Dedução das Equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação

M. Cattani
Instituto Física, Universidade de São Paulo
Caixa Postal 66318, CEP: 05315-970 São Paulo (SP), Brasil

Trabalho recebido em 4 de abril de 1997

Veremos como *deduzir* de modo simples as equações fundamentais da teoria da gravitação de Einstein para alunos do curso de graduação que tenham alguma noção de relatividade restrita. Apesar da teoria ter cerca de oitenta anos, não existe nenhum tratamento que seja aceito como rigoroso para chegar até equações de Einstein. Mostraremos aqui uma das possíveis deduções das equações de campo da gravitação. Nossa intenção é mostrar como uma mistura de argumentos fisicamente razoáveis, simplicidade matemática e sensibilidade estética nos leva, mais ou menos de modo único, às referidas equações.

1. A geometria do espaço-tempo

Em 1972, o famoso físico indiano S. Chandrasekhar, prêmio Nobel de Física de 1983, publicou um excelente artigo na revista *American Journal of Physics*[1], mostrando como deduzir as equações básicas da teoria de gravitação de Einstein, também denominada de teoria da Relatividade Geral. A dedução das equações é feita usando uma combinação de argumentos fisicamente razoáveis e simplicidade matemática. Esse artigo, entretanto, por ser sucinto demais em algumas partes, fica um pouco difícil de ser entendido por alunos do curso de graduação. A nossa intenção é de, seguindo os passos de Chandrasekhar, fazer uma tentativa de deduzir as referidas equações de tal modo que os alunos de graduação, que conheçam a Relatividade Restrita (R.R.) e um pouco de cálculo tensorial, consigam entender os aspectos fundamentais da teoria de gravitação de Einstein[1-7].

A Física deste século tem mostrado, de modo dramático[8], como são ilusórios e limitados todos os conceitos que os homens criam para analisar e explicar os fenômenos naturais. Cada palavra, conceito ou imagem, apesar de parecerem muito precisos e claros, são somente descrições aproximadas da realidade. Apesar disso, a nossa tendência é sempre acreditar que as criações de nossa mente representem a realidade propriamente dita. Como é extremamente difícil termos uma consciência exata das limitações dos conceitos gerados por nossa mente, tendemos a confundí-los com a realidade. Um dos nossos objetivos é o de buscar superar tal confusão. Isto é possível à medida que as nossas técnicas experimentais vão evoluindo[2]. Ampliando o horizonte de experiências as restrições de nossa mente racional tornam-se mais claras, levando-nos a abandonar, ou modificar, alguns conceitos estabelecidos.

Acreditamos que, dentre os conceitos criados para descrever a natureza, o espaço e o tempo são os mais importantes. Eles são de vital importância para a ciência, filosofia e nossa vida cotidiana: eles servem para ordenar eventos e objetos no ambiente que nos cerca. Como praticamente todas as leis da física são formuladas usando as noções de espaço e tempo, uma das maiores revoluções na história da física foi a profunda modificação dessas noções fundamentais, gerada pela teoria da relatividade[1-7].

Até o início deste século os físicos acreditavam na existência de um espaço absoluto tridimensional Euclideano, independente dos objetos materiais que são contidos por ele. Admitiam também que o tempo era uma dimensão separada, igualmente absoluto, fluindo de modo uniforme, independentemente do mundo material. Essas concepções, pelo menos no mundo ocidental, estavam tão profundamente arraigadas nas mentes de filósofos e cientistas que eram tidas como propriedades genuínas e indubitáveis da natureza.

Devemos aos gregos a idéia de que a geometria Euclideana é a expressão exata da natureza. Essa crença, que surgiu com o aparecimento do texto "Elementos" de Euclides, perdurou por mais de dois mil anos. Somente nos primórdios do século vinte os físicos, graças a técnicas experimentais mais sofisticadas, começaram a desconfiar dessa concepção geométrica, divina e exata, do mundo. Assim, Minkowski, combinando a eletrodinâmica de Faraday-Maxwell com o princípio da relatividade restrita descobriu que a geometria do espaço-tempo é pseudo-Euclideana (ou de Minkowski). Esta descoberta fundamental foi comunicada pelo próprio Minkowski numa famosa conferência pronunciada em 1908, com as seguintes palavras: "As concepções de espaço e tempo que desejo apresentar aos senhores emergiram do solo da Física experimental e nisto reside o poderio das novas idéias. Essas concepções são radicais. Daqui para diante, o espaço por si mesmo e o tempo por si mesmo estão condenados a desaparecer como simples sombras e só uma espécie de união entre ambos preservará uma realidade independente".

A relatividade restrita e também a relatividade geral (R.G.), como veremos nessas notas, mudaram radicalmente as nossas noções sobre o espaço e o tempo. O espaço dos eventos físicos não pode ser considerado como tridimensional. Espaço e tempo aparecem íntima e inseparavelmente conectados constituindo um sistema mais complexo: um continuum quadridimensional denominado de "espaço-tempo". Os dois não podem ser separados: o que é espaço para um observador poder ser uma mistura de espaço e tempo para outro. Dentro desse contexto não faz sentido indagarmos acerca do comprimento "real" de um objeto ou do intervalo de tempo "real" de um acontecimento. Isto seria equivalente a perguntarmos qual o comprimento real da sombra de uma pessoa. A sombra é uma projeção de pontos de um espaço tridimensional sobre uma superfície bidimensional e terá comprimentos diferentes conforme os diferentes ângulos de projeção sobre a referida superfície[7]. De modo análogo o comprimento de um objeto ou o intervalo de tempo de um acontecimento serão as projeções de pontos do espaço-tempo quadridimensional sobre uma superfície tridimensional.

Foi com o aparecimento da R.R. que começamos a perceber que o espaço e o tempo, assim como deve ocorrer com outros conceitos, são construções de nossa mente e, por conseguinte, devem ser considerados como algo relativo, ilusório e limitado. Com essa nova teoria aprendemos que um sistema de coordenadas não possui um significado objetivo; as coordenadas do espaço-tempo são apenas elementos de uma linguagem que um observador utiliza para descrever o seu meio ambiente.

Através do estudo das propriedades físicas de um dado do campo de forças seria possível, em princípio, determinar a métrica do espaço-tempo associada ao referido campo. Até o presente momento, acredita-se que uma geometria pseudo-Euclideana esteja associada às interações forte, fraca e eletromagnética. A afirmação de que processos físicos ocorrem num espaço pseudo-Euclideano é muito mais rica do que o princípio da relatividade. Corresponde a generalizar tal princípio tornando possível a utilização tanto de referenciais inerciais como não inerciais para o estudo das leis da Física. Neste sentido, devemos notar que encontramos frequentemente na literatura afirmações que a R.R. trata somente da descrição de fenômenos em sistemas inerciais, enquanto que a descrição dos fenômenos em referenciais não inerciais é uma prerrogativa da R G.. Estas afirmações estão erradas. Segue de modo trivial da descoberta de Minkowski que podemos usar qualquer sistema de referência, inercial ou não inercial, para descrever os fenômenos físicos[9].

A R.R. que teve início devido a conflitos entre resultados experimentais e as previsões da Física Newtoniana, construiu uma estrutura comum para a Eletrodinâmica de Faraday-Maxwell e a Mecânica de Newton, unificou e completou a física clássica.

Veremos nessas notas, através do estudo da teoria da gravitação de Einstein ou teoria da relatividade geral (R.G.), como é a métrica do espaço-tempo na presença de um campo gravitacional. É importante salientar que, quando a R.G. foi formulada[1,2], em 1916, não havia nenhum conflito sério entre as predições da teoria Newtoniana da gravitação e os resultados experimentais. O que levou Einstein a modificar a teoria clássica da gravitação foi o fato de uma interação gravitacional instantânea estar em desacordo com a R.R. Notemos que a R.G. não é uma simples generalização da teoria Newtoniana da gravitação usando a R.R. (todas as tentativas neste sentido não tiveram muito sucesso!).

Analisaremos, na próxima secção, a equivalência, na teoria Newtoniana, entre a massa inercial e a gravitacional. Este fato é de fundamental importância pois ele é a pedra angular da R.G..

2. Massa inercial e massa gravitacional

As experiências legendárias de Galileo na torre de Pisa mostraram que a aceleração que um corpo adquire num campo gravitacional uniforme independe de sua massa. Disto Newton inferiu a igualdade entre a massa inercial e a gravitacional. O conceito de massa é introduzido na teoria de duas maneiras logicamente distintas e estas são agora postuladas como sendo iguais numericamente. Este é um aspecto surpreendente, possuindo algo de mágico até hoje ainda não esclarecido.

O conceito de massa foi introduzido através da segunda lei de Newton: Força = $\mathrm{m}^{(I)} \times$ aceleração. Esta massa $\mathrm{m}^{(I)}$ é a inercial, que é uma medida da resistência oferecida pelo corpo a uma mudança de velocidade. Esse mesmo corpo interage com outro gravitacionalmente, segundo a teoria de Newton, conforme a lei $G m^{(g)} M^{(g)}/R^2$, sendo R a distância entre eles. As grandezas $m^{(g)}$ e $M^{(g)}$ são as "cargas" ou massas gravitacionais dos dois corpos em interação. De acordo com a segunda lei de Newton a aceleração γ que o corpo de massa $m^{(g)}$ sofre é $\gamma = (m^{(g)}/m^{(I)}) G M^{(g)}/R^2$. De acordo com Galileo, todos os corpos localizados a mesma distância R de $M^{(g)}$ têm a mesma aceleração. Isto implicaria que $m^{(g)}/m^{(I)}$ deveria ser uma constante universal. Sem perda de generalidade poderíamos assumir que $m^{(g)}$ fosse idêntica a $m^{(I)}$. Notemos que este resultado foi deduzido apelando para a experiência. Desde Newton, experiências têm sido feitas com o intuito de verificar até que ponto as duas massas são exatamente iguais. Uma consequência imediata dessa igualdade é que o período de um pêndulo simples não depende nem da massa nem da constituição da bolinha. Bessel concluiu, após uma longa série de medidas, que a independência do período com a massa e a constituição da bolinha podia ser estabelecida com uma precisão de uma parte em 10^5. Eötvös, usando técnicas mais sofisticadas e estudando desvios de um fio de prumo, mostrou que a igualdade das massas era válida dentro de uma precisão de um por 10^9. Recentemente, Dicke[12,10] com técnicas muito refinadas mostrou que ela é válida com uma precisão de uma parte em 10^{11}.

Até hoje não sabemos explicar porque as massas são iguais e isto é aceito como um fato da natureza. Esta igualdade é denominada de *Princípio de Equivalência de Newton*. Uma consequência deste princípio é a seguinte: "Um sistema que está estacionário em um campo gravitacional uniforme com intensidade $\vec{g}$ é fisicamente equivalente a um sistema que está numa região livre de gravitação mas que está acelerado com aceleração $\gamma = -\vec{g}$". Isso corresponde a dizer que realizando experiências nos referidos sistemas é impossível distinguir entre os efeitos de uma aceleração uniforme e um campo gravitacional uniforme. Outra consequência é a seguinte: "para um observador no interior de um sistema em queda livre num campo gravitacional uniforme, num dado instante t, é como se o espaço fosse livre de um campo de forças".

Antes de continuarmos nossa análise, é importante notar que o conceito de campo gravitacional uniforme em todo o espaço não é válido: se fosse válido um corpo poderia ser acelerado indefinidamente até adquirir momento infinito. É um conceito apenas aproximado: podemos admitir tal fato somente em pequenas regiões do espaço.

3. Uma estimativa da métrica do espaço-tempo devido a gravitação

Veremos agora como estimar a métrica do espaço-tempo, levando em conta a equivalência entre $m^{(I)}$ e $m^{(g)}$, devido a presença de um campo gravitacional. Com este intuito, consideremos um campo gravitacional esfericamente simétrico gerado, por exemplo, por uma estrela de massa M, suposta em repouso[11] num sistema S. Seja S_0 um sistema (uma caixa) que cai em queda livre radialmente em direção ao centro da estrela. As coordenadas no sistema S_0 serão indicadas por x_0 (longitudinal, isto é, na direção do movimento), y_0, z_0 (transversal) e t_0. Como num determinado instante de tempo t_0 no interior do sistema S_0, que cai em queda livre, o espaço-tempo pode ser considerado como o de Minkowski, o elemento de linha ds^2 é dado por, $ds^2 = c^2 dt_0^2 - (dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2)$. Supondo que a caixa chega, num instante t, a uma distância r da estrela com velocidade $v; r$ e v são medidas no sistema S da estrela, onde temos as coordenadas r, ϑ, φ e t. Através de uma transformação de Lorentz entre S e S_0 obtemos, $dx_0 = dr/\sqrt{1-\beta^2}$, $dt_0 = dt\sqrt{1-\beta^2}$, $dy_0 = rd\vartheta$ e $dz_0 = r\,\mathrm{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, onde $\beta = v/c$. Desse modo o elemento de linha ds^2 pode ser escrito na forma

$$ds^2 = \frac{c^2\, dt^2(1-\beta^2) - dr^2}{(1-\beta^2) - r^2(d\vartheta^2 + \mathrm{sen}^2\vartheta d\varphi^2)} \quad .$$

