Vanderlei S. Bagnato
Editor da RBEF
Instituto de Física de São Carlos-USP
Caixa Postal 369 13.560-970. São Carlos, SP

Comentário sobre o artigo:

"Determinação da Densidade e da Massa dos Anéis de Saturno"

Wilson Lopes
Universidade Guarulhos[1]
Universidade de Mogi das Cruzes[2]

Prezado Editor da RBEF:

Através do conhecimento da profundidade ou espessura óptica média do anel B de Saturno, da sua densidade média e da densidade das partículas que o constituem, pode-se ampliar os resultados do artigo "Determinaçao da Densidade e da Massa dos Anéis de Saturno" (Lopes, 1995): determinando-se o raio médio das partículas, o número de partículas por unidade de volume e o número de partículas que constitui esse anel.

Supondo-se que uma região do espaço contém um número muito pequeno de partículas, por unidade de volume, um raio de luz que a atravessa o fará sem muita dificuldade, correspondendo a um valor de espessura óptica desprezível, muito próximo de zero. Por outro lado, admitindo-se que o número de partículas, por unidade de volume, seja tão grande que o raio luminoso não consegue atravessá-la, diz-se que a região tem espessura óptica infinita.

A espessura óptica é definida por:

$$\begin{aligned} d\tau_v &= \alpha_v ds \\ &= n\sigma_v ds, \end{aligned} \tag{1}$$

onde n é o número de partículas por unidade de volume, σ_v, representa a secção de choque em torno de cada partícula para a radiação luminosa de freqüência ν (Rybicki e Lightman, 1979) e ds é a distância percorrida pela radiação no meio.

Se a radiação luminosa forma um ângulo θ com a normal à superfície, tem-se:

$$\begin{aligned} ds &= dy/cos\theta \\ &= sec\theta dy. \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo-se (2) em (1), vem:

$$d\tau_v = n\sigma_\nu sec\theta dy. \tag{3}$$

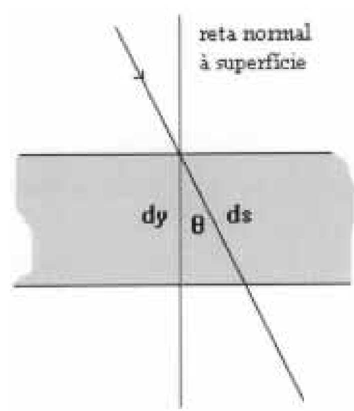

Figura 1: A radiação atravessa um comprimento ds, de uma camada de espessura dy, formando com a reta normal à superfície um ângulo θ.

[1] Universidade Guarulhos, Praça Tereza Cristina 1, CEP 07023-070, Guarulhos, SP
[2] Universidade de Mogi das Cruzes, Caixa Postal 411, CEP 08780-911, Mogi das Cruzes, SP.

Se $\theta = 0$, $ds = dy$ e

$$d\tau_\nu = n\sigma_\nu dy, \tag{4}$$

ou seja, a profundidade óptica depende da distância percorrida pela radiação que é a própria espessura da camada.

O perfil de um anel de forma elíptica, de espessura $2b = 2,6 \times 10^3$ m (Wilson, 1995), raio interno $R_1 = 9,1 \times 10^7$ m e externo $R_2 = 11,7 \times 10^7$ m, em relação ao referencial $x'O'y'$, é dado por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ , \tag{5}$$

onde $a = (R_2 - R_1)/2$ e b representam, respectivamente, os semi-eixos maior e menor da secção reta do anel (a espessura do anel é definida por AB = 2b).

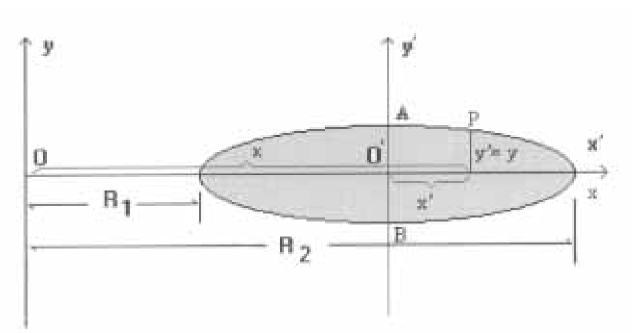

Figura 2: Secção reta do anel de Saturno. O anel gira em torno do eixo de rotação de Saturno, Oy. R, e R2 sao, respectivamente, os raios intemo e externo do anel. O ponto P, pertencente ao perfil elíptico, apresenta coordenadas (x', y') em relação ao sistema x'O'y' e coordenadas (x, y) em relação ao sistema xOy.

Para se escrever a equação, do mesmo perfil elíptico, em relação ao sistema referencial xOy, devem-se proceder, na equação (5), as seguintes transformações: $x' = x - (R_1 + R_2)/2$ e y'= y:

$$\frac{\left(x - \frac{R_1+R_2}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{6}$$

Resolvendo-se a equação (6) em y, vem:

$$y = \pm\frac{2b}{(R_2 - R_1)}\sqrt{(-x + R_2)(x - R_1)}. \tag{7}$$

A equação (7) define o perfil elíptico do anel, em relação ao sistema xOy, onde Oy é o eixo de rotação de Saturno.

Para uma solução simples do problema, assumem-se as seguintes hipóteses:

a) A radiação luminosa que atravessa o anel é paralela ao eixo de rotação de Saturno (o eixo de rotação do planeta e dos anéis são, praticamente, coincidentes).
b) As partículas que constituem o anel são todas de forma esférica, de raio médio $\bar{r}$ e se encontram uniformemente distribuídas.
c) A secção de choque de cada partícula, em relação à radiação luminosa, é dada por: $\sigma_\nu = \pi\bar{r}^2$.

