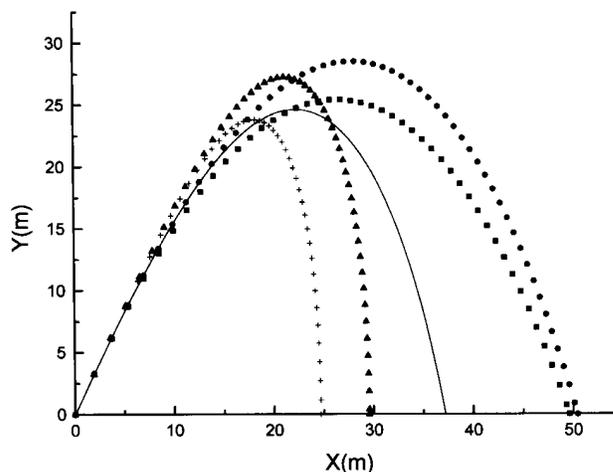


Figura 5. Trajetórias de uma bola de futebol lançada com $v_0 = 40,0$ m/s, e $\theta_0 = 60,0^\circ$. Curva contínua, velocidade do vento $\omega = 0$. Curva marcada por pontos, $\omega = 4,0$ m/s, $\alpha = 45,0^\circ$. Curva marcada com quadrados, $\omega = 4,0$ m/s, $\alpha = 0,0^\circ$. Curva marcada com triângulos, $\omega = 4,0$ m/s e $\alpha = 135,0^\circ$. Curva marcada com sinais (+), $\omega = 4,0$ m/s, $\alpha = 180,0^\circ$. α é o ângulo que a velocidade do vento faz com a direção x .

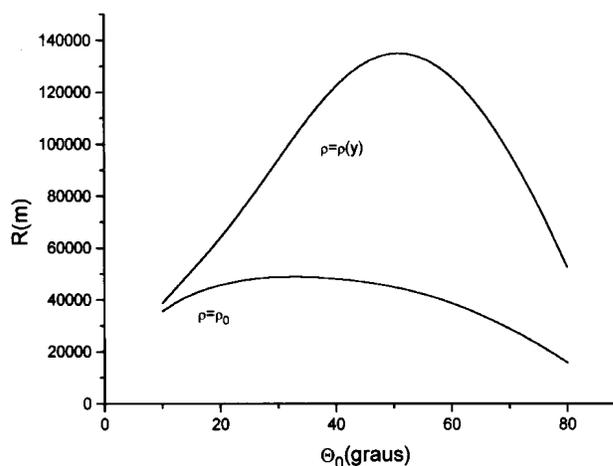


Figura 6.

Tabela 3. Efeitos do coeficiente de arraste e da densidade atmosférica. Projétil lançado de um canhão 105mm. $v_0=376$ m/s

	EPF	DF	RK4	Referência 17
$\rho=\rho(y), C_D=C_D(M)$				
θ_{max}	45,1 ⁰	45,1 ⁰	45,1 ⁰	43,4 ⁰
$R(m)$	8429,2	8429,3	8429,4	9278,5
$H(m)$	2508,5	2508,6	2508,5	2525,4
$t_v(s)$	45,0	45,0	45,0	45,1
$\rho=\rho_0, C_D=C_D(M)$				
θ_{max}	43,3 ⁰	43,3 ⁰	43,3 ⁰	
$R(m)$	7962,2	7962,2	7962,3	
$H(m)$	2295,2	2295,2	2295,3	
$t_v(s)$	43,0	44,0	43,0	
$\rho=\rho(y), C_D=0,5$				
θ_{max}	41,0 ⁰	41,0 ⁰	41,0 ⁰	
$R(m)$	6013,8	6013,9	6013,9	
$H(m)$	1790,7	1790,7	1790,7	
$t_v(s)$	37,9	37,9	38,0	
$\rho=\rho_0, C_D=0,5$				
θ	37,8 ⁰	37,9 ⁰	37,9 ⁰	
R	5626,0	5626,0	5626,1	
H	1547,6	1547,6	1547,6	
t_v	35,2	35,2	35,2	

Tabela 4. Efeitos do vento na trajetória de uma bola de futebol.
 $m=0,454 \text{ kg}$, $d=0,222 \text{ m}$, $v_0=40 \text{ m/s}$, $\theta_0=60,0^\circ$.

	EPF	Parabólico
$\omega=0,0 \text{ m/s}$; $\alpha=0,0^\circ$		
$t_s(s)$	1,9	3,53
$H(m)$	24,6	61,18
$t_v(s)$	4,5	7,06
$R(m)$	37,2	141,29
$\omega=4,0 \text{ m/s}$; $\alpha=0,0^\circ$		
$t_s(s)$	2,0	
$H(m)$	25,4	
$t_v(s)$	4,5	
$R(m)$	49,6	
$\omega=4,0 \text{ m/s}$; $\alpha=45,0^\circ$		
$t_s(s)$	2,2	
$H(m)$	28,5	
$t_v(s)$	5,2	
$R(m)$	50,4	
$\omega=4,0 \text{ m/s}$; $\alpha=135,0^\circ$		
$t_s(s)$	2,1	
$H(m)$	27,2	
$t_v(s)$	5,0	
$R(m)$	29,5	
$\omega=4,0 \text{ m/s}$; $\alpha=180,0^\circ$		
$t_s(s)$	1,9	
$H(m)$	23,8	
$t_v(s)$	4,4	
$R(m)$	24,7	

V. Conclusões

Neste trabalho apresentamos um modelo para simular o movimento de um projétil lançado próximo à superfície da terra. No modelo são incorporados os efeitos da atmosfera tais como a força de arraste e os ventos. As equações que descrevem o movimento são equações não lineares, não apresentando soluções

analíticas. Tais equações são resolvidas numericamente, através de métodos numéricos simples que são discutidos resumidamente. Os resultados obtidos foram comparados com métodos numéricos mais sofisticados e com resultados experimentais. De uma maneira geral, as grandezas calculadas tais como, o alcance, a altura máxima e o tempo de voo apresentam erros relativos de

no máximo 10%, quando comparados com dados experimentais. Atribuímos tais diferenças aos efeitos de sustentação que não são incluídos no modelo. Finalmente, os resultados aqui obtidos podem ser facilmente reproduzidos por qualquer estudante com noções básicas de dinâmica e de programação, mesmo aqueles do segundo grau.

Agradecimentos

Agradecemos ao Prof. J. Pimentel de Lima e ao mestrando em física André P. Vieira pelas valiosas discussões.

Este trabalho foi financiado parcialmente pelo CNPq (Bolsa de Iniciação Científica de J. Fazuri) e FINEP.

Referências

1. S. Drake, J. MacLachlan, *Scientific American*, março, (1975).
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Murril, *Fundamentals of Physics*, Wiley, (1988); J. P. MacKelvey, H. Grotch, *Física*, vol. 1, Harbra, (1979); H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 1, Edgar Blucher Ltda., (1981).
3. J. A. Lock, *The Phys. Teacher*, março, (1982).
4. K. R. Simon, *Mechanics*, Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company, (1971).
5. J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Saunders College Publishing, (1970).
6. A. E. Brenner, *Phys. Today*, outubro, (1996).
7. M. M. Viana, *Fundamentos da Informática para Universitários*, Brasport Livros e Multimídia Ltda., (1996).
8. L. Prandtl, O. G. Tietjens, *Applied Hydro-and Aerodynamics*, Dover Publications, (1957).
9. C. Brueningsen, J. Marinelli, P. Pappano, K. Wallace, *The Phys. Teacher*, **32**, 439 (1989).
10. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, R. C. Weast, editor, CRC Press, Inc. (1983).
11. C. Frohlich, *Am. J. Phys.* **52**, 325 (1984).
12. A. Cromer, *Am. J. Phys.* **49**, 455 (1981).
13. P. L. DeVries, *A first Course in Computational Physics*, Wiley, (1994).
14. A. Bellemans, *Am. J. Phys.* **51**, 275 (1983).
15. D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, Second Edition, Academic Press Inc. (1992).
16. P. M. Castro de Oliveira, *Rev. Bras. Ensino de Física*, **17**, 21 (1995).
17. *Tabela de Tiro do Obús de 105 mm*, Aberdeen, Maryland, abril-maio, (1941).
18. *Enciclopédia Britânica*, Vol. 3, pag. 537-541, William Benton editor (1963).