A fim de escrevermos o fator $1-\ \beta^2$ em termos do potencial gravitacional $\Phi(r) = -GM/r$, onde M é a massa da estrela, consideremos a equação da conservação da energia de um corpo no sistema S. Sendo m_0 a massa de repouso do corpo e $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, temos $(m - m_0)c^2 + m\Phi(r) = 0$, onde, à esquerda, escrevemos a soma da energia cinética e potencial. A energia constante, à direita, é tomada igual a zero, pois, quando $r \to \infty$ temos $m \to m_0$. Dividindo a equação de conservacão por mc^2, obtemos $1-\sqrt{1-\beta^2} = -\Phi(r)/c^2$. Se a estrela for semelhante ao Sol, $GM/c^2 \simeq 1$ Km, podemos fazer a seguinte aproximação, $1-\beta^2 \simeq 1 + 2\Phi(r)/c^2$. Assim, ds^2 torna-se:

$$ds^2 = \frac{c^2(1+2\Phi(r)/c^2)dt^2 - dr^2/(1+2\Phi(r)}{c^2) - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2)} \qquad (3.1)$$

Assim, partindo da igualdade $m^{(I)} = m^{(g)}$, usando a teoria Newtoniana da gravitação e a R.R., mostramos que a métrica do espaço de Minkowski é alterada devido a presença de um campo gravitacional. Naturalmente, devido as aproximações envolvidas na obtenção da Eq. (3.1), não podemos ter uma idéia, no momento, de qual é a precisão dos nossos resultados. Com certeza, podemos dizer que a geometria do espaço-tempo não é a mesma que a adotada na R.R.; a geometria, conforme veremos na próxima secção, é a de Riemann.

Porém, antes de passarmos a estudar a geometria Riemanniana, analisemos a Eq. (3.1). Ora, se dt é o intervalo de tempo entre dois "tics" de um relógio onde não há campo gravitacional, então para o mesmo relógio localizado no ponto r onde há um campo gravitacional, o intervalo dt_r entre dois "tics" será dado por $dt_r = (1+\Phi(r)/c^2)dt$. Considerando dois pontos A e B separados por uma distancia $h = r_A - r_B$, a razão entre os intervalos de tempo nesses dois pontos será dado por

$$dt_A/dt_B = \frac{(1+\Phi(r_A)/c^2)}{(1+\Phi(r_B)/c^2)} = 1 + gh/c^2 \quad ,$$

onde $g = GM/R^2$ e R é o raio do astro suposto muito maior do que h Esse efeito foi comprovado, com boa precisão, por Hafele e Keating(12,13), utilizando relógios de césio e realizando viagens de circunavegação da Terra em jatos comerciais.

4. Elementos de geometria

Nesta secção, iremos recordar algumas noções sobre espaço, tensores, métrica e introduzir alguns conceitos básicos em geometria Riemanniana(1−7,14). Veremos o mínimo necessário para que se possa ter uma idéia razoável da formulação matemática da R.G..

Seja $x^1, x^2, \ldots, x^N \equiv \{x^\mu\}$ $\quad (\mu = 1, 2, \ldots, N)$ um conjunto de variáveis contínuas independentes, que implica em $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$. Denominamos de *espaço* ao conjunto de todos os pontos representados por essas variáveis. Suponhamos que seja possível descrever o espaço em questão por um novo conjunto de variáveis x'^ν que sejam funções das antigas, isto é, $x'^\nu = x'^\nu(x^\mu)$. Se essa descrição é, sob todos os aspectos, equivalente à antiga, nós devemos ser capazes de obter x^μ como funções das novas variáveis x'^ν, isto é, $x^\mu = x^\mu(x'^\nu)$. Desse modo, nada é perdido quando efetuamos a transformação $x^\mu \to x'^\nu$. Se quisermos, podemos recuperar tudo por uma transformação inversa $x'^\nu \to x^\mu$. Tais transformações denominam-se *biunívocas* ou *um a um*. A descrição de um espaço e o conjunto de todas as suas transformações recebe o nome de *GEOMETRIA*. Os conjuntos de coordenadas x^μ e x'^ν são chamados de *sistemas de coordenadas* S e S', respectivamente.

Como $x'^\nu = x'^\nu(x^\mu)$, os incrementos dx'^ν e dx^μ estão relacionados por $dx'^\nu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\, dx^\mu$. Como assumimos que a transformação de coordenadas é reversível, os dx^μ podem ser obtidos usando a expressão acima, de onde resulta que o determinante dos coeficientes não deve se anular: $\det \left\| \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \right\| \neq 0$.

Qualquer conjunto de N elementos U^ν que se transforma, de um sistema S para outro S', como

dx^ν é denominado de *vetor contravariante*: $U'^\nu = \dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} U^\mu$. Por outro lado, o conjunto de elementos V_ν que se transforma segundo a lei $V'_\nu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} V_\mu$ é chamado de *vetor covariante*. Embora, de modo geral, não haja nenhuma relação entre um vetor covariante e um contravariante, podemos definir uma relação entre eles que é um *invariante*, ou seja, que é independente do sistema de coordenadas. Tal relação, chamada de *produto interno*, é definida por $V_\mu \; U^\mu$. Assim, $V'_\mu U'^\mu = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \cdot \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} V_\alpha U^\beta = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} U_\alpha U^\beta = \delta^\alpha_\beta V_\alpha U^B$, de onde vemos que $V'_\mu U'^\mu = V_\alpha U^\alpha =$ invariante.

O conjunto de grandezas, com dois índices, $U_{\mu\nu}$ que se transforma como $U'_{\mu\nu} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} U_{\alpha\beta}$ é denominado de *tensor covariante de segunda ordem*. Generalizando essa idéia para contravariantes e com mais índices, temos tensores do tipo:

$$U'^{\tau \ldots}_{\mu\nu \ldots} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \cdots \quad U^{\gamma \ldots}_{\alpha\beta \ldots} \quad ,$$

que é um tensor misto com covariâncias $\mu\nu \ldots$ e contravariâncias $\tau \ldots$. O número total de índices dá a ordem do tensor:

U tensor de ordem zero (escalar)

U_μ tensor de 1ª ordem (vetor)

$U_{\mu\nu}$ tensor de 2ª ordem

$U^\alpha_{\mu\nu}$ tensor de 3ª ordem, etc..

Um espaço no qual vetores covariantes e contravariantes existem separadamente é denominado de *espaço afim*. Num espaço afim não existe o conceito de vetor. Há somente vetores covariantes e contravariantes sem qualquer vínculo entre eles. Há espaços nos quais vetores covariantes e contravariantes não existem independentemente, podendo ser convertidos uns nos outros da seguinte maneira: $U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu$ e $U^\nu = g^{\nu\mu} U_\mu$. Tais espaços são ditos *métricos*. O tensor $g_{\mu\nu}$ é definido como sendo o *tensor métrico* do espaço em questão e $g^{\mu\nu}$, a sua forma contravariante. Nesses espaços, as grandezas U_μ e U^μ são equivalentes, sendo representadas pelo ente $\vec{U}$ denominado, simplesmente, de *vetor*. Combinando as duas equações vistas acima, temos, $U_\mu = g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} U_\alpha$, o que implica em $g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \delta^\alpha_\mu$. Em outras palavras, $g^{\mu\nu}$ é o inverso de $g_{\mu\nu}$ e vice-versa, isto é $g^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}/g$, onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$ e $M^{\mu\nu}$ é o determinante menor do componente $g_{\mu\nu}$. Do mesmo modo que os índices dos vetores são abaixados e levantados, os índices de um tensor podem ser submetidos ao mesmo processo, com o auxílio do tensor métrico. Por exemplo, $U^{\nu\tau}_\mu = g_{\alpha\mu} U^{\alpha\nu\tau}$ e $U^{\mu\nu\tau} = g^{\alpha\mu} U^{\nu\tau}_\alpha$. O tensor $g_{\mu\nu}$ funciona como um operador, para tensores de qualquer ordem, para elevar e abaixar índices.

Em um espaço afim, o tensor $g_{\mu\nu}$ não pode ser definido. A equivalência das descrições covariante e contravariante é uma propriedade da geometria métrica ditada por $g_{\mu\nu}$. Com o auxílio deste tensor podemos definir elemento de linha, distância, comprimento, ângulo, perpendicularidade e muitos outros conceitos geométricos que nos são familiares. Em um espaço afim, essas grandezas não são definidas.

O quadrado de um vetor é definido pelo produto interno $\vec{U}^2 = U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta$. De modo análogo, podemos definir o quadrado do diferencial $d\vec{x} : d\vec{x}^2 = g_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu = ds^2$.

A grandeza ds é denominada de *elemento de linha* do espaço métrico e a equação que define ds^2 é chamada *forma quadrática fundamental*. Ela é a equação mais importante das geometrias métricas pois define a grandeza básica de uma geometria métrica, que é a distância ds.

Em um espaço tridimensional Euclideano, os tensores $g_{\mu\nu}$ em coordenadas Cartesianas e esféricas são dados por $g_{\mu\nu} \equiv (1,1,1)$ e $g'_{\mu\nu} \equiv (1, r^2, r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta)$, respectivamente, lembrando que todos os termos não diagonais são nulos. Do mesmo modo, no espaço de Minkowsky x, y, z, ct, temos $g_{\mu\nu} \equiv (-1,-1,-1,1)$. O tensor métrico é diagonal somente quando as coordenadas forem ortogonais entre si. Quando o sistema de coordenadas for oblíquo, $g_{\mu\nu}$ não é diagonal. É o caso, por exemplo, de dois eixos $x^1 = x$ e $x^2 = y$ que formam um ângulo ϑ entre si. Nesse caso, $ds^2 = dx^2 + 2\cos\vartheta \, dx \; dy + dy^2$, de onde vemos que $g_{11} = g_{22} = 1$ e $g_{12} = g_{21} = \cos\vartheta$.

Notemos que, quando as linhas das coordenadas são retas os $g_{\mu\nu}$ são constantes, ou seja, não dependem das coordenadas. Por outro lado, quando as linhas das coordenadas forem curvas, como no caso das coordenadas esféricas, os $g_{\mu\nu}$ são funções de x^μ. As coordenadas são denominadas, nesses dois casos, de *retilíneas* e *curvilíneas*, respectivamente. Se um espaço pode ser descrito por coordenadas retilíneas, ele é considerado um *espaço plano*. São os casos considerados nos exemplos anteriores. Quando um espaço não pode nunca ser descrito por coordenadas retilíneas, ele é um *espaço curvo* ou *Riemanniano*. Como exemplo, temos a superfície esférica onde $r = a$ e as variáveis são $x^1 = \vartheta$ e $x^2 = \varphi$. Daí, tiramos $ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2 \mathrm{sen}^2\vartheta d\varphi^2$, ou seja, $g_{11} = a^2, g_{22} = a^2\mathrm{sen}^2\vartheta$ e $g_{12} = g_{21} = 0$. O elemento de arco ds não pode nunca ser escrito em termos de coordenadas retilíneas. Isto ocorre, essencialmente, porque não podemos desenhar linhas retas sobre a esfera. O mesmo ocorre nas superfícies de parabolóides, hiperbolóides, toros, etc., que são exemplos de espaços curvos. A geometria dos espaços curvos é conhecida como *Geometria Riemanniana*.

Com o intuito de formularmos, mais adiante, o princípio da covariância, é de fundamental importância observarmos que a transformação de qualquer tensor de S para S' é linear. É o caso, por exemplo, de $T_{\mu\nu}$ que se transforma em $T'_{\mu\nu} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}$. Assim, se as componentes de um tensor são nulas em um sistema elas serão nulas em qualquer outro sistema. Desse modo, se em S temos uma equação $U_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}$, nós podemos escrever $G_{\mu\nu} = U_{\mu\nu} - V_{\mu\nu}$ que em S' é dada por $G'_{\mu\nu} = U'_{\mu\nu} - V'_{\mu\nu} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}(U_{\mu\nu} - V_{\mu\nu})$. De onde concluímos, como uma consequência imediata do caráter tensorial, que $U'_{\mu\nu} = V'_{\mu\nu}$.

4.1. Análise tensorial

Através da diferenciação ordinária de um vetor covariante U, por exemplo, obtemos $dU_\mu = d(g_{\mu\nu}U^\nu) = dg_{\mu\nu}U^\nu + g_{\mu\nu}dU^\nu$ mostrando que em coordenadas curvilíneas e, portanto, também em espaços curvos, a diferenciação ordinária destroi o caráter vetorial de dU_μ, pois, em geral, $dg_{\mu\nu} \neq 0$. O mesmo ocorre com um vetor contravariante ou com qualquer outro tensor de ordem superior. A fim de manter o caráter tensorial com a operação de diferenciação, precisamos generalizar o conceito de diferenciação. Com este intuito, é introduzida a *diferenciação absoluta* que é indicada pelo símbolo D. Ela é definida por, $DU_\mu = D(g_\mu \nu U^\nu) = g_{\mu\nu}DU^\nu$. Assim, numa diferenciação absoluta, temos $Dg_{\mu\nu} = Dg^{\mu\nu} = 0$.

Considerando agora o produto escalar $U_\mu U^\mu$ que é um invariante devemos ter $D(U_\mu U^\mu) = d(U_\mu U^\mu)$, ou seja, $DU_\mu U^\mu + U_\mu DU^\mu = dU_\mu U^\mu + U_\mu dU^\mu$ que está satisfeita se assumirmos que $DU^\mu = dU^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}U^\alpha dx^\nu$ e $DU_\mu = dU_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U_\alpha dx^\nu$, onde $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são coeficientes chamados de *símbolos de Christoffel*. Partindo desta definição de diferenciação absoluta, vemos facilmente que a diferenciação de um tensor covariante $A_\mu B_\nu$ é dada por $D(A_\mu B_\nu) = DA_\mu B_\nu + A_\mu DB_\nu = d(A_\mu B_\nu) - \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}A_\mu B_\alpha dx^\lambda - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}A_\alpha B_\nu dx^\lambda$. De onde podemos concluir que para o tensor covariante $g_{\mu\nu}$ temos $Dg_{\mu\nu} = dg_{\mu\nu} - (g_{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} + g_{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda})dx^\lambda$. Permutando ciclicamente os índices μ, ν e λ e somando as três equações resultantes, obtemos, lembrando que $g_{\mu\nu}g^{\mu\alpha} = \delta^\alpha_\nu$,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = (g^{\alpha\lambda}/2)(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad . \qquad (4.1.1)$$

Sendo $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ dada pela Eq. (4.1.1), vemos que $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ e que $\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = \Gamma_{\alpha,\nu\mu}$, onde $\Gamma_{\alpha,\mu\nu}$ é definida por $\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

Como DU^μ e DU_μ podem ser escritas como $DU^\mu = (\partial_\nu U^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}U^\alpha)dx^\nu$ e $DU_\mu = (\partial_\nu U_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U_\alpha)dx^\nu$, podemos verificar que a *derivada covariante*, definida por $U^\nu_{;\nu} \equiv D_\nu U^\mu = \partial_\nu U^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}U^\alpha$ e $U_{\mu;\nu} \equiv D_\nu U_\mu = \partial_\nu U_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U_\alpha$, gera um novo tensor e é considerada como a generalização da derivada parcial ordinária.

Como $D_\nu U_\mu - D_\mu U_\nu = \partial_\nu U_\mu - \partial_\mu U_\nu$, constatamos que o operador *rotacional* ordinário é ainda um tensor em coordenadas curvilíneas, não precisando ser generalizado. Por outro lado, a generalização do operador *divergente* é feita da seguinte maneira: $D_\mu U^\mu = U^\mu_{;\mu} = \partial_\mu U^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\mu}U^\alpha$, que é um escalar. O *Laplaciano* generalizado de um escalar f é definido por: $D_\mu D^\mu f = f^{;\mu}_{;\mu} = \partial_\mu(g^{\mu\nu}\partial_\nu f) + \Gamma^\mu_{\alpha\mu}g^{\alpha\nu}\partial_\nu f$. O divergente e o Laplaciano podem ser escritos, de modo mais compacto, com o auxílio da diferenciação do determinante $g, \partial_\alpha g = M^{\mu\nu}\partial_\alpha g_{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}\partial_\alpha g_{\mu\nu}$, o que nos permite escrever $\Gamma^\mu_{\alpha\mu} = (g^{\mu\nu}/2)\partial_\alpha g_{\mu\nu} = (1/2g)\partial_\alpha g = \partial_\alpha \log\sqrt{g}$. Assim, $U^\mu_{;\mu}$ e $f^{;\mu}_{;\mu}$ são dados, respectivamente, por $U^\mu_{;\mu} = (1/\sqrt{g})\partial_\mu(\sqrt{g}\,U^\mu)$ e $f^{;\mu}_{;\mu} = (1/\sqrt{g})\partial_\mu(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu)f$.

A generalização do invariante quadri-volume $d\Omega$ é dada por $d\Omega \to \sqrt{g}\,d\Omega$ e o teorema de Gauss fica escrito como, $\displaystyle\int U^\mu_{;\mu}\sqrt{g}\,d\Omega = \oint U^\mu\sqrt{g}dS_\mu$, onde dS_μ é o elemento de área da hipersuperfície que envolve o hipervolume.

Em um espaço plano, a derivada segunda $\partial_\mu \partial_\nu U_\sigma$ é igual a $\partial_\nu \partial_\mu U_\sigma$. Num espaço curvo, $D_\mu D_\nu U_\sigma$ não é, em geral, igual a $D_\nu D_\mu U_\sigma$. Subtraindo estas duas derivadas, temos a seguinte igualdade: $D_\mu D_\nu U_\sigma - D_\nu D_\mu U_\sigma = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} U_\lambda$, onde o tensor $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$, dado por $R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}$, é conhecido como *tensor de curvatura ou de Riemann-Christoffel*. Ele dá uma indicação da curvatura do espaço pois depende somente dos $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ e de suas derivadas. De fato, se o espaço for plano, os componentes de $g_{\mu\nu}$, sendo escritos em coordenadas retilíneas, são constantes, anulando os $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Consequentemente, $R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = 0$ em qualquer sistema de coordenadas.

Através de uma contração em $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$, obtemos o *tensor de Ricci*: $R^\sigma_{\lambda\mu\sigma} = R_{\lambda\mu} = R_{\mu\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} + \Gamma^\tau_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\tau} - \Gamma^\tau_{\lambda\mu} \Gamma^\sigma_{\tau\sigma}$. Por meio de uma outra contração, resulta o escalar $R = g^{\lambda\sigma} R_{\sigma\lambda}$, conhecido como *curvatura escalar* ou *invariante de curvatura*. O nome curvatura provém do fato dele medir uma propriedade do espaço que é análoga à curvatura de uma superfície bidimensional. Isto é simples de verificar, analisando o caso de uma superfície esférica de raio a, na qual a métrica é dada por $g_{11} = a^2, g_{22} = a^2 \operatorname{sen}^2\vartheta, g_{12} = g_{21} = 0$, de onde vemos que $g^{11} = a^{-2}, g^{22} = (a \operatorname{sen}\vartheta)^{-2}$ e $g = a^4 \operatorname{sen}^2\vartheta$. Assim usando a Eq. (4.1.1), verificamos que os únicos $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ que não se anulam são $\Gamma^1_{22} = -\operatorname{sen}(2\vartheta)/2$ e $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \operatorname{cotg}\vartheta$. Desse modo temos os tensores de Ricci, $R_{11} = -1$ e $R_{22} = -\operatorname{sen}^2\vartheta$ que geram a curvatura $R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = -2/a^2$. Ou seja, R é proporcional à curvatura Gaussiana de uma esfera de raio a, que é dada por $1/a^2$. A analogia entre o tensor de curvatura e a curvatura Gaussiana é razoável somente no caso de superfícies bidimensionais; para espaços de maior dimensão a relação entre eles é remota.

Se, em um determinado espaço Riemanniano, for possível encontrar um sistema de coordenadas, cobrindo todos os pontos desse espaço, no qual os $g_{\mu\nu}$ são constantes, os $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, os tensores $R^\sigma_{\lambda\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e o escalar R se anulam. Se isto ocorrer, tal espaço se denomina *plano*. Se o espaço for plano, o tensor de curvatura é nulo e esse caráter não pode ser mudado por nenhuma transformação de coordenadas. Um espaço Riemanniano que não é plano é chamado de *curvo*. A "curvatura" de um espaço é uma propriedade intrínseca dele e não depende de um particular sistema de coordenadas no qual a métrica possa ser expressa. A fim de não queimar os neurônios, não devemos ficar imaginando como é um espaço curvo. Um espaço curvo, para o propósito dessas notas, é simplesmente aquele no qual o tensor $R^\sigma_{\lambda\mu\nu}$ não se anula em, pelo menos, um ponto do espaço em questão. Pode-se mostrar que, num espaço curvo, é sempre possível, nas vizinhanças de um ponto P, encontrar um sistema de coordenadas no qual o espaço seja *localmente plano*.

Para terminar essa secção, vamos definir o seguinte tensor, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2$, conhecido como *tensor de Einstein*, que possui as seguintes propriedades:

a) Tem um caráter puramente geométrico pois depende somente de $g_{\mu\nu}$ de suas derivadas.

b) É um tensor simétrico de segunda ordem, $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$.

c) A sua derivada covariante é nula, $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$.

Estas propriedades, como veremos na secção 6, são fundamentais para a formulação das equações de campo da gravitação.

4.2. Geodésica

Consideremos, num espaço Riemanniano, dois pontos P_1 e P_2 pertencentes a uma curva γ. O comprimento de arco s_{12} entre os pontos P_1 e P_2 é dado por

$$s_{12} = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu} \quad ,$$

onde a integral é feita ao longo de γ. Pelos pontos P_1 e P_2 podemos passar uma infinidade de curvas; denominamos de *geodésica* a curva que extremiza a integral s_{12}, ou seja, tal que $\delta s_{12} = 0$. A fim de deduzir as equações diferenciais de uma geodésica, levemos em conta que $\delta(ds^2) = \delta(g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu) = 2\, ds\, \delta(ds) = dx^\mu\, dx^\nu\, (\partial_\sigma\, g_{\mu\nu})\, \delta x^\sigma + 2\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, \delta(dx^\nu)$. Usando este resultado, é fácil vermos que[3]

$$\delta s_{12} = \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} (\partial_\sigma\, g_{\mu\nu})\ \delta x^\sigma + g_{\mu\nu}\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{\delta(dx^\nu)}{ds} \right\} ds \quad .$$

Integrando o segundo termo por partes,

$$\int_1^2 g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{d(\delta x^\nu)}{ds}\,ds = \left[(\delta x^\nu)\left\{g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{ds}\right\}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{d}{ds}\left[g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\right]\,\delta x^\nu\,ds \quad .$$

Como o primeiro termo do segundo membro é nulo, δs_{12} é dado por

$$\delta s_{12} = \int_1^2 \left\{\frac{1}{2}\,\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds}\,(\partial_\sigma\, g_{\mu\nu}) - \frac{d}{ds}\left[g_{\mu\sigma}\,\frac{dx^\mu}{ds}\right]\right\}\delta x^\sigma = 0 \quad .$$

Como os δx^σ são arbitrários, ficamos com a igualdade, $\frac{1}{2}\,\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds}\;\partial_\sigma\, g_{\mu\nu} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}\right)$. Desenvolvendo o segundo termo, teremos

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}\right) = g_{\mu\sigma}\,\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{d}{ds}(g_{\mu\sigma}) = g_{\mu\sigma}\frac{dv^\mu}{ds} + v^\mu\,(\partial_\tau\, g_{\mu\nu})\,v^\tau \quad ,$$

onde definimos $v^\alpha = dx^\alpha/ds$. Desse modo, obtemos, $\frac{1}{2}\,v^\mu v^\nu\,(\partial_\sigma\, g_{\mu\nu}) - g_{\mu\sigma}\,\frac{dv^\mu}{ds} - v^\mu v^\tau\,(\partial_\tau\, g_{\mu\sigma}) = 0$. Notando que o último termo pode ser escrito como

$$v^\mu v^\tau\,(\partial_\tau\, g_{\mu\sigma}) = \frac{1}{2}\,v^\mu v^\tau\,(\partial_\tau\, g_{\mu\sigma} + \partial_\mu\, g_{\tau\sigma})$$

resulta,

$$g_{\mu\sigma}\,\frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma_{\sigma,\tau\mu}\,v^\mu v^\tau = 0$$

onde

$$\Gamma_{\sigma,\tau\mu} = \frac{1}{2}\,(\partial_\tau g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\tau\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\tau}) \quad .$$

Elevando o índice μ obtemos

$$g^{\alpha\sigma} g_{\mu\sigma}\,\frac{dv^\mu}{ds} + g^{\alpha\sigma}\,\Gamma_{\sigma,\tau\mu}\,v^\mu v^\tau = \frac{dv^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\tau\mu}\,v^\mu v^\tau = 0 \quad .$$

Finalmente, podemos escrever as *equações de uma geodésia.*

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\tau\mu}\,\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\tau}{ds} = \frac{Dv^\alpha}{Ds} = 0 \qquad (\alpha,\mu,\tau = 1,2,\ldots,N) \quad . \tag{4.2.1}$$

Ao longo de uma geodésica, como $Dv^\alpha = Dv^\alpha/Ds = 0$, o vetor velocidade $v^\alpha = dx^\alpha/ds$, que é tangente à curva em cada ponto, é constante. Num espaço Euclideano, como os símbolos de Christoffel são nulos, teremos, simplesmente, $d^2x^\alpha/ds^2 = 0$, que integradas geram as retas $x^\alpha - x_0^\alpha = v^\alpha s$, onde x_0^α e v^α são constantes de integração. As geodésicas, num espaço Euclideano, sendo retas, dão as distâncias mais curtas entre dois pontos. Um outro exemplo interessante é o que se obtém em uma superfície esférica de raio a. Lembrando que $x^1 = \vartheta$ e $x^2 = \varphi$ e, usando os valores do tensor métrico vistos na secção (4.1), as equações da geodésica (4.2) se reduzem ao par:

$$\frac{d}{ds}\left(a^2\,\frac{d\vartheta}{ds}\right) - a^2\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{ds}\left(a^2\mathrm{sen}^2\vartheta\,\frac{d\vartheta}{ds}\right) = 0 \quad .$$

As soluções particulares dessas equações são $\varphi =$ constante e $a\vartheta = s$ ou $\vartheta = \pi/2$ e $a\varphi = s$, correspondendo ao meridianos e equador da esfera, respectivamente. Assim, os grandes círculos são geodésicas em uma superfície esférica. Como sabemos, a distância mínima entre dois pontos nesse espaço é dada pelo comprimento de arco de uma grande círculo, que passa pelos referidos pontos.

Ao deduzirmos as equações da geodésica admitimos que o intervalo $ds \neq 0$, o que implica em $g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1$. Existe um outro tipo de geodésica, chamada de *geodésica nula*, que é obtida assumindo que o intervalo entre dois pontos sobre a curva é *zero*. Definindo por λ um parâmetro escalar não nulo variando sobre a geodésica, então para essa espécie de curva, é válida a equação $ds^2 = g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$. Usando o parâmentro λ na integral que deve ser variedade, podemos mostrar[14], de modo análogo ao anterior, que, para uma geodésica nula, as seguintes equações diferenciais são obedecidas:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\tau\mu}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\frac{dx^\tau}{d\lambda} = 0 \qquad (\alpha, \mu, \tau = 1, 2, \ldots, N) \quad .$$

Vejamos como interpretar uma geodésica nula num espaço de Minkowski onde $x^\alpha \equiv (x^4, \vec{x}\,) = (ct, \vec{x}\,)$ e $ds^2 = (dx^4)^2 - (d\vec{x})^2$. Assim, se $ds = 0$, teremos $(d\vec{x}/dt)^2 = v^2 = c^2$. Por outro lado, integrando as equações da geodésica, obtemos linhas retas. Desses resultados, vemos que, num espaço de Minkowski, uma geodésica nula pode ser interpretada fisicamente como a história do movimento de um raio de luz. Esta mesma interpretação se mantém quando um fóton se movimenta em um campo gravitacional.

5. As hipóteses básicas da teoria da gravitação

Conforme vimos antes, o espaço dos eventos físicos da R.R., denominado de espaço de Minkowski, é um espaço Riemanniano quadridimensional plano com uma métrica pseudo-Euclideana. Entretanto, como mostramos na secção 1, a geometria de Minkowski é alterada devido a presença de um campo gravitacional. Einstein usou este fato como ponto de partida para generalizar a teoria Newtoniana da gravitação. Ele assumiu que o espaço-tempo, devido a interação gravitacional, fosse um *espaço curvo quadridimensional Riemanniano*. Assim, um elemento se linha desse espaço seria dado genericamente por $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$. Há, porém, uma condição subsidiária a ser obedecida: se em um determinado ponto desse espaço estabelecermos um sistema localmente plano, o elemento ds^2 deve ser escrito, neste ponto, na forma $ds^2 = (dx^4)^2 - (d\vec{x}\,)^2$. Em outras palavras, o espaço-tempo devido a gravitação deve ser localmente redutível ao de Minlowski. Este tipo de espaço é denominado de *quasi-Riemanniano.*

Adota-se também a hipótese da *covariância* que expressa a idéia de não existir um sistema de coordenadas preferencial, deixando o observador livre para escolher qualquer sistema de coordenadas. De acordo com o que foi analisado na secção 4, essa condição está satisfeita, do ponto de vista matemático, escrevendo as leis físicas usando tensores e equações tensoriais, pois assim elas se transformam de modo covariante ao passar de um sistema para outro.

Uma vez estabelecido que a gravitação encurva o espaço-tempo, e que esta curva é dada através de $g_{\mu\nu}$, não precisamos, de certo modo, nos preocupar com a interação gravitacional. Podemos agora supor que as partículas se movem livremente num espaço curvo onde os fenômenos físicos devidos a gravidade podem ser medidos com régua e relógio.

Nos domínios de validade da R.R., admitirmos que a trajetória de uma partícula é uma geodésica implica que ela seja livre. De fato, como neste caso é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas Cartesianas no qual os coeficientes $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ se anulem, da Eq. (4.2.1) conclui-se que $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{dv^\alpha}{ds} = 0$. Ou seja, nesse sistema a aceleração $\frac{dv^\alpha}{ds}$ é nula e, consequentemente, a velocidade $v^\alpha =$ constante. Obviamente, num sistema de coordenadas curvilíneas os $\Gamma_{\mu\nu}$ não se anulam e a partícula, apesar de não estar sob a ação de nenhuma interação, possui acelerações inerciais. Em R.G., numa generalização óbvia da R.R., postula-se que uma partícula livre descreve uma geodésica. Como $Dv^\alpha/Ds = Dv^\alpha = 0$, temos, como consequência, a constância absoluta da velocidade v^α. A hipótese de que partículas livres descrevem geodésicas é denominada de *princípio geodésico* e corresponde a uma extensão do príncipio de inércia de Galileo. Assim, unificando inércia e gravitação, eliminamos o conceito de força externa transformando a teoria da gravitação em geometria pura.

Para terminar essa secção, vale a pena notar que apesar de muitos anos de trabalho com a teoria da relatividade, cujo formalismo matemático é muito bonito e elegante, sentimos grande dificuldade com os conceitos relativísticos, tanto no nível da intuição como na linguagem usual. A familiarização com o formalismo, que nos fez apreciá-lo, não ajudou muito a nossa intuição. Não possuímos experiência sensorial direta do espaço-tempo quadridimensional ou de quaisquer outros conceitos usados pela teoria[1,2].

6. Gravitação e matéria

Vimos na seção 5 como uma parte das leis da gravitação pode ser formulada postulando que o espaço-tempo é uma variedade Riemanniana e que todas as acelerações devidas a forças gravitacionais e inerciais tem uma origem métrica. Agora vamos relacionar o campo gravitacional com a matétia que o gera. Queremos, novamente, chamar a atenção para o fato de que os argumentos que usaremos para obter essas equações, como também os utilizados na secção anterior, não podem ser considerados rigorosos. Eles parecem ser os mais simples, e de certo modo os mais razoáveis, que sabemos formular.

Indicando por ϕ o potencial escalar da teoria Newtoniana da gravitação podemos dizer que:

(1) Não há campo gravitacional presente quando $\Phi = 0$.

(2) Numa região em que há matéria presente, como densidade ρ, vale a equação $\nabla^2\Phi = -4\pi\Phi G\rho$.

Vejamos como generalizar essas leis Newtonianas. Ora, conforme discutimos antes, na ausência de gravitação a curvatura do espaço-tempo deve se anular. Pode-se mostrar, usando a geometria diferencial, que a condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que o tensor de Riemann-Christoffel se anule, $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = 0$. Esta seria, então, a generalização da condição (1), de $\Phi = 0$. A fim de obtermos a correspondente a condição (2), vamos considerar, apenas para simplificar a análise, a matéria como sendo um fluido ideal. Na. R.R., o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ para um fluido ideal é dado por $T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)v^\mu v^\nu - g^{\mu\nu}p/c^2$, onde ρ é a densidade escalar, p a pressão escalar e o quadrivetor velocidade v^μ obedece a condição $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = v_\mu v^\nu = 1$. A equação $T^{\mu\nu}_{,\nu} = \partial T^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$, que está satisfeita para o tensor $T^{\mu\nu}$, expressa as leis de conservação de energia e momento para o fluído. Na R.G., o tensor $T^{\mu\nu}$ possui a mesma forma, porém, como os coeficientes $g_{\mu\nu}$ da métrica não são mais constantes, ao invés de termos $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, a condição que ele obedece é $D_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, que não exprime nenhuma lei de conservação[3,9]. Nessas notas o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é encarado como o ente que engloba todas as propriedades físicas da distribuição de matéria. De alguma maneira as propriedades geométricas do espaço-tempo devem ser deduzidas a partir das propriedades físicas, dadas por $T^{\mu\nu}$. Poderíamos tentar escrever a seguinte equação tensorial: $G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$, onde o tensor $G^{\mu\nu}$ deve depender somente das propriedades geométricas do espaço quasi-Riemanniano e k é uma constante a determinar. Além disso, o tensor $G^{\mu\nu}$ deve obedecer as seguintes propriedades:

(a) Ele deve ser simétrico em $\mu\nu$, pois $T^{\mu\nu}$ é simétrico.

(b) $D_\nu G^{\mu\nu} = 0$, pois $D_\nu T^{\mu\nu} = 0$.

Ora, como vimos na secção (4.1), só existe um tensor de segunda ordem que obedece a essas propriedades e que é linear nas derivadas de segunda ordem de $g_{\mu\nu}$. Esse tensor é o de Einstein, definido por $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}/2$. Deste modo, as equações do campo de gravitação seriam dadas por (Equações de Einstein):

$$R^{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}/2 = kT^{\mu\nu} \quad .$$

Resta agora determinar a constante k. Com o intuito de determiná-la, impomos que no limite de $c \to \infty$ a teoria de Einstein se reduza a de Newton. Precisamos mostrar que no limite de $c \to \infty$ as equações de Einstein, com uma escolha apropriada de k, se reduzem a equação de Poisson $\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho$. Ora, é fácil vermos quando $c \to \infty$ a única componente não nula do $T^{\mu\nu}$ é $T^{44} \simeq \rho c^2$ e que $T^\mu_\mu = T \simeq \rho c^2$. Nestas mesmas condições, as componentes do tensor métrico, conforme Eq. (3.1), são dados por $g_{44} = 1 + 2\Phi/c^2$, $g_{11} = -1 - 2\Phi/c^2$ e $g_{22} = g_{33} = -1$. Calculando $R^{\mu\nu}$ em termos dos $g_{\mu\nu}$, usando o que foi visto na secção (4.1), obtemos $R^{44} = -(1/4c^2)\nabla^2\Phi$. Por outro lado, levando em conta que a equação de Einstein pode ser escrita na forma $R^{\mu\nu} = k(T^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}T/2)$, chegamos à seguinte igualdade, $(1/4c^2)\nabla^2\Phi = k\left[\rho c^2 - (1+2\Phi/c^2)\rho c^2/2\right] = k\rho c^2/2 - k\Phi\rho \simeq k\rho c^2/2$, de onde deduzimos que a constante k deve ser $k = -8\pi G/c^4$.

Com a determinação da constante k completamos a "derivação" da equação de Einstein que é, então dada por

$$R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}R/2 = -(8\pi G/c^2)T^{\mu\nu} \quad . \tag{1}$$

Esta equação constitui, de fato, um sistema de equações de derivadas parciais de segunda ordem. São dez equações de campo pois os tensores $g_{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}$ são simétricos. Entretanto, como as coordenadas x^μ podem ser submetidas a uma transformação arbitrária, é possível escolher arbitrariamente quatro das dez componentes de $g_{\mu\nu}$. Como as quatro componentes de v^ν, que comparecem em $T^{\mu\nu}$, são ligadas pela relação $g_{\mu\nu}v^\mu v_\nu = v_\mu v^\mu = 1$, somente três delas são independentes. Desse modo, as dez equações do campo gravitacional são efetivamente constituídas por dez grandezas desconhecidas: seis componentes de $g_{\mu\nu}$, três componentes de v^ν e a densidade de matéria ρ (ou a pressão p). Lembrando que temos de conhecer de antemão a equação de estado da matéria, que relaciona p e ρ, pois essa não pode ser determinada através da Eq. (6.1).

Como as equações definidas por (6.1) não são lineares, o princípio da superposição não é válido para os campos gravitacionais (a não ser para campos fracos), contrariamente ao que ocorre para os campos eletromagnéticos na R.R..

No caso do eletromagnetismo a distribuição e o movimento das cargas podem ser arbitrárias, desde que a carga total se conserve. Uma dada distribuição de cargas determina, através das equações de Maxwell, o campo que elas criam. No caso da gravitação, a distribuição e o movimento da matéria que gera o campo não podem ser tomados arbitrariamente, muito pelo contrário, eles, ao mesmo tempo que o campo criado pela matéria, são determinados por intermédio da Eq. (6.1), dadas as condições iniciais.

Apesar de muitas críticas[5] e de várias tentativas para desenvolver uma teoria da gravitação diferente da de Einstein é esta que, até o presente momento, melhor explica os resultados experimentais[11].

Do ponto de vista histórico, é importante notar que resultados semelhantes ao de Einstein foram obtidas, por Lorentz e Hilbert, antes do próprio Einstein, conforme ele mesmo cita em seu famoso artigo de 1916 (vide referência 12, pág. 167).

Para finalizar, vale a pena observar que, dentro do esquema da R.G., sempre que existir matéria, existirá um campo gravitacional que se manifestará através da curvatura do espaço circunvizinho àquela matéria. Não devemos pensar, contudo, que o campo preenche o espaço e o "curva", pois não podemos diferenciar os dois conceitos: *o campo é o espaço curvo.* O campo gravitacional e a estrutura (a geometria) do espaço-tempo são idênticos, e são representados na Eq. (6.1) por uma única grandeza matemática. Na teoria de Einstein, a matéria não pode ser separada de seu campo gravitacional e este não pode ser separado do espaço curvo. Matéria e espaço devem, pois, ser encarados como partes inseparáveis e interdependentes de um único todo[4].

References

1) S. Chandrasekhar, *Am. J. Phys.* **40**, 224 (1972).
2) H. Yilmaz, "Introduction to the theory of relativity and the principles of the modern physics", Blaisdell Publishing Company (New York, Toronto, London, 1965).
3) L.D. Landau e E. Lifschitz, " Teoria dos campos", Hemus, Livraria Editora Ltda. (1974).
4) F. Capra, "O tao da física", Editora Cultrix (São Paulo, 1983).
5) A.A. Logunov, "Gravitation and elementary particle physics", Mir Publishers (Moscow, 1983).
6) R.H. Dicke, "The theoretical significance of experimental relativity", Gordon and Breach (New York, London, 1965).
7) A. Sommerfeld, "Electrodynamics", Academic Press (New York, 1952).
8) M. Cherki, *La Recherche* **28**, 81 (1972).
9) J.C. Hafele, *Am. J. Phys.* **40**, 81 (1972).
10) G.C. McVittie, "General relativity and cosmology", Chapman and Hall Ltd. (London, 1965).
11) C.M. Will, *Phys. Rep.* **113**, 345 (1984).
12) A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowsky, "The principle of relativity", Dover Publications, Inc. (1923).