Integrando-se a expressão (4) e levando-se em consideração a hipótese c, obtém-se a profundidade óptica para a distância y, a saber:

$$\tau/2 = n\pi r^2 y \ . \tag{8}$$

Substituindo-se (7) em (8), obtém-se:

$$\tau = 2n\pi\bar{r}^2\frac{2b}{R_2 - R_1}\sqrt{(-x + R_2)(x - R_1)} \tag{9}$$

A equação (9) fornece a profundidade óptica do anel, a uma distância x do eixo de rotação de Saturno, após a radiação ter percorrido a distância 2y.

O valor máximo da profundidade óptica, na equação (9), ocorre para $x = (R_1 + R_2)/2$,

$$\tau_{\max} = n\pi\bar{r}^2 \cdot 2b, \tag{10}$$

e o valor médio da profundidade óptica é definido por[3]

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{1}{R_2 - R_1}\int_{\text{anel}} \tau \cdot dx \\ &= 2n\pi\bar{r}^2\frac{2b}{(R_2 - R_1)^2}\int_{x=R_1}^{R_2} \sqrt{-x + R_2)(x - R_1)} \cdot dx. \\ &= \frac{1}{4}n\ \pi^2\ \bar{r}^2 \cdot 2b \ . \end{aligned} \tag{11}$$

A partir da equação (11), obtém-se:

$$n\bar{r}^2 = \frac{4\bar{\tau}}{\pi^2 \cdot 2b} \ . \tag{12}$$

Por outro lado, a densidade média do anel é definida por:

[3]A integral que resulta no valor médio da profundidade óptica, equação (11), foi resolvida com o auxílio das integrais 146 e 145, nesta ordem, do Handbook of Chemistry and Physics, 1971.

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= m \cdot n \\ &= \frac{4}{3}\pi\ \bar{r}^3\ \mu_p \cdot n\ , \end{aligned} \qquad (13)$$

onde μ_p e n representam, respectivamente, a densidade de cada partícula e o número de partículas por unidade de volume. Da equação (13), pode-se escrever:

$$n\ \bar{r}^3 = \frac{3 \cdot \bar{\mu}}{4\pi \cdot \mu_p}\ . \qquad (14)$$

Com as equações (12) e (14) obtêm-se, respectivamente, o raio médio das partículas, constituintes do anel, e o número de partículas por unidade de volume, a saber:

$$\bar{r} = \frac{3\pi\bar{\mu} \cdot 2b}{16\mu_p \bar{\tau}} \qquad (15)$$

e

$$n = \frac{3\bar{\mu}}{4\pi\mu_p r^3}\ . \qquad (16)$$

Substituindo-se, na equação (15), $\bar{\mu} = 0,101 \times 10^3$ kg/m^3, 2b $= 2,60 \times 10^3$ m (Largura sugerida por Lopes, 1995, compatível com a massa do anel determinada por McLaughlin e Talbot, 1977), $\mu_P = 2,50 \times 10^3$kg/m^3 (densidade típica de material rochoso) e $\bar{\tau} = 1,5$ (Esposito et al., 1983) têm-se, para o raio médio das partículas, $\bar{r} = 41,2$ m. Substituindo-se esse valor do raio médio na equação (16), obtém-se a densidade de partículas por unidade de volume $n = 1,37 \times 10^{-7}$ m^3. Sendo $V = \pi^2 \cdot 2b \cdot (R_2^2 - R_1^2)/4 = 3,97 \times 10^{19}$ m^3 o volume do anel B, pode-se calcular o número de partículas que o constitui: $N = n \cdot V = 4,77 \times 10^{12}$. Desta maneira, a massa do anel B será dada por: $M_B = Nm = N \cdot 4\pi\bar{r}^3\mu_p/3 = 3,50 \times 10^{21}$ kg ou, então, $M_B = 6,15 \times 10^{-6} \cdot M_S$ ($M_S = 5,69 \times 10^{26}$ kg representa a massa de Saturno), que concorda com o valor encontrado por MacLaughlin e Talbot (1977). Por outro lado, para uma densidade $\mu_p = 1,00 \times 10^3$kg/m^3 (densidade típica de gelo) e a mesma profundidade óptica, obtém-se, respectivamente, para o raio médio, número de partículas por unidade de volume e para o número de partículas: 103 m, $2,20 \times 10^{-8}$ m^{-3} e $7,63 \times 10^{11}$ (para estes valores a massa do anel continua a mesma).

Referências Bibliográficas

1. L. W. Esposito, M. O'Callaghan, E. Simmons, C. W. Hord, A. West, A. L. Lane, R. B. Pomphrey, D. L. Coffeen, M. Sato, " Voyager Photopolarimeter Stellar Occultation of Saturn's Rings". Journal of Geophysical Research: **88**(A1), 8643 (1983).
2. *Handbook of Chemistry and Physics.* Editor: Robert C. Weast. Cleveland: ed. 51. Chemical Rubber CO. p. A-172. 1971.
3. W. Lopes, "Determinação da Densidade e da Massa dos Anéis de Saturno". Revista Brasileira de Ensino de Física. São Paulo, **17**(4), 265 (1995).
4. W. I. McLaughlin, e T. D. Talbot, "On the Mass of Saturn's Rings". Monthly Notices R. Astr. Soc. London, **179** (3), 619 (1977).
5. G. B. Rybicki e A. P. Lightman, *Radioactive Processes in Astrophysics*, New York: John Wiley & Sons, 1979, 382 p.

Sem mais para o momento, subscrevo-me,
Atenciosamente,

Wilson Lopes

Residência:
Wilson Lopes
Rua João Marcelo Santoni, 325
Parque Renato Maia
CEP 07114-120,
Guarulhos, SP.