

Sistemas Incomensuráveis e a Equação de Seno-Gordon (II)

(Incommensurate Systems and the Sine-Gordon Equation (II))

V. C. Costa, D. S. de Vasconcelos, E. M. do Nascimento e
A. Ribeiro Filho

*Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia
Campus Universitário de Ondina, 40210-340, Salvador, BA, Brazil.*

Recebido 5 de novembro, 1997

No estudo da transição de fase “lock-in” (incomensurável-comensurável) em alguns sistemas incomensuráveis (ferroelétricos, cristais líquidos ferroelétricos esméticos e ferromagnetos incomensuráveis) tem sido fundamental as analogias mecânicas para a obtenção de resultados analíticos e numéricos em torno de propriedades físicas dos referidos materiais. Neste trabalho prosseguimos com a discussão sobre essas analogias.

“Lock-in” (incommensurate-commensurate) phase transition has been studied in some incommensurate systems (like ferroelectrics, smectic ferroelectric liquid crystals and incommensurate ferromagnetics) and mechanical analogies have been fundamental in order to get numerical and analytical results about the physical properties of these materials. In this work we carry on the discussion about these analogies.

I Introdução

Na primeira parte deste trabalho, que indicaremos por (I), discutimos características gerais de alguns sistemas incomensuráveis^[1], bem como aspectos matemáticos ligados ao formalismo elíptico-jacobiano e o modelo de Ginzburg-Landau^[2], que conduz às equações tipo seno-Gordon, envolvendo ondas de densidade de carga (*CDW*) em alguns metais de transição dicalcogenados (ex. $2H - TaSe_2$). Esses sistemas têm despertado um grande interesse nos últimos anos, em vista de o surgimento de inúmeros materiais em que uma propriedade atômica local é modulada com um período que não é comensurável com a rede subjacente, ou seja, o comprimento de onda “ λ ” da modulação não é um múltiplo inteiro do parâmetro “ a ” da célula unitária ($\lambda \neq n.a, n = 1, 2, 3, \dots$). Com isto a simetria translacional do cristal é perdida, pois no arranjo atômico que caracteriza tal fase incomensurável, dois átomos jamais são deslocados pela mesma distância a partir de suas posições na fase não distorcida (normal ou protótipa). Este fato implica, também, na impossibilidade de se en-

contrar algum vetor de translação na rede que mapeie o cristal nele mesmo, impossibilitando a sua descrição por quaisquer dos 230 grupos espaciais cristalográficos tridimensionais. Apesar disso, o que se observa experimentalmente na grande maioria desses “cristais” é que a periodicidade translacional da rede é, em geral, restabelecida quando o material atinge uma outra temperatura crítica denominada transição de fase [TF] “lock-in” (ou incomensurável-comensurável) em que a modulação incomensurável ($\lambda \neq n.a$) é mudada para outra comensurável ($\lambda = n.a'$) em que o parâmetro “ a' ” da cela unitária emergente é um múltiplo inteiro daquele que caracteriza a fase normal, à temperatura mais elevada, isto é, $a' = n.a$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)^[3]. Agora, utilizando o mesmo “background” teórico da parte I prosseguiremos com a mesma discussão em torno de analogias mecânicas envolvendo a equação do pêndulo matemático, cuja solução caracteriza o arranjo de descomensurações (ou soliton de fase) nas mencionadas estruturas incomensuráveis. Na seção (2) enfatizaremos o fenômeno da ferroeletricidade nos materiais A_2BX_4 , utilizando o modelo de Ginzburg-Landau para o estudo

de transições de fase. Na seção seguinte os denominados cristais líquidos ferroelétricos esméticos são discutidos quando são introduzidas contribuições de campos externos (elétrico ou magnético) na expressão do potencial termodinâmico. Na seção (4) discutiremos o surgimento da mencionada equação em estruturas magnéticas e na seção (5) fazemos um sumário em torno de os denominados sistemas de seno-Gordon que aparecem em diferentes áreas da Física. Finalmente, na última seção, discutimos os principais resultados do presente trabalho.

II Ferroelectricidade

A partir da descoberta por Valasek^[4] de propriedades ferroelétricas do denominado "sal de Rochelle", grande tem sido a atenção dos físicos em torno da pesquisa do fenômeno da ferroelectricidade, em vista de sua relevância tecnológica bem como pelos seus aspectos teóricos fundamentais.

