

Espalhamento de Elétrons pelo Núcleo Atômico como um Problema de Difração de Fraunhofer*

(Electron scattering by the atomic nucleus as a Fraunhofer diffraction problem)

J.D.T. Arruda-Neto

*Laboratório do Acelerador Linear, Instituto de Física,
Universidade de São Paulo,
C.P. 66318, São Paulo, SP, CEP: 05315-970*

Recebido 29 de outubro, 1997

O problema do espalhamento de elétrons pelo núcleo como difração de Fraunhofer é discutido, juntamente com uma revisão do conceito geral de difração da Óptica. A discussão é ilustrada com inúmeros resultados experimentais, e um cálculo simples para os fatores de forma nuclear é desenvolvido. As perspectivas futuras para a investigação de estrutura nuclear e sub-nuclear, com os novos aceleradores de elétrons de altíssimas energias, são mencionadas e discutidas.

The problem of electron scattering by the nucleus as Fraunhofer diffraction is discussed, plus a revision of the diffraction general concept from Optics. The discussion is illustrated with several experimental results, and a simple calculation for the nuclear form factors is worked out. The future perspectives for investigation of nuclear and sub-nuclear structure, using the recently constructed electron accelerators with very high energies, are mentioned and discussed.

I. Introdução

A utilização de espalhamento de elétrons no estudo de estrutura nuclear propiciou, e vem propiciando, a formação de um extraordinário acervo de dados cuja qualidade e relevância não encontram paralelo comparativamente ao que se obteve com espalhamento de outros projéteis (notadamente os hadrônicos). Esta afirmação pode ter sua veracidade constatada através da apreciação de algumas referências tradicionais^[1-3].

Contudo, não discutiremos as potencialidades inerentes às “sondas eletromagnéticas” do núcleo — espalhamento de elétrons no caso. Ao invés disso, mostraremos como é possível entender o espalhamento de elétrons pelo núcleo atômico como um problema de difração de Fraunhofer. A motivação para apresentarmos esse tipo de abordagem reside no fato de julgarmos *conveniente e oportuno* divulgar tópicos importantes e atuais da Física Nuclear, bem como de outras áreas,

lançando mão de fenômenos bem conhecidos da “Física Básica” que é ministrada nos cursos de graduação em Física.

Acreditamos que com isso se logram pelo menos dois objetivos. De um lado, alunos ainda na fase de estudos de graduação poderiam contar com uma componente motivadora adicional (em alguns casos a única). Por outro lado, alunos iniciando seus estudos de pós-graduação, bem como pesquisadores de outras áreas, poderiam “apreciar” temas mais complexos através de uma forma fisicamente transparente.

Começamos com uma apresentação simplificada da difração de Fraunhofer. A seguir mostramos que o espalhamento elástico de elétrons pode ser interpretado como um problema de difração de Fraunhofer. Finalmente, comentamos aspectos históricos ligados à “Física do espalhamento de elétrons” e ainda discutimos alguns trabalhos seminais, entre outras coisas.

*Parcialmente subvencionado pelo CNPq

II. Difração de Fraunhofer

Os fenômenos de difração da luz podem ser observados, por exemplo, se no trajeto de propagação se encontram obstáculos — corpos opacos de forma arbitrária — ou, se a luz passar através de orifícios em telas opacas. A difração é um fenômeno ondulatório universal; entretanto, assim como a interferência, é um teste decisivo para mostrar características ondulatórias.

Pode-se dividir o estudo do fenômeno da difração em duas classes gerais. Na primeira, chamada “difração de Fresnel”, a fonte luminosa está a uma distância finita do obstáculo difrator e a figura de difração resultante é estudada em um anteparo próximo ao obstáculo difrator. Na segunda classe, chamada “difração de Fraunhofer”, a frente de onda incidente foi colimada por uma lente. Atrás do obstáculo difrator é colocada outra lente e a figura de difração resultante é examinada em um anteparo colocado no plano focal da lente (Fig. 1).

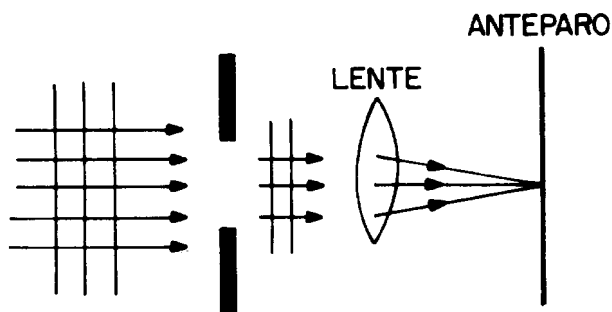


Figura 1. Aparato experimental esquematizado para a observação de difração de Fraunhofer.

A difração de Fraunhofer é um caso limite do caso mais geral que é a difração de Fresnel. Esta última, em geral, não é tratada nos textos de Física Básica em decorrência de uma maior complexidade matemática.

Nesta apresentação simplificada da difração de Fraunhofer, o objetivo será o da determinação da distribuição angular da intensidade da luz difratada a *grandes distâncias* atrás do anteparo. Na realidade, esta aproximação é inerente ao que se conhece por difração de Fraunhofer. Além disso, consideraremos uma onda plana incidindo normalmente em uma fenda infinita (de largura $2a$) de lados paralelos, inserida numa tela opaca (Fig. 2). Para a luz que incide normalmente, o plano da fenda é uma das superfícies de onda e, como o comprimento da fenda é infinito, a luz se desvia apenas no plano xy .

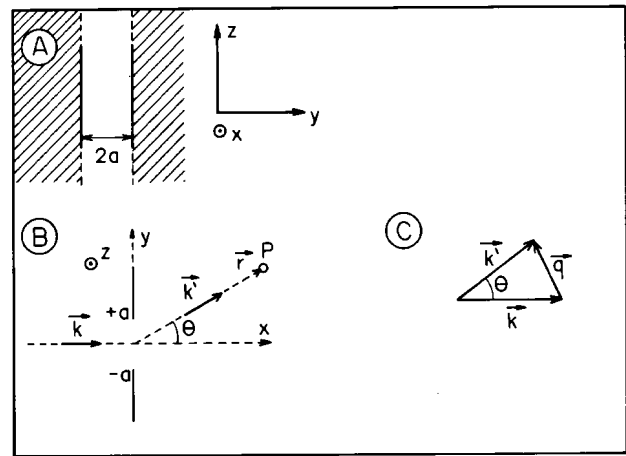


Figura 2. Ilustração do sistema de referência e principais vetores associados ao problema da difração de luz por uma fenda infinita de largura $2a$. Definições e detalhes no texto.

Como o nosso problema consiste em determinar a intensidade da luz difratada, deveremos calcular as amplitudes das componentes do campo eletromagnético, \vec{E} ou \vec{H} , (aqui denominadas genericamente μ) em um ponto de observação P atrás da tela (vide Fig. 2B). Uma solução aproximada pode ser obtida se considerarmos que os “desvios”, relativamente à óptica geométrica, são pequenos. Para tanto suporemos que: (1°) em todos os pontos da fenda do anteparo o campo (μ) é o mesmo quando da ausência do anteparo (μ_0), e (2°) o desvio angular dos raios incidentes é pequeno (θ pequeno).

A seguir, dividimos a fenda da largura $2a$ em tiras de largura dy , sendo que cada tira pode ser considerada como uma *fonte luminosa secundária*. Assim, o campo do ponto P , $d\mu_p$ (devido a uma das tiras), será proporcional a μ_0 e a dy ; portanto:

$$d\mu_p = \alpha \mu_0 e^{i\Delta\phi} dy \quad ,$$

onde $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$, e \vec{k} e \vec{k}' são os vetores número de onda das ondas incidentes e difratadas, respectivamente. Convém lembrar que a *variação de fase* $\Delta\phi$ da onda entre dy e P é dada por:

$\Delta\phi = -\vec{q} \cdot \vec{r} = q_x x + q_y y$; mas, na aproximação de θ pequeno teremos $q_x \approx 0$ e $q_y \approx q \approx k\theta$ (Figs. 2B e C), logo, $\Delta\phi \approx -qy$.

O campo no ponto P será o resultado da *superposição* dos campos de ondas provenientes de todas as

tiras infinitesimais de largura dy (Princípio de Huygens):

$$\mu_p(q) = \alpha \mu_0 \int_{-a}^a e^{-iqy} dy = \frac{2\alpha\mu_0}{q} \sin(qa) \quad (1)$$

A intensidade da luz difratada dI , entre q e $q+dq$, é proporcional a $|\mu_p(q)|^2 dq$; então:

$$dI = \beta |\mu_p(q)|^2 dq = 4\alpha^2 \beta \mu_0^2 \frac{\sin^2(ka\theta)}{k^2 \theta^2} k d\theta \quad (2)$$

onde trocamos q por θ através das relações

$$q \approx k\theta \quad \text{e} \quad dq = k d\theta \quad .$$

As constantes de proporcionalidade α e β podem ser determinadas através de uma “condição de normalização”: $\int dI = I_0 =$ intensidade da onda incidente; então:

$$I_0 = 4\alpha^2 \beta \mu_0^2 a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \quad , \quad (3)$$

onde $t = ka\theta$; $\alpha^2 \beta = \frac{I_0}{4\pi a \mu_0^2}$. Finalmente, usando a equação 2,

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\sin^2(ka\theta)}{\theta^2} = I_0 \frac{ak}{\pi} \frac{\sin^2(qa)}{(qa)^2} \quad . \quad (4)$$

A eq. 4 nos fornece a *distribuição angular* da intensidade da luz difratada, quando ocorrer difração de Fraunhofer de uma onda plana que incide normalmente em uma fenda infinita de largura $2a$ (inserida em uma tela opaca). O assim chamado “padrão de difração”, $dI/d\theta \times \theta$, é mostrado na Fig. 3A; os máximos estão separados nos pontos $\theta = n\pi/(ka)$, $n = n^\circ$ inteiro, por mínimos de intensidade igual a zero. Para efeito de comparação também mostramos na Fig. 3B um padrão de difração de Fresnel.

Então, através do exame da eq. 4, verificamos que os mínimos sucessivos ocorrerão quando $ka\theta_{\min} = n\pi$; lembrando que $k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda da luz, escrevemos também que

$$\theta_{\min} = n \frac{\lambda}{(2a)} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Uma discussão mais quantitativa é apresentada abaixo.

Para uma tela opaca, com um orifício circular de diâmetro $2a$, obtemos a distribuição angular da intensidade da luz difratada a partir dos mesmos procedimentos gerais utilizados no caso anterior da fenda, ou seja: de acordo com o princípio de Huygens devemos

somar as ondas originadas de todos os pontos no interior do círculo, de modo a obter a amplitude resultante. A amplitude, para um ângulo θ , é proporcional a

$$\int_{\text{orifício}} \cos[kr(\theta)] dA \quad ,$$

onde dA é um elemento de área no interior do orifício. Essa integração não é tão simples de se obter, comparativamente àquela do problema da fenda, e resulta numa função de Bessel de primeira ordem $J_1(ka \sin \theta)$, representada na Fig. 4. Neste caso, a distribuição angular da intensidade da luz difratada terá a seguinte forma:

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} \sim \left[\frac{J_1(ka \sin \theta)}{(ka \sin \theta)} \right]^2 \quad ; \quad (6)$$

este padrão de difração é mostrado na Fig. 5. Um cálculo quanto-mecânico mais completo pode ser encontrado na Ref. 4.

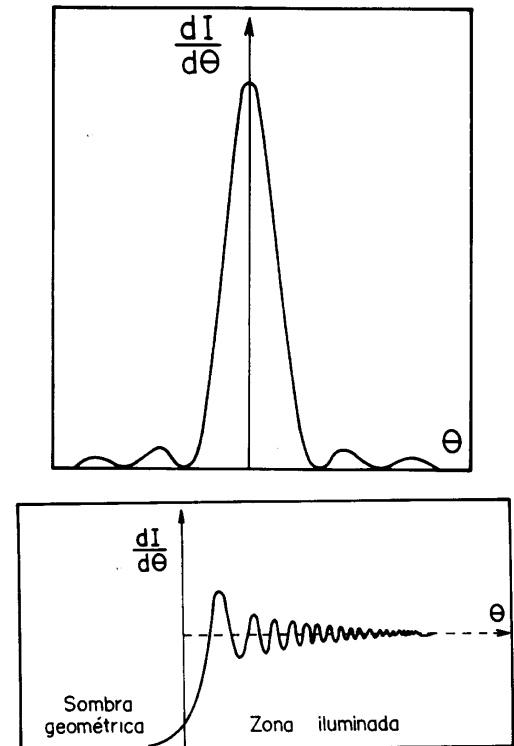


Figura 3. Padrões de difração de Fraunhofer (A) e Fresnel (B).

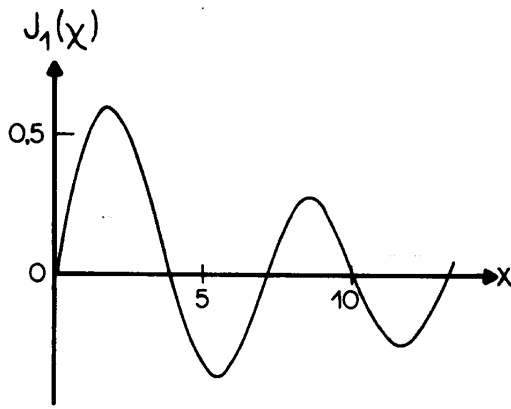


Figura 4. Gráfico da função de Bessel de primeira ordem.

O primeiro mínimo do padrão de difração, representado na Fig. 5, ocorre para o primeiro zero de J_1 que corresponde (confira na Fig. 4), para ângulos pequenos, a

$$ka\theta_{\min \cdot 1} = 3,84 \quad \longrightarrow \quad \theta_{\min \cdot 1} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{(2a)} ,$$

diferindo de 22% do resultado obtido para a fenda ($\lambda/(2a)$), enquanto que o segundo mínimo se verifica para

$$ka\theta_{\min \cdot 2} \approx 7 \quad \longrightarrow \quad \theta_{\min \cdot 2} \approx 2,2 \cdot \frac{\lambda}{(2a)} ,$$

cerca de 10% maior que o correspondente resultado de difração em uma fenda: $2\lambda/(2a)$. A diferença vai diminuindo para ângulos maiores. Por outro lado, notamos uma acentuada diferença entre as distribuições angulares, como pode ser apreciado através das figuras 3A e 5. O propósito dessa comparação é o de ilustrar como a análise de um padrão de difração permite a obtenção de informações a respeito das características (da geometria, neste caso) do “objeto difrator”, desde que λ seja da ordem de a .

Podemos constatar, qualitativamente, que a figura de difração de um *disco negro*, ou seja, um absorvedor intenso da luz incidente, é a mesma que a de um orifício circular. Neste, efetuamos o cálculo (utilizando o princípio de Huygens) *como se* o orifício fosse uma fonte extensa. No caso do disco negro *já temos* uma fonte extensa; assim, o cálculo é essencialmente o

mesmo e obteremos um padrão de difração parecido ao mostrado na Fig. 5.

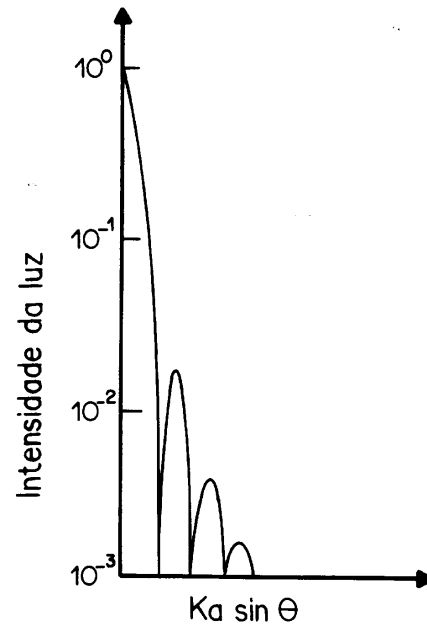


Figura 5. Distribuição de intensidade de luz monocromática difratada por um orifício circular em função da distância ao centro do orifício.

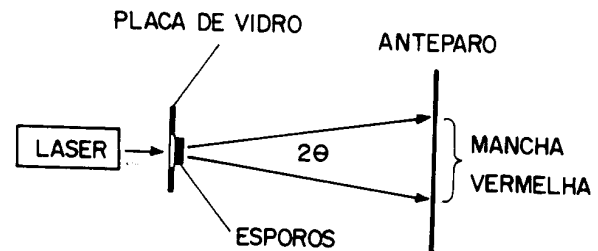


Figura 6. Arranjo experimental utilizado na observação de difração de luz laser por esporos do musgo licopódio, conforme descrito no texto.

Com a escolha apropriada do comprimento de onda é possível determinar o tamanho de objetos minúsculos, como por exemplo o diâmetro ($2a$) de um esporo de licopódio (esporo esférico do musgo licopódio). A Fig. 6 mostra o arranjo experimental para essa determinação, em que um feixe de laser de $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ilumina uma placa de vidro coberta por pó de licopódio. Num anteparo a 5m de distância observa-se um disco vermelho, onde o primeiro anel escuro (o primeiro mínimo) dista 19cm do centro do disco. Então,

$$\theta_{\min \cdot 1} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{(2a)} , \text{ e também } \theta_{\min \cdot 1} = \frac{19\text{cm}}{500\text{cm}} = 3,8 \times 10^{-2} \text{ rad} ;$$

combinando essas duas relações temos:

$$2a = \frac{1,22 \cdot \lambda}{3,8 \times 10^{-2}} \quad , \text{ onde } \lambda = 6,328 \times 10^{-7} m; \quad \text{portanto} \quad ,$$

$$2a = 2.03 \times 10^{-5} cm$$

Se dispusermos de “luz” com comprimentos de onda bem menores, como os raios X ou os raios gama, poderemos determinar as dimensões, e investigar a estrutura interna (conforme discutido mais à frente) de moléculas, átomos, núcleos atômicos e núcleons (prótons e nêutrons).

A rigor, qualquer onda plana poderá ser utilizada para “iluminar” um objeto difrator. Feixes colimados de partículas monoenergéticas, como prótons, nêutrons e elétrons, podem ser representados como ondas planas de comprimento de onda $\lambda = h/p$ (relação de Broglie), onde $h = 6,63 \times 10^{-34} J \cdot s$ é a conhecida constante de Planck e p é o momento linear das partículas. Projéteis de altas energias, principalmente prótons e elétrons, são obtidos com aceleradores de partículas em vários centros de pesquisas do exterior e, provavelmente, poderão ser obtidos no Brasil em um futuro próximo. Centraremos nossa atenção nos aceleradores de elétrons.

III. Espalhamento de elétrons

III.1. Aparato e condições experimentais

A investigação experimental da estrutura nuclear, através de espalhamento de elétrons, requer a utilização de aceleradores que produzam feixes de elétrons com energias de, pelo menos, algumas centenas de milhões de elétrons-volts (eV). O feixe incide nos núcleos-alvo dentro de uma “câmara de espalhamento”; os elétrons espalhados pelos núcleos, num determinado ângulo de espalhamento, são detetados em um espectrômetro magnético que também determina qual é a energia dos elétrons espalhados.

Na Fig. 7 mostramos os principais componentes que fazem parte de um arranjo experimental típico. O espectrômetro é uma peça móvel que pode ser posicionada segundo o ângulo de espalhamento em que se quer realizar a medida. Os eletroímãs analisadores permitem variar a energia do feixe incidente.

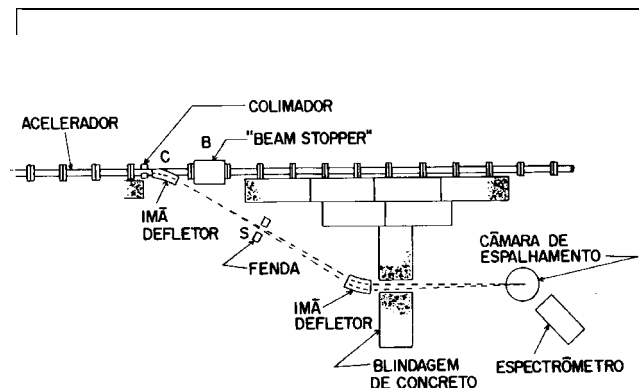


Figura 7. Principais componentes do aparato utilizado por R. Hofstadter e colaboradores, em Stanford, para investigar estrutura nuclear com espalhamento de elétrons.

A fim de estimarmos um limite inferior para a energia dos elétrons que sondarão o núcleo atômico, começamos por escrever a equação relativística que conecta energia e momento linear de uma partícula com massa de repouso m_0 :

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad . \quad (7)$$

Se $E \gg m_0 c^2$, $p \approx E/c$ e $\lambda = h/p \approx hc/E$. Escrevamos E como um múltiplo ϵ da energia de repouso do elétron ($m_0 c^2$), ou seja, $E = \epsilon m_0 c^2$; então:

$$\lambda = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{h}{m_0 c} \right) \quad ,$$

onde

$$\frac{h}{m_0 c} = 2,4 \times 10^{-10} cm$$

é o “comprimento de onda Compton”. Finalmente,

$$\lambda = \frac{2,4 \times 10^{-10}}{\epsilon} cm \quad . \quad (8)$$

O raio nuclear médio de núcleos actinídeos e pré-actinídeos ($A=200$ a 240) é aproximadamente igual a $7 \times 10^{-13} cm$. Para $\epsilon = 350$ (correspondendo a $E \approx 180$ MeV) a eq. 8 fornece $\lambda \approx 7 \times 10^{-13} cm$, que é da mesma ordem de grandeza dos raios nucleares. Portanto, feixes de elétrons com energias iguais ou superiores a 180–200 MeV constituem uma sonda fina e sensível para explorar a estrutura nuclear. Esses

projéteis são classificados como “elétrons de altas energias”.

3.2. Espalhamento elástico de elétrons e difração de Fraunhofer: discussão qualitativa

Consideremos agora o espalhamento elástico de elétrons de altas energias pelo núcleo atômico como um problema de difração de Fraunhofer da Óptica. Para tanto, lembremos que os elétrons incidentes comportam-se como ondas planas de $\lambda = 2\pi/k$, onde $\hbar\vec{k}$ é o momento linear inicial, e que essas ondas são difratadas por elementos de volume $d\vec{r}$ de uma distribuição extensa de cargas com densidade $\rho(\vec{r})$ (densidade de carga nuclear), como representado na Fig. 8, contendo cada um em seu interior $\rho(\vec{r})d\vec{r}$ cargas elétricas. Desta forma, a amplitude das ondas espalhadas será proporcional a $f(\vec{q})\rho(\vec{r})d\vec{r}$, onde $f(\vec{q})$ é uma amplitude de espalhamento “elementar”. Por outro lado, a superposição das ondas espalhadas por toda a distribuição de cargas será proporcional a $f(\vec{q}) \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{r}$; compare com a eq. 1, obtida na resolução do problema de difração de luz por uma fenda. Observe também que a diferença de fase $\Delta\phi$ entre a onda incidente e a espalhada é igual a $-\vec{q}\cdot\vec{r}$. Finalmente, o padrão de difração será proporcional a

$$|f(\vec{q})|^2 \cdot \left| \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r} \right|^2 \equiv D \quad (9)$$

Esta última quantidade permite calcular o número de elétrons difratados em um determinado ângulo, e é

$$D(\theta) \propto \left\{ \left[\frac{(q'R)^2 - 2}{q'} \right] \sin(q'R) + \frac{2(q'R)}{q'} \cos(q'R) - 2R \right\}^2 \quad (11)$$

Para elétrons de altas energias, transferindo ao núcleo energias da ordem de 400 MeV, teremos $q' \approx 400 \text{ MeV}/(\hbar c)$, com $\hbar c \approx 200 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$; então, $q' \approx 2 \text{ fm}$. Suporemos que $R = 7 \text{ fm}$; assim,

$$(q'R) \approx 14 \quad , \quad \text{e} \quad (q'R)^2 \approx 200 \quad .$$

Levando-se em conta esses números, a relação (11) poderá ser aproximadamente dada por

$$D(\theta) \propto (q'R)^4 \sin^2(q'R) \quad (12)$$

usualmente expressa em termos de uma seção de choque diferencial de espalhamento.

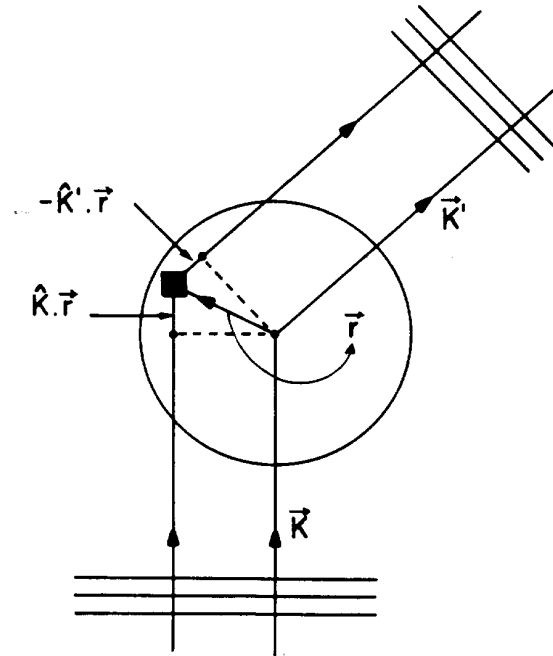


Figura 8. Ilustração do espalhamento de elétrons pelo núcleo, visto como um problema de difração de Fraunhofer. No espalhamento elástico $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$.

Supondo, apenas para efeito de ilustração, que $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{constante}$, teremos, grosso modo, para θ fixo:

$$D(\theta) \propto \int_0^R \cos(q'r) r^2 dr \quad , \quad (10)$$

sendo R o raio nuclear, $q' = q \cos \theta$, e θ o ângulo entre \vec{q} e \vec{r} . Resolvendo a integral acima obtemos

No problema de difração por uma fenda, eq. 4, havíamos obtido

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} \propto \frac{\sin^2(qa)}{(qa)^2} \quad (13)$$

Comparando os dois padrões de difração representados pelas relações 12 e 13, observamos que os máximos e mínimos ocorrerão para os mesmos valores de $q'r$ e qa ,

embora a “forma” da distribuição angular seja diferente.

Essas estimativas, bastante aproximadas, mostram que existem similaridades entre os dois casos analisados. Na seção 3.4 apresentaremos uma conta um pouco mais elaborada para o espalhamento de elétrons. Antes, porém, faremos algumas considerações genéricas a respeito do problema do espalhamento.

III.3. O problema genérico de espalhamento

Este tema é tratado em inúmeros textos e com as mais variadas abordagens. Para uma abordagem

quanto-mecânica a Ref. 4 é recomendada. Dentro dos objetivos mais globais deste trabalho, a apresentação formal e detalhada da “Teoria Quântica do Espalhamento” não é essencial; necessitaremos apenas de alguns resultados para situações particulares (por exemplo, em primeira aproximação de Born).

O “problema do espalhamento” consiste do cálculo, para um dado campo de força, da *corrente de partículas espalhadas* (a uma distância infinita do centro espalhador) em função da *corrente das partículas incidentes*. Essas duas correntes de partículas estão embutidas na definição de uma terceira grandeza física: seção de choque diferencial de espalhamento $d\sigma/d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\text{n}^\circ \text{ de partícs. espalhadas/tempo (em } d\Omega)}{\text{densidade de corrente de partícs. incidentes}}$$

Dentro da abordagem quanto-mecânica chegamos a (detalhes na Ref. 4)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k_b}{k_a} |A_{ba}|^2 \quad (14)$$

(para espalhamento elástico, $k_a = k_b$).

A amplitude de espalhamento A_{ba} é dada por

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | V | \psi_a \rangle \quad (15)$$

onde μ é a massa reduzida do sistema projétil/alvo, e a função de onda $\varphi_b(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}}$, representa uma *onda plana* que descreve o movimento de uma “partícula efetiva” de momentum $\vec{p}_b = \hbar\vec{k}_b$ com $\vec{k}_b = k\hat{r}$ ($\hat{r} = \vec{r}/r$ e \vec{r} é o vetor posição do ponto de observação do espalhamento em relação ao centro de massa).

No limite assintótico (bem longe do limite de ação do potencial $V(\vec{r})$)

$$\psi_a(\vec{r}) = \varphi_a(\vec{r}) + A_{ba} \frac{e^{ikr}}{r} \quad ,$$

onde $\varphi_a(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_a \cdot \vec{r}}$.

Em primeira aproximação de Born, cuja aplicabilidade no caso de um potencial coulombiano requer que $Z_1 Z_2 e^2 \ll \hbar v$, onde $v = \hbar k / \mu$ é a velocidade relativa das duas partículas colidentes, obtém-se

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle \quad ;$$

mais explicitamente,

$$A_{ba}(\vec{q}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r} \quad , \quad (16)$$

onde $\hbar\vec{q} = \hbar(\vec{k}_a - \vec{k}_b)$ é o momentum transferido no espalhamento.

A eq. 16 enseja um significado físico mais transparente: cada *unidade de volume* contribui para a amplitude de espalhamento com uma parcela igual a $-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} V(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$, interpretada como uma “amplitude por unidade de volume”. O termo $e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$ determina o “phase shift” (troca de fase) da onda espalhada pelo elemento de volume localizado no ponto \vec{r} *relativamente* ao elemento de volume em $\vec{r} = \vec{0}$.

No caso de *espalhamento pra'frente* ($\vec{q} = \vec{0}$), e se $V(\vec{r})$ tiver o mesmo sinal em todos os pontos, *todos* os elementos de volume propiciam espalhamento que *estão em fase* e, neste caso, a amplitude de espalhamento é *máxima*:

$$A_{ba}(0) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) d\vec{r} \quad . \quad (17)$$

Para espalhamentos em outras direções ($\vec{q} \neq \vec{0}$), as contribuições provenientes de diferentes elementos de volume *diferem em fase*. Os *efeitos de interferência* das ondas espalhadas pelos diferentes elementos de volume originam, em determinadas condições cinemáticas,

padrões de difração visíveis em $|A_{ba}(\vec{q})|^2$ e, conseqüentemente, em $d\sigma/d\Omega$ (eq. 14). Esses “efeitos de interferência” são estimados pela razão

$$F(\vec{q}) = \frac{A_{ba}(\vec{q})}{A_{ba}(0)} \quad ; \quad (18)$$

$F(\vec{q})$ é denominado “fator de forma” do alvo espalhador.

3.4 O padrão de difração de elétrons espalhados: ap-

resentação de um cálculo simples

Apresentamos a seguir resultados de cálculos bastante simples para a seção de choque diferencial de espalhamento *elástico* de elétrons $d\sigma/d\Omega$ (em 1ª aproximação de Born) onde, em uma primeira etapa, consideraremos o núcleo atômico como uma *carga puntiforme* fixa igual $a + Ze$ (e : carga elementar). O sistema (projétil + alvo) será tratado classicamente. Das equações 14 e 16 temos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_{ba}|^2 \quad \text{e} \quad A_{ba}(\vec{q}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r} \quad .$$

Fazendo $V(r) = -Ze^2/r$:

$$A_{ba}(q) = \frac{\mu Ze^2}{2\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \frac{e^{iqr \cos\theta'}}{r} d\phi d(\cos\theta') r^2 dr \quad , \quad (19)$$

onde θ' é o ângulo entre \vec{q} e \vec{r} . Sendo o espalhamento elástico teremos $|\vec{k}_a| = |\vec{k}_b| = k$; $q = |\vec{k}_a - \vec{k}_b| = 2k \sin(\theta/2)$; θ é o ângulo de espalhamento no sistema de laboratório. Suporemos também que $\mu = m_e$ (massa de repouso do elétron), que equivale a se ter $m_e \ll M$ (massa do núcleo alvo). Voltando à eq. 19, e integrando em ϕ e $\cos\theta'$,

$$A_{ba}(q) = \frac{Ze^2 p}{2\pi\hbar^2 v} 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr^2} r^2 dr \quad . \quad (20)$$

Esta integral em r é “oscilante” para limites superiores de integração finitos. Pode-se obter a convergência, trivialmente, se substituirmos a dependência de $V(r)$ com $1/r$ por $(1/r) \exp(-\alpha r)$ e, após a integração, calcular o limite para $\alpha \rightarrow 0$. Fazendo isso chegamos a $A_{ba}(q) = \frac{2Ze^2 p}{\hbar^2 v} \cdot \frac{1}{q^2}$; lembrando que $p = m_e v = \hbar k$ e $q = 2k \sin(\theta/2)$, teremos

$$\frac{d\sigma_p}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4p^2 v^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad ; \quad (21)$$

esta é a conhecida fórmula de Rutherford para o espalhamento; o índice P em $d\sigma_p/d\Omega$ é para lembrar que este resultado vale para núcleos puntiformes. Ruther-

ford, Geiger e Marsden, principalmente, verificaram experimentalmente os limites de validade da eq. 21, o que levou às primeiras estimativas do raio nuclear. A idéia geral é a de que, quando o projétil aproxima-se muito do núcleo alvo, a interação projétil/alvo deixa de ser predominantemente coulombiana, ou seja, o projétil passa a “sentir” o campo de forças nucleares. Assim, para distâncias de aproximação $< R$ (raio nuclear) a eq. 21 não é mais válida. Este tema é discutido em inúmeros textos de Física Nuclear (recomendamos, em particular, a Ref. 5).

Analisemos agora como seria a forma de $d\sigma/d\Omega$ para um núcleo visto como uma distribuição esférica e uniforme de cargas elétricas. Neste caso,

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad , \quad \text{para} \quad r \geq R \quad , \quad (22.a)$$

e

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{2R} \left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad , \quad \text{para} \quad r < R \quad . \quad (22.b)$$

Recalculando A_{ba} (eq. 16) para esse potencial, e substituindo em (14), obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \left\{ [\sin(qR) - qR \cos(qR)] \frac{3}{9qR} \right\}^2 \quad ; \quad (23)$$

aqui também, $q = 2k \sin(\theta/2)$ e $p = \hbar k$. É interessante observar que a seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega$, para uma distribuição de carga extensa, *sempre* pode ser fatorada em uma seção de choque para alvo puntiforme multiplicada por uma grandeza física denominada “fator de forma”, $F(q)$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_p}{d\Omega} \cdot |F(q)|^2 \quad (24)$$

No caso acima relatado obtivemos:

$$|F(q)|^2 = [\sin(qR) - qR \cos(qR)]^2 \cdot \left[\frac{9}{(qR)^6} \right] \equiv |f_1(q)|^2 \cdot |f_2(q)|^2 \quad (25)$$

Na Fig. 9 graficamos separadamente os dois fatores que compõem $|F(q)|^2$ denominados $|f_1(q)|^2$ e $|f_2(q)|^2$; seria instrutivo analisá-los separadamente, uma vez que este caso simples (tratado classicamente) de espalhamento elástico de elétrons exibe características qualitativas gerais. Então: (1°) $|f_1(q)|^2 = [\sin(qR) - qR \cos(qR)]^2$ exibe o que denominariamos um “padrão difrativo puro”, onde a forma da curva depende marcadamente da distribuição de cargas do núcleo atômico; mais à frente ilustraremos com alguns resultados experimentais.

(2°) $|f_2(q)|^2 = \frac{9}{(qR)^6}$. Este termo que compõe o fator de forma é o responsável pelo seu rápido decréscimo com aumento de q . O vasto acervo de dados experimentais, para espalhamento *elástico* e *inelástico* de elétrons, confirma esse comportamento da interação eletromagnética elétron/núcleo. Observe também que, embora mais suavemente, a seção de choque para núcleo puntiforme também é decrescente com o aumento de q ; a eq. 21 pode ser escrita como

$$\frac{d\sigma_p}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{\hbar^2 v^2 \sin^2(\theta/2)} \cdot \frac{1}{q^2}$$

RESUMIDAMENTE: a *probabilidade* de ocorrer espalhamento diminui rapidamente à medida que o momento transferido aumenta, uma vez que aumentar q “equivale” medir $d\sigma/d\Omega$ para ângulos de espalhamento cada vez maiores. No espalhamento pra’frente ($\theta = 0^\circ$) a amplitude de espalhamento é máxima (veja discussão na seção anterior).

Um exame apenas qualitativo da Fig. 9 revela um *aspecto geral* do espalhamento de elétrons: o fator de forma é constituído por um termo difrativo “montado” em um termo rapidamente decrescente com q . Na Fig. 10 reproduzimos um resultado experimental típico: o fator de forma para espalhamento elástico de elétrons

pelo ^{208}Pb — observe a concordância desse resultado com a discussão acima.

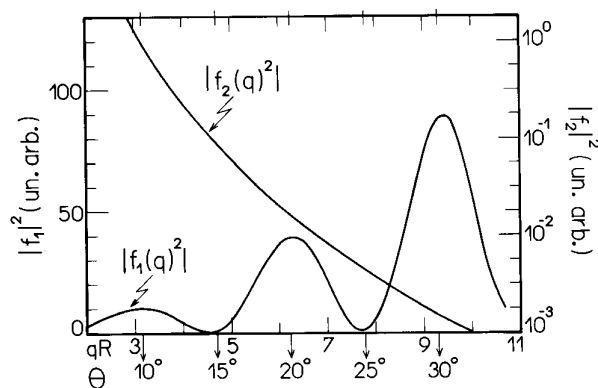


Figura 9. Gráfico das duas componentes do fator de forma $|F(q)|^2$, eq. 25 no texto, calculadas para um núcleo visto como uma distribuição esférica e uniforme de cargas elétricas.

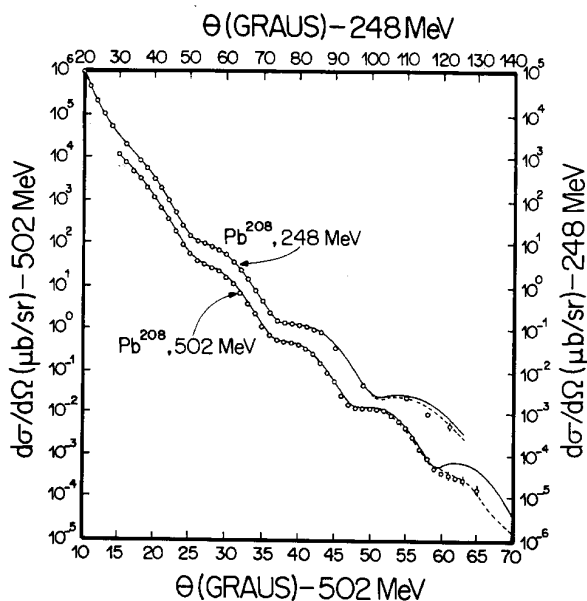


Figura 10. Seção de choque diferencial do ^{208}Pb , em função do ângulo de espalhamento, para espalhamento elástico de elétrons com energias de 248 e 502 MeV. (Adaptado de J. Heisenberg et al., *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1402 (1969)).

Para uma distribuição de cargas arbitrária $\rho(\vec{r})$, com simetria esférica, o fator de forma é dado por [1]

$$F(q) = \int \rho(\vec{r}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) d\vec{r} \quad ; \quad (26)$$

observe que $F(q)$ é a transformada de Fourier tridimensional de $\rho(\vec{r})$.

Na prática, o procedimento usual é o seguinte: obter experimentalmente $d\sigma/d\Omega$ para o núcleo em estudo e, trivialmente, $F(q)$ através da razão $(d\sigma/d\Omega)/(d\sigma_p/d\Omega)$ — eq. 24 e, finalmente, “inverter” $F(q)$ (eq. 26) para obter $\rho(\vec{r})$. Na Fig. 11 temos o resultado da determinação experimental de $\rho(\vec{r})$ para o ^{208}Pb , utilizando o fator de forma obtido de $d\sigma/d\Omega$ (Fig. 10). Nessa análise mais refinada dos dados experimentais substituiu-se a $d\sigma_p/d\Omega$ de Rutherford pela sua versão relativística, conhecida como a seção de choque de Mott. Além disso, a estrutura quântica do núcleo-alvo pode ser incluída através da troca de $\rho(\vec{r})$ pelo seu correspondente *valor esperado*: $\rho_{if} \equiv \langle f | \hat{\rho}(\vec{r}) | i \rangle$, onde $|i\rangle$ e $|f\rangle$ representam os estados do núcleo antes (estado fundamental) e depois do espalhamento, respectivamente. ρ_{if} também é comumente designado por “densidade de transição”. Quando $|i\rangle = |f\rangle$, ou seja, se após o espalhamento o núcleo é deixado em seu estado fundamental, como ocorre no espalhamento elástico, ρ_{ii} representará a densidade de cargas do núcleo em seu estado fundamental — essa grandeza física para o ^{208}Pb é mostrada na Fig. 11.

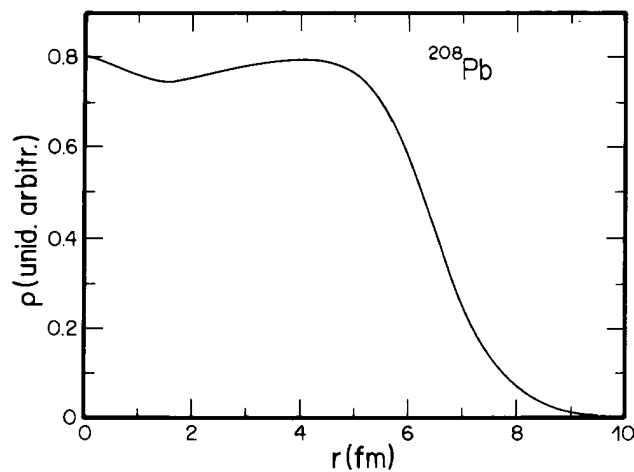


Figura 11. Densidade de carga do ^{208}Pb em seu estado fundamental, em função da distância ao centro do núcleo, deduzida a partir dos fatores de forma (que são proporcionais a $d\sigma/d\Omega$ - vide texto) obtidos via espalhamento de elétrons. (Adaptado de J.L. Friar e J.W. Negele, *Nucl. Phys.* **A212**, 93 (1973)).

3.5. Resultados experimentais exemplares e um pouco de história

Os primeiros experimentos com espalhamento de elétrons praticamente coincidem com a virada do século. Atribui-se a Lenard [6], em 1902, e a von Baeyer [7], em 1908, o pioneirismo nesse campo. Contudo, foi somente com os experimentos de Franck e Hertz [8], em 1914, que as potencialidades dessa nova linha de pesquisa foram aproveitadas para o entendimento da então emergente *teoria quântica*. Desde então, a descrição e resultados dos trabalhos de Franck e Hertz tem lugar garantido em todos os textos de “Física Moderna”.

Experiências mais sofisticadas com espalhamento de elétrons foram realizadas no início da década de 30 no Laboratório de Cavendish, em Cambridge, principalmente por Mohr e Nicoll [9], cujo aparato é mostrado na Fig. 12. A motivação principal que nos levou a apresentar, a seguir, uma descrição sumária do aparato utilizado por Mohr e Nicoll, vem do fato de que os aceleradores de elétrons utilizados em medidas de espalhamento apresentam os mesmos conceitos gerais presentes nesse arranjo experimental (Fig. 12).

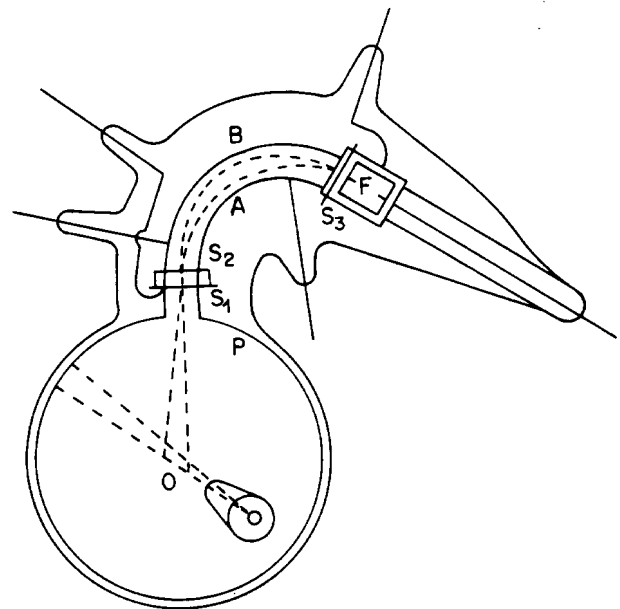


Figura 12. Aparato utilizado por Mohr e Nicoll (adaptado da Ref. 9).

O canhão de elétrons (C) é constituído, basicamente, de um filamento de tungstênio colimado que

produz um feixe intenso de elétrons; esses elétrons efetuam colisão com as moléculas de um gás pressurizado contido em uma câmara de aço (P). Os elétrons espalhados pelo gás passam através das fendas S_1, S_2 e S_3 e entre dois pratos curvos e concêntricos A e B sendo, finalmente, coletados por um copo de Faraday (F).

Potenciais ajustáveis são aplicados às fendas e pratos para que se obtenha a focalização dos elétrons espalhados com uma determinada energia e em um ângulo previamente escolhido. Rodando-se o canhão de elétrons e variando-se os potenciais analisadores, pode-se obter o espectro dos elétrons espalhados em função do ângulo de espalhamento θ e da energia perdida pelos elétrons (ω) nas colisões com as moléculas do gás em estudo.

A Fig. 13 exhibe alguns espectros típicos obtidos por Mohr e Nicoll [9]. Observe que o pico estreito e intenso mostrado na Fig. 13(a), em $\omega = 0$, corresponde ao espalhamento elástico de elétrons pelo mercúrio. Os picos menos intensos e mais largos representam a excitação de estados acima do fundamental; por exemplo, o pico em 6.3 eV da Fig. 13(a) corresponde à energia de excitação do nível 6^3P_1 do mercúrio. Espectros como os da Fig. 13, e inúmeros outros do mesmo tipo, constituem uma fonte rica de informações a respeito da estrutura atômica.

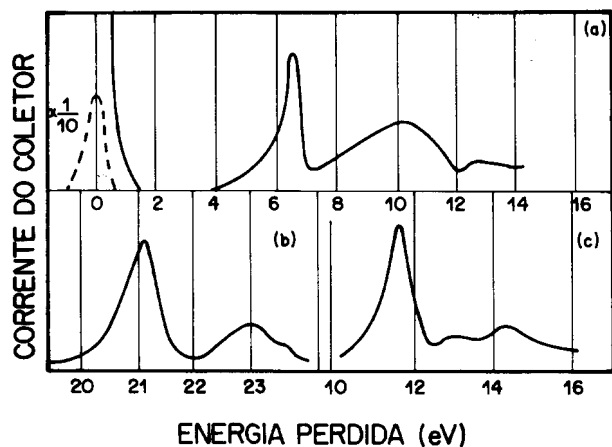


Figura 13. Resultados de Mohr e Nicoll referentes a espalhamento de elétrons em átomos de (a) mercúrio ($\theta = 90^\circ$), (b) hélio ($\theta = 30^\circ$) e (c) argônio ($\theta = 20^\circ$). Os gráficos referem-se à corrente de elétrons espalhados em função da energia perdida pelos elétrons no espalhamento. (Adaptado da Ref. 9).

A década de 50 experimentou um avanço impressionante no campo da física experimental com elétrons, graças ao desenvolvimento de aceleradores de elétrons (Linac), em Urbana (Illinois) e Stanford (Califórnia),

com energias altas o suficiente para sondar o núcleo atômico nos seus mais recônditos detalhes: saltou-se de energias da ordem de dezenas de eV para centenas de milhões de elétrons volt (cerca de 7 ordens de grandeza). Em Stanford, Hofstadter e seus colaboradores realizaram uma série de medidas com espalhamento de elétrons que levaram a novas e surpreendentes informações a respeito da estrutura nuclear; Hofstadter recebeu um prêmio Nobel por esses trabalhos.

Na Fig. 14 temos um conjunto de resultados para inúmeros núcleos [10], deduzidos a partir de fatores de forma nucleares parecidos com aquele que é mostrado na Fig. 10. O *princípio básico* do aparato utilizado por Hofstadter (ver Fig. 7) é muito semelhante àquele utilizado pelo grupo de Cavendish (Fig. 12). Neste último, o ângulo de espalhamento é escolhido rodando o canhão de elétrons (que neste caso é o “acelerador”), enquanto que em um Linac o espectrômetro é rodado (Fig. 7).

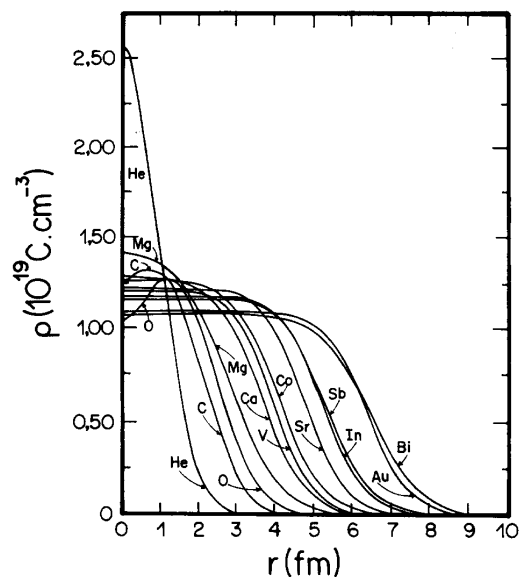


Figura 14. Densidades de carga nuclear, em função da distância ao centro do núcleo, deduzidas a partir de espalhamento de elétrons. (Adaptado da Ref. 10).

Na Fig. 15 temos um espectro típico de elétrons espalhados obtido experimentalmente em Stanford. Observe que, embora a energia neste caso seja cerca de 10^7 vezes maior do que aquelas do experimento de Mohr e Nicoll (Fig. 13), as características gerais são praticamente as mesmas, ou seja: no espectro da Fig. 15 também observamos um pronunciado pico elástico, seguido por vários outros picos, que correspondem aos estados excitados do núcleo. Se examinarmos

agora as seções de choque em função do ângulo de espalhamento para átomos e núcleos, como ilustrado na Fig. 16, uma outra similaridade marcante é notada: *efeitos difrativos* nos dois casos, indicando que os alvos investigados possuem “bordas”.

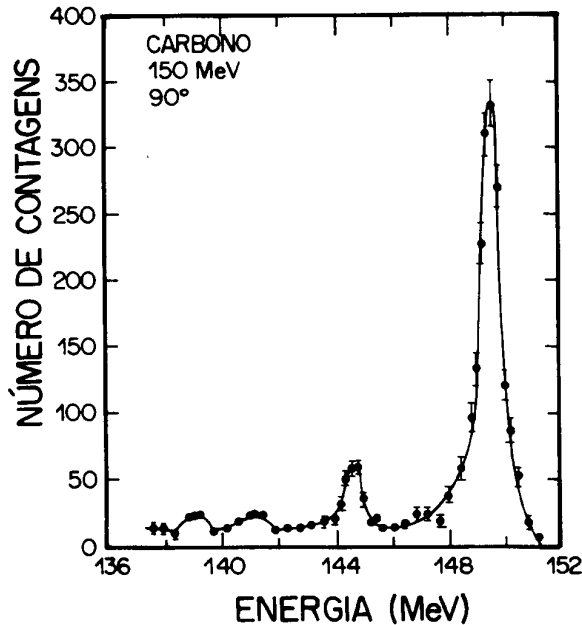


Figura 15. Número de elétrons espalhados pelo carbono a 90° (lab) em função de sua energia. A energia dos elétrons incidentes no alvo é de 150 MeV. (Adaptado de J.H. Fregeau e R. Hofstadter, *Phys. Rev.* **99**, 1503 (1955)).

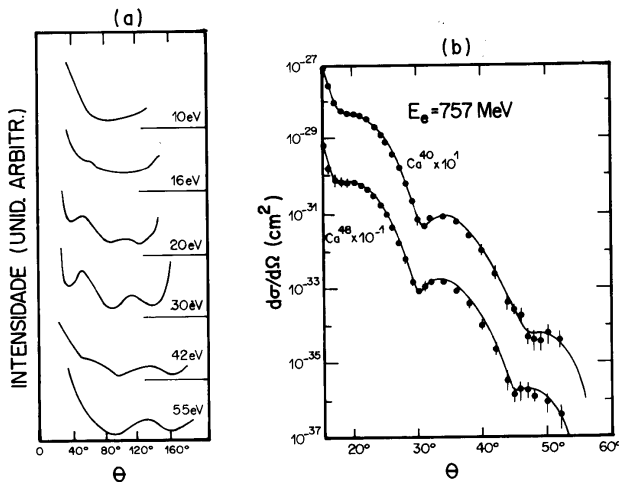


Figura 16. (a) Distribuição angular de elétrons elasticamente espalhados por átomos de mercúrio, para várias energias de elétrons incidentes. (Adaptado da Ref. 9). (b) Seção de choque diferencial de espalhamento elástico de elétrons, de 757 MeV, por núcleos de ^{40}Ca e ^{48}Ca , em função do ângulo de espalhamento. Os efeitos difrativos são evidentes (Adaptado de J.B. Bellicard et al., *Phys. Rev. Lett.* **19**, 527 (1967)).

IV. Perspectivas futuras: um microscópio para observar quarks e glúons

Desde a década de 50 e até aproximadamente a metade da década de 60, os físicos sabiam que os prótons e nêutrons tinham “tamanho” e estrutura; contudo, detalhes a respeito dessa estrutura eram desconhecidos e, conseqüentemente, não eram incorporados aos modelos nucleares. Sabia-se também que a troca de píons entre prótons e nêutrons constituía uma parte importante da força nuclear. Quanto à possibilidade de ocorrer superposição de dois núcleons, parece que ninguém acreditava que esse fato pudesse envolver algum fenômeno novo, que fosse essencial para a compreensão da estrutura nuclear.

Em meados da década de 60 foi formulada a hipótese de que prótons e nêutrons, e a maioria das partículas elementares (cerca de 200), seriam formados por três subpartículas básicas denominadas *quarks*. As primeiras confirmações experimentais da existência dos quarks começaram a ser obtidas por volta de 1975. Hoje já não se tem mais dúvida de que núcleons e mésons são constituídos por quarks, e que a força entre quarks é gerada pela troca de uma partícula denominada glúon, embora nunca tenha sido observado um quark isoladamente.

A questão atual da Física Nuclear experimental é a de como “enxergar” esses quarks e glúons. Esta questão experimental é análoga àquela de se projetar um microscópio. Com um microscópio eletrônico é possível investigar o interior da matéria ordinária e “ver” sua estrutura atômico-molecular. Os menores objetos que podem ser observados com um microscópio eletrônico (com elétrons de 1 MeV, por exemplo) são átomos, cujos diâmetros se situem em torno de 0,2 nm (1 nm = 10^{-9} m); compare esse valor com os comprimentos de onda da luz visível (400 a 800 nm).

Para estudar as características (tais como tamanho e forma) dos núcleos que se encontram no centro desses átomos, necessitamos de um “microscópio eletrônico” cujos elétrons tenham comprimentos de onda λ_e da ordem dos diâmetros nucleares. Um acelerador de elétrons (Fig. 7) de pelo menos 200 MeV faria o papel desse microscópio, conforme discutido em parágrafos

anteriores. Se quisermos ir mais fundo na matéria nuclear e estudar os constituintes do núcleo, como os prótons e nêutrons (diâmetros de 1,6 fm), deveremos dispor de elétrons com mais de 500 MeV ($\lambda_e \approx 0,6$ fm), para obter os padrões de difração desses núcleons. Programas de pesquisa neste sentido são atualmente desenvolvidos nos aceleradores dos laboratórios do MIT (USA), em Saclay na França e no NIKHEF na Holanda.

Finalmente, o estudo da *estrutura nucleônica*, constituída de quarks e glúons, requer a utilização de elétrons com energias na faixa dos vários GeV's, de modo que se possam resolver distâncias da ordem de 0,2 fm (e até menores — ver ilustração na Fig. 17). Em vista disso, a comunidade científica das áreas de Física Nuclear e de Física de Partículas Elementares acompanha com grande interesse e expectativa o término da construção do CEBAF (Continuous Electron Beam Accelerator Facility) nos Estados Unidos, projetado para operar numa primeira etapa com energias de 1 a 2 GeV e depois, numa etapa final (meados de junho/97), com 4 GeV [11].

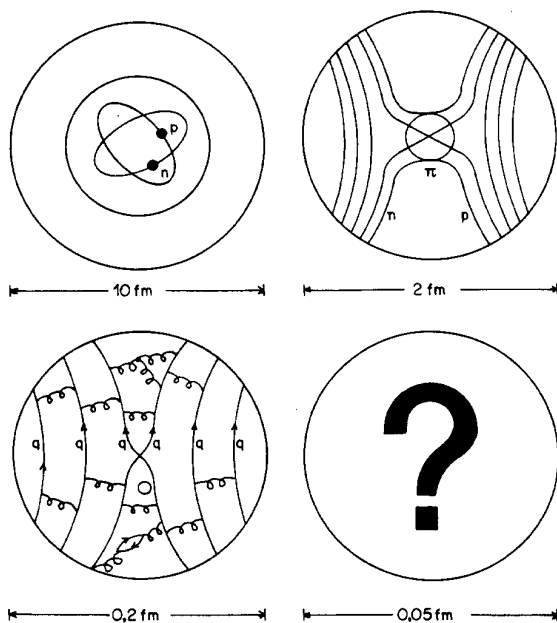


Figura 17. Concepção artística da matéria nuclear examinada com o auxílio de um microscópio fictício com diferentes fatores de aumento. Na primeira figura (campo de visão de 10 fm) o tamanho e a forma do núcleo são observados; assim, pode-se estudar o movimento dos prótons e nêutrons governado por um campo médio. No campo de visão de 2 fm, a troca de píons entre prótons e nêutrons pode ser percebida. Com um campo de visão de 0,2 fm, a estrutura subjacente dos quarks é evidente; por exemplo, há sensibilidade para se estudar estados de seis quarks (resultantes da superposição de dois núcleons), bem como estudar a troca de glúons entre quarks. Finalmente, quadruplicando-se o fator de aumento (o que será conseguido na fase final do CEBAF) novos e inesperados fenômenos manifestar-se-ão,

certamente! (Adaptado da Ref. 11).

Esse fabuloso aparato, cuja construção envolve custos de vários bilhões de dólares, será o “microscópio” de que disporemos para estudar os constituintes últimos (últimos?) da matéria: quarks e glúons.

Afinal, por que o elétron é a sonda ideal para a matéria nuclear? Há pelo menos duas razões:

(1^a) tanto quanto sabemos, o elétron é uma partícula puntiforme; portanto, sem estrutura interna. Assim, qualquer estrutura observada no espalhamento de elétrons estará relacionada à estrutura do núcleo alvo e, dessa forma, nunca será confundida com a estrutura do projétil em si;

(2^a) o elétron interage *somente* com quarks, e essa interação é *eletromagnética* (a mais bem entendida e estudada). A matéria nuclear pode ser visualizada como uma “sopa” composta por partes aproximadamente iguais de quarks e glúons; logo, é muito importante saber que o elétron “vê” somente o conteúdo de quarks. As “ondas” hadrônicas, como os mésons π e os prótons, interagem com quarks e glúons ao mesmo tempo e, dessa forma, as informações obtidas seriam complementares àquelas oriundas dos elétrons. Além disso, resultados experimentais obtidos com hádrons são de difícil interpretação, em decorrência da estrutura interna desses projéteis.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Überall, *Electron Scattering from Complex Nuclei*, Academic Press, New York (1971), 2 vols.
- [2] T.W. Donnelly e J.D. Walecka, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25**, 329 (1975)
- [3] B. Frois e C.N. Papanicolas, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **37**, 133 (1987).
- [4] L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw Hill Book Co. (3rd edition).
- [5] M.A. Preston e R.K. Bhaduri, *Structure of the Nucleus*, Addison-Wesley Publishing Co. (1975).
- [6] P. Lenard, *Ann. Phys.*, **8**, 149 (1902).
- [7] O. von Baeyer, *Verh. der Phys. Ges.* **10**, 96 (1908).
- [8] J. Franck e G. Hertz, *Verh. der Phys. Ges.* **16**, 457 (1914).
- [9] C.B.O. Mohr e F.H. Nicoll, *Proc. Roy. Soc.* **A138**, 229 e 469 (1932); **A142**, 320 e 647 (1933).

- [10] R. Hofstadter, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7**, 231 (1957).
- [11] CEBAF Design Report, Maio/1996, Newport

News, Virginia (USA).