Os ferroelétricos são materiais que exibem um momento de dipolo elétrico espontâneo, mesmo na ausência de um campo aplicado. A polarização permanente pode ser mudada, e mesmo invertida, por um campo elétrico. Vários são os compostos incomensuráveis que apresentam esta propriedade, onde a periodicidade da onda de modulação não é comensurável com aquela apresentada pela rede cristalina normal. Uma família bastante conhecida desses materiais é a denominada A_2BX_4 (com $A = K, Rb, \dots$; $B = Se, Zn, \dots$; $X = Br, O, Cl, \dots$), que se caracteriza como o maior grupo de "cristais" isolantes onde se destacam: $Rb_2ZnCl_4, K_2SeO_4, (NH_4)_2BeF_4$, pois são importantes no estudo de memórias ópticas, moduladores

de luz, e outros dispositivos. Tais cristais apresentam uma série de fases comensuráveis e incomensuráveis^[5]. Na maioria dos casos observa-se a transição de fase de alta temperatura (normal ou protótipa), onde a propriedade ferroelétrica desaparece acima da temperatura de transição (T_i), para uma fase incomensurável - modulada, unidimensionalmente, com um vetor de onda q_o , e a seguir uma transição "lock-in" (incomensurável-comensurável) na temperatura (T_c). Em alguns casos surgem transições "lock-in" adicionais em temperaturas críticas mais baixas. No caso do K_2SeO_4 , que é um cristal ortorrômbico pseudo-hexagonal na sua fase normal com grupo espacial $D_{2h}^{16}(Pnam)$, o vetor de onda de modulação q_o é aproximadamente um terço do vetor da rede recíproca dirigida ao longo do eixo pseudo-hexagonal, isto é $q_o = (1 - \delta)a^*$, onde a variação contínua do parâmetro δ com a temperatura evidencia, experimentalmente, o caráter incomensurável da fase abaixo de T_i . O Rb_2ZnCl_4 apresenta, experimentalmente quatro fases: normal ($D_{2h}^{16}(Pnam)$, ortorrômbica), incomensurável (com $q_o = (1 - \delta)a^*/3$), comensurável ($C_{2v}^9 = Pna2_1, q_o = a^*/3$, ortorrômbica, ferroelétrica) e comensurável ($C_s^4 = A11a$, monoclinica, ferroelétrica). No $(NH_4)_2BeF_4$ se apresentam, em seqüência, as fases: normal ($Pnam$), incomensurável ($Pn21$) e comensurável (ferroelétrica).

Os materiais ferroelétricos são indicados como os análogos elétricos de alguns ferromagnetos pois, a exemplo desses últimos, eles exibem um comportamento não linear e o fenômeno de "hysteresis".

A teoria de Landau tem sido usada com sucesso no estudo desses sistemas e, de acordo com vários autores^[6], é possível definir o funcional de densidade de energia livre como

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha QQ^* + \frac{1}{4}\beta(QQ^*)^2 - \frac{1}{2}i\sigma(Q\frac{dQ^*}{dx} - Q^*\frac{dQ}{dx}) + \frac{1}{2}\kappa(\frac{dQ}{dx}\frac{dQ^*}{dx}) + \frac{1}{2}\gamma[Q^n + Q^{*n} - (Q^*Q)^{n/2}] \quad (1)$$

onde Q é o parâmetro de ordem (complexo), $\alpha = \alpha_o(T - T_o)$ é o parâmetro de Landau que depende da temperatura, enquanto os demais $\beta, \kappa, \gamma, \sigma$, são considerados constantes positivas. Os dois primeiros termos, na equação 1, são aqueles típicos da expansão original de Landau; o terceiro é o invariante gradiente de Lifshitz que, quando permitido pela simetria do cristal, implica na existência de uma fase modulada espacialmente; o quarto termo representa a contribuição da energia elástica, enquanto o quinto termo é a energia "lock-in" [sendo n (par) a ordem de comensurabilidade] que é definida como sendo do tipo "Umklapp" de ordem mais baixa permitida pelo grupo de simetria de ponto. Os valores de n que caracterizam alguns desses materiais têm sido definidos na literatura, a exemplo de: $(NH_4)_2BeF_4$ ($n = 4$); Rb_2ZnCl_4 e K_2SeO_4 ($n = 6$) e $[N(CH_3)_4]ZnCl_4$ ($n = 10$).

A minimização da equação 1 e a conseqüente aplicação da aproximação de amplitude constante (vide parte I) implica num par de equações acopladas de Euler-Lagrange do qual surge a equação de seno-Gordon estática (ou equação do pêndulo), onde, $Q = A \exp[i\phi(x)]$, com A sendo a amplitude constante e a fase ϕ variável, ou seja,

$$\frac{d^2\phi_n}{dx^2} + \Lambda^2 \text{sen}\phi_n = 0 \quad (2)$$

que é semelhante à equação do pêndulo [equação 5 em (I)] quando utilizamos as transformações: $x \rightarrow t$; $\phi_n = n\phi \rightarrow \theta$ e $\frac{1}{2}n^2\gamma\kappa^{-1}A^{n-2} \rightarrow \Lambda^2$; conforme Figura 1 a seguir.

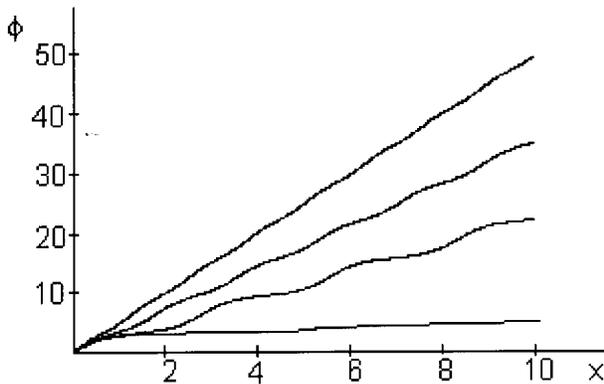


Figura 1. Arranjo multisolitônico ($m=0, \dots, 1$).

A primeira integral da equação 2 é

$$\frac{1}{2}\kappa\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma A^{n-2}(\cos\phi_n - 1) \quad (3)$$

onde C é uma constante de integração.

A partir da equação 3 pode-se calcular a distância inter-solitônica " D ". Para isso utiliza-se, mais uma vez, o cálculo da integral elíptica completa de primeira espécie $K(m)$ onde $m = k^2$ é o parâmetro das integrais elípticas e k é o denominado módulo das citadas integrais, isto é,

$$D = \frac{1}{n}\Delta^{1/2}4K(m) \quad (4)$$

com $\Delta = \kappa^{1/2}(2\gamma A^{n-2})^{-1/2}$ e $m = \gamma A^{n-2}C^{-1}$, conforme é notado na Figura 2.

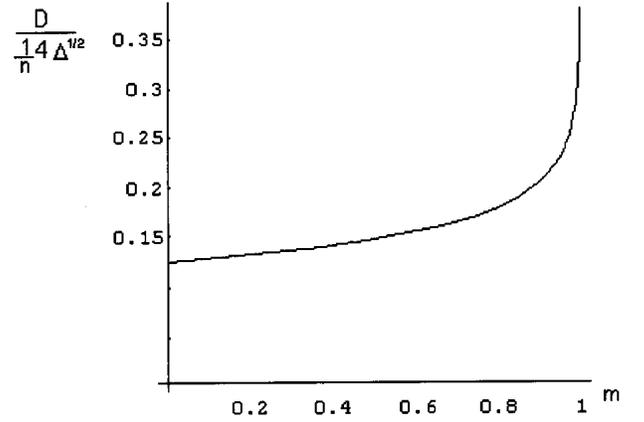


Figura 2. Distância intersolitônica versus m .

A largura " d " do soliton é obtida a partir do valor máximo da derivada da fase na equação 3 e, neste caso, tem-se

$$\phi'_{\max} = (2C\kappa^{-1})^{1/2} = \frac{2\pi}{nd} \quad (5)$$

e, a partir das expressões 4 e 5, é possível encontrar a densidade solitônica (vide Figura 3), que é uma medida da fração volumétrica do cristal nas paredes de domínio incomensurável^[6]

$$n_s = \frac{d}{D} = \frac{\pi}{2K(m)} \quad (6)$$

Com a diminuição de temperatura, a partir da fase normal de alta simetria, a distância inter-solitônica (D) cresce, divergindo ao infinito quando $m \rightarrow 1$, enquanto a largura do soliton (d) tem uma dependência fraca com a temperatura^{[7]-[8]}. Quando o sistema se aproxima

de sua transição de fase "lock-in" ($m \rightarrow 1$) a densidade solitônica tende continuamente a zero e o vetor de modulação médio tende ao valor comensurável em T_c . Apesar da existência de limitações intrínsecas a esta aproximação na vizinhança da mencionada temperatura crítica ela, além de facilitar o trabalho analítico, apresenta uma idéia do que ocorre experimentalmente na Física das transições de fase nos citados materiais. Neste problema, conforme enfatizamos na parte (I) a densidade solitônica é, também, considerada como um parâmetro de ordem.

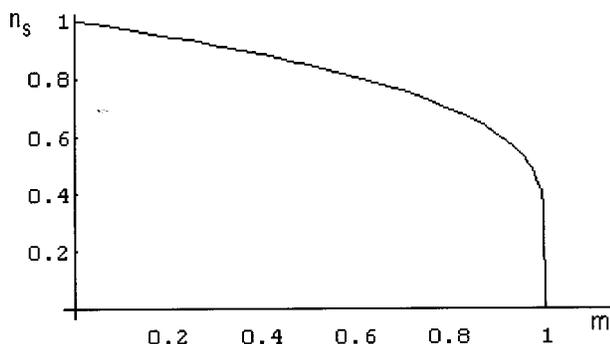


Figura 3. Densidade solitônica versus m .

III Cristais Líquidos Esméticos

Os denominados cristais líquidos ferroelétricos se caracterizam pela exibição de um momento de dipolo espontâneo, mesmo na ausência de um campo externo. A propriedade ferroelétrica desaparece acima de certa temperatura crítica T_i , a partir da qual o cristal é dito estar no estado paraelétrico. Tais cristais líquidos possuem moléculas quirais, ou seja, suas moléculas não apresentam simetria de reflexão e possuem momento de dipolo normal à direção do eixo longo de suas moléculas orgânicas.

A nossa discussão se restringirá ao cristal líquido ferroelétrico esmético quiral conhecido por *DOBAMBC*^{[9]–[12]}, abreviação de 1-n-decyloxybenzylidene-p'-amino-2-methylbutylcinnamate, o qual se apresenta em condições normais de temperatura e pressão em uma fase esmética *A* (*SmA*) [caracterizada pelo alinhamento das moléculas em uma direção normal às camadas onde a distância entre as mesmas é, em geral, igual ao "comprimento" das

moléculas] que é chamada de fase normal ou protótipa e na qual ele se apresenta no estado paraelétrico. À medida que a temperatura vai decrescendo o sistema atingirá uma temperatura de transição (T_i) para uma fase mais ordenada denominada esmética *C quiral* (*SmC**) que é modulada incomensuravelmente em relação à fase normal. Se a temperatura permanecer diminuindo o que se observa, experimentalmente, é que haverá uma nova temperatura crítica de transição (T_c) para a fase esmética *C* (*SmC*) que é ferroelétrica e modulada, comensuravelmente, em relação à fase normal. Esta transição entre as fases *SmC** e *SmC* é também chamada "lock-in" (incomensurável-comensurável) onde se diz que a mesma "restaura" a periodicidade da rede cristalina (com um período múltiplo do inicial).

Meyer, Liébert, Strzelecki e Keller^[9], em 1975, foram os precursores no uso de argumentos de simetria mostrando que cristais líquidos esméticos *C** podem exibir polarização elétrica espontânea no plano das camadas esméticas e verificaram, experimentalmente, a propriedade ferroelétrica no composto recém sintetizado *DOBAMBC*. No citado cristal líquido as temperaturas críticas são: $T_i = 95^\circ C$ [*SmA* – *SmC**] e $T_c = 76^\circ C$ [*SmC** – *SmC* ou "lock-in"].

A mencionada fase esmética *C** quiral é caracterizada por uma estrutura helicoidal, cujo "pitch" depende da temperatura e de campos aplicados. Nesta fase o eixo molecular longo faz um ângulo θ com a normal à camada esmética e gira ao longo da direção normal formando a citada hélice.

Nos cristais líquidos ferroelétricos esméticos (tipo *DOBAMBC*) a presença de uma polarização espontânea (ou momento de dipolo elétrico por unidade de volume) está vinculada ao fato de as moléculas do composto não possuírem centro de inversão (elas são não-centro-simétricas) não apresentando simetria de reflexão, o que caracteriza moléculas opticamente ativas ou quirais.

Alguns diferentes potenciais termodinâmicos, tipo Ginzburg-Landau, para o estudo de transições de fase podem ser aplicados ao estudo deste material (*DOBAMBC*), sendo o denominado modelo termodinâmico generalizado aquele em que existe uma melhor concordância com os dados experimentais. Ele

foi introduzido por Zeks^[13], no qual foi incluído um termo de sexta ordem do ângulo de "tilt" (θ) por Huang e Viner^[14] e, também, por Carlsson e Dahl^[15], independentemente.

Apesar de tais considerações nos restringiremos aqui a discutir o denominado modelo simplificado^[16] do po-

$$F = \int d^3r \{ A\theta^2 + B\theta^4 + \frac{1}{2}K[(\frac{d\theta}{dz})^2 + \theta^2(\frac{d\phi}{dz} - q_o)^2] - \chi\mu E\theta\text{sen}\phi \} \quad (7)$$

onde na fase SmC^* o eixo z é escolhido paralelo à normal à camada esmética. O campo elétrico é tomado paralelo ao eixo x e a polarização elétrica P está no plano paralelo à camada esmética. Na equação 7 são desprezadas as dependências funcionais de x e y em θ e ϕ . O parâmetro de Landau $A = A'(T - T_o)$ tem a dependência explícita com a temperatura, sendo T_o uma temperatura crítica, enquanto A', B, K, q_o, χ, μ , são, por hipótese, constantes.

De maneira similar aos cálculos discutidos na seção anterior, a estabilidade do sistema é obtida através da minimização da equação 7 que conduz a um par de equações de Euler-Lagrange não lineares acopladas em θ e ϕ . Para simplificar os cálculos emprega-se, novamente, a aproximação de amplitude constante^[17] (neste caso θ tem valor constante) de tal maneira que a equação resultante é do tipo seno-Gordon estática (ou equação do pêndulo), desta vez escrita como

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + \Lambda^2 \cos\phi = 0 \quad (8)$$

onde foram utilizadas as transformações:

$\Lambda^2 = E'/\theta$, $u = q_o z$ e $E' = \frac{\chi\mu}{Kq_o^2} E$ que pode ser comparada com a equação 5 de (I) quando $u \rightarrow t$, $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$.

A equação 8, que é similar àsquelas já explicitadas anteriormente, indica a presença de descomensurações (ou solitons de fase) que caracterizam a fase incommensurável quiral SmC^* , a qual terá o "pitch" de sua estrutura helicoidal aumentado por um campo elétrico crítico E_c e, em conseqüência, ocorrerá uma transição de fase "lock-in" para a fase ferroelétrica comensurável SmC . No caso de uma transição de segunda ordem

tencial termodinâmico, em que a polarização elétrica espontânea é acoplada a um campo elétrico aplicado E paralelo ao plano da camada através de um termo proporcional a $-E\theta\text{sen}\phi$, onde ϕ é um ângulo azimutal do eixo longo molecular. A energia livre é descrita por

(contínua), o "pitch" tende a um valor infinito no ponto de transição (T_c) e o sistema reduz-se a um estado monosolitônico (ou kink) de ϕ excitado na mencionada fase esmética C uniforme.

Uma situação formalmente análoga surgirá quando ao sistema $DOBAMBC$ é aplicado um campo magnético externo H ^{[18]-[19]}. Neste caso escreve-se a densidade de energia livre f em termos de um parâmetro de ordem bidimensional $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ relacionado ao diretor molecular $n = (n_x, n_y, n_z)$, tal que ξ_1 e ξ_2 são as componentes do vetor de "tilt" ξ , em que $\xi_1 = n_x n_z$ e $\xi_2 = n_y n_z$. Nas equações abaixo χ define a anisotropia diamagnética (positiva neste caso) e os coeficientes fenomenológicos a, b, κ, δ são aqueles da expansão de Ginzburg-Landau, onde somente o primeiro é dependente da temperatura enquanto os demais, por hipótese, são constantes positivas.

$$f = K + W + L \quad (9)$$

onde

$$K = \frac{1}{2}\kappa[(\frac{d\xi_1}{dz})^2 + (\frac{d\xi_2}{dz})^2] \quad (10)$$

é o termo de energia elástica;

$$L = \delta(\xi_1 \frac{d\xi_2}{dz} - \xi_2 \frac{d\xi_1}{dz}) \quad (11)$$

é o invariante de Lifshitz e,

$$W = \frac{1}{2}(a - \chi H^2)\xi_1^2 + \frac{1}{2}a\xi_2^2 + \frac{1}{4}b(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \quad (12)$$

é a parte homogênea do mencionado potencial termodinâmico (vide Figuras 4a e 4b) onde está explicitada a contribuição do campo magnético externo H .

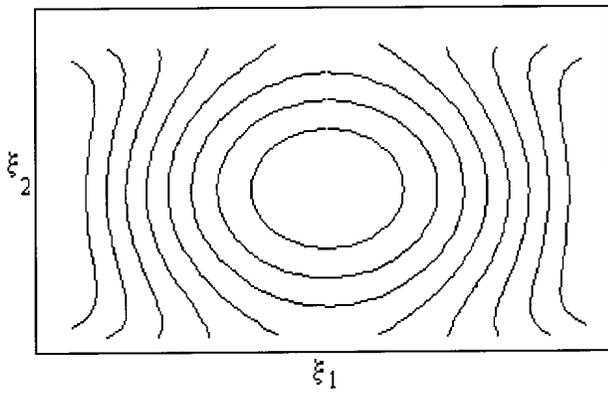


Figura 4a. Linhas de contorno do potencial homogêneo para $a=1.25$.

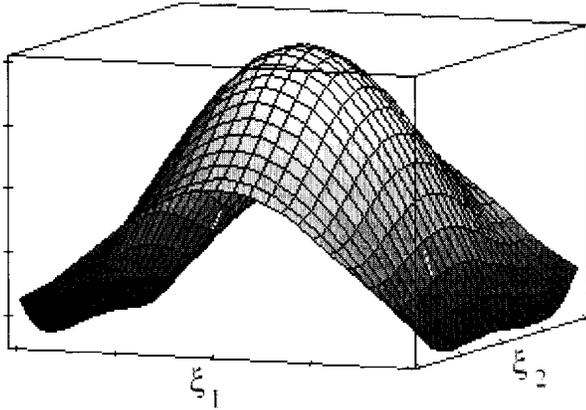


Figura 4b. Potencial $W(\xi_1, \xi_2)$.

De maneira análoga ao efetuado na equação 7 a minimização da equação 9 conduzirá, novamente, a um par de equações de Euler-Lagrange não lineares acopladas, cuja solução analítica pode ser obtida de forma aproximada quando se utiliza a hipótese de McMillan^[17] referente à amplitude constante do parâmetro de ordem. Em conseqüência surgirá uma nova equação de seno-Gordon estática, desta vez com uma dependência funcional em termos do campo magnético:

$$\frac{d^2\phi_2}{dz^2} + \Lambda^2 \text{sen}\phi_2 = 0 \quad (13)$$

onde $\Lambda^2 = -\chi H^2 \kappa \delta^{-2}$ e em comparação com a equação 5 da parte (I) vê-se que $z \rightarrow t$ e $\phi_2 = 2\phi \rightarrow \theta$.

IV Estruturas Magnéticas

Uma discussão paralela àquela empreendida por nós em (I) e nas seções anteriores deste trabalho, em torno

de transições de fase estruturais, pode ser feita para o caso de diferentes estruturas magnéticas que apresentam fases moduladas incomensuravelmente. Em todos os sistemas até aqui discutidos o que é, experimentalmente, observado é a existência de quebra de simetria e o subsequente surgimento de um "soft mode" fazendo com que a estrutura original (fase normal) dê lugar a uma outra, incomensurável, em que a razão da periodicidade da nova estrutura modulada, conforme já enfatizado anteriormente, não é um múltiplo simples do parâmetro de rede e sim um número irracional. Na maioria dos casos pode surgir uma outra TF denominada "lock-in" onde a fase incomensurável dá lugar a uma outra comensurável de baixa simetria onde a periodicidade da estrutura modulada é agora um múltiplo (número racional) do parâmetro de rede inicial, ou seja, nesta última fase o vetor de onda que a caracteriza é uma fração racional de um vetor da rede recíproca.

Dzyaloshinskii^[20] no seu clássico estudo sobre o mecanismo de formação de superestruturas helicoidais, em antiferromagnetos, utilizou invariantes lineares na expressão de seu potencial termodinâmico bem como uma hipótese similar àquela de McMillan^[17] para a minimização do referido funcional, de tal maneira que obteve como equação resultante uma equação de seno-Gordon estática.

Um interessante estudo em torno de estruturas solitônicas que surgem em materiais magnéticos (ex. *CeSb*) foi realizado por Bak e von Boehm^[21] ao analisarem as fases moduladas de um "modelo de Ising". Estes autores utilizaram, também, uma teoria de campo médio (tipo Ginzburg-Landau) e mostraram que a estabilidade das fases comensuráveis pode ser entendida por intermédio da teoria de paredes de domínio (ou "domain walls" ou solitons). O *CeSb* apresenta experimentalmente uma série de transições entre fases comensuráveis. Eles utilizaram um funcional de energia livre tipo Ginzburg-Landau e definiram o parâmetro de ordem, $S_{1/4}(\vec{r})$, que descreve uma onda de densidade de spin:

$$S(\vec{r}) = 2^{-1/2} S_{1/4}(\vec{r}) \exp[2\pi i(\frac{1}{4}x)] \quad (14)$$

De maneira similar aos casos discutidos nas seções anteriores, para a obtenção de configurações estáveis

de spins, o funcional de densidade de energia livre é minimizado em relação ao citado parâmetro de ordem. No caso unidimensional $S_{1/4}(x)$, a exemplo de McMillan^[17], é assumido que próximo à fase comensurável ($q = 1/4$) a amplitude do parâmetro de ordem é constante, e a fase varia espacialmente tal que,

$$S_{\pm 1/4}(x) = A \exp[\pm i\phi(x)] \quad (15)$$

e no caso de ϕ constante as equações 14 e 15 indicam a fase comensurável do sistema. No caso em que $\phi(x) = \delta x$, surge a fase modulada com

$$S(x) = 2^{-1/2} A \exp(i\delta x) \exp[2\pi i(\frac{1}{4}x)] \quad (16)$$

ou seja, tem-se uma onda de densidade de spin incomensurável com vetor de onda $q = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{2\pi}$. Neste modelo o funcional de densidade de energia livre por unidade de área perpendicular a x pode ser escrito como

$$F = \int dx c A^2 [\frac{1}{2}(\frac{d\phi}{dx} - \delta)^2 + v(1 + \cos p\phi)] \quad (17)$$

com $p = 4$, $\delta = J_1/4J_2$, $v = -bA^2/96J_2$ e $A^2 = 3b^{-1}(4J_1 - 2J_2 - J)$; onde c e b são coeficientes da expansão de Ginzburg-Landau enquanto J_1 e J_2 são constantes de interação.

A exemplo de expressões similares (nas TF estruturais) o primeiro termo (energia elástica) na equação 17 favorece o vetor de onda incomensurável, enquanto o segundo termo (energia "Umklapp") favorece a fase comensurável. A competição entre estes termos implica no surgimento da TF "lock-in" no citado sistema magnético. A função que minimiza a equação 17 satisfaz à equação de seno-Gordon (ou do pêndulo matemático) estática:

$$\frac{d^2\phi_4}{dx^2} + \Lambda^2 \text{sen}\phi_4 = 0 \quad (18)$$

onde, mais uma vez, se pode comparar com a equação 5 da parte (I) quando $x \rightarrow t$, $\phi_4 = 4\phi \rightarrow \theta$ e $\Lambda^2 = v$.

V Os Sistemas de Seno-Gordon

A utilização da equação do pêndulo (ou equação de seno-Gordon) dependente (ou não) do tempo em diferentes ramos da Física (Partículas Elementares, Matéria Condensada, Eletrodinâmica, Mecânica Estatística, ...)

é indicada através dos denominados sistemas de seno-Gordon. Um bom exemplo é aquele apresentado por Steiner^[22] no estudo de uma cadeia ferromagnética unidimensional com anisotropia planar em um campo magnético H , descrita por uma série de spins (S) e pela interação de troca (J), a quem o mencionado autor fez corresponder um sistema dinâmico formado por um conjunto de N pêndulos restritos e mecanicamente acoplados, situados no mesmo plano vertical, sendo m a massa, K a constante de acoplamento de cada um deles e o potencial total é devido à gravidade G . Em conseqüência ele obteve como equação de movimento, no limite contínuo, uma equação de Klein-Gordon não linear (ou seno-Gordon dependente do tempo) que é uma equação de campo invariante de Lorentz e onde a velocidade da luz desempenha, neste caso, o papel de velocidade de fase v_o da excitação linear. Este tipo de equação apresenta, geralmente, três distintas soluções analíticas: *ondas de spins* (excitações lineares), *solitons* e "*breathers*" (soluções estendidas e que são excitações não lineares), em que a última se caracteriza por pares soliton-antisoliton acoplados.

Vários autores^{[23]-[25]} têm enfatizado o paralelismo existente entre os formalismos que descrevem alguns fenômenos de matéria condensada e aqueles da Física de partículas oriundo, principalmente, da similaridade do comportamento do potencial termodinâmico de energia livre na vizinhança de uma TF. Um caso exemplar é aquele da TF de segunda ordem em que a citada energia livre apresenta na sua parte homogênea um potencial tipo Ginzburg-Landau^[2] na forma

$$V(\phi) = A |\phi|^2 + \frac{1}{2} B |\phi|^4 \quad (19)$$

onde ϕ é um parâmetro de ordem ou um "campo". Os coeficientes para as formas apresentadas na Figura 5 abaixo tem a seguinte dependência com a temperatura relativa $\varepsilon = (T - T_c)/T_c$, com T_c sendo uma temperatura crítica, $A \cong \varepsilon A'$ e A' e B são constantes.

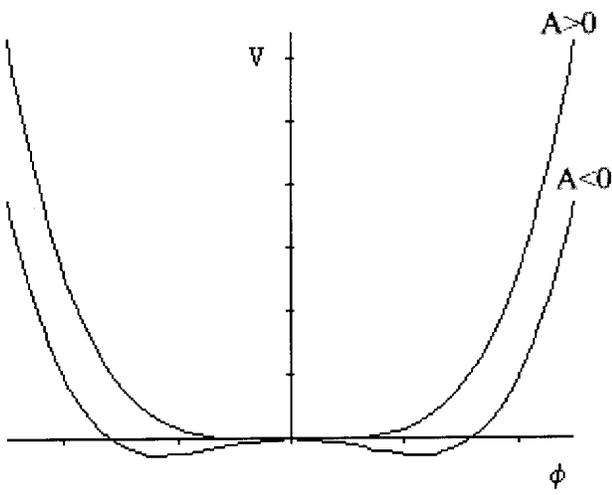


Figura 5. Variação do potencial em função de ϕ .

Zurek (1996) indica que nas teorias de campo a expressão 19 para a energia potencial é com frequência postulada embora, conforme estressam Aitchison e Heyl^[26], se possa justificá-la pela aproximação Gaussiana para temperaturas finitas. Para o caso de baixas temperaturas (vide casos em Física da Matéria Condensada) geralmente ela é derivada através de uma aproximação de campo médio, a partir de teoria microscópica subjacente ao sistema estudado. Esta forma para $V(\phi)$

$$F\{\phi(x)\} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} A \phi^2(x) + \frac{1}{4} B \phi^4(x) + C [\nabla \phi(x)]^2 - h \phi(x) \right\} \quad (20)$$

onde A , B e C são coeficientes fenomenológicos da teoria e h é um campo externo. No caso em que $h = 0$ tem-se a forma mais simples em que se admite a quebra de simetria espontânea.

Finalmente, é interessante enfatizarmos que em alguns sistemas incomensuráveis, a exemplo de alguns já discutidos na parte I, é possível introduzir-se uma expressão lagrangeana para o estudo de modos coletivos em tais estruturas e com isto obter-se como equação de movimento a citada equação de Klein-Gordon não linear^[28]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta^2 \text{sen} \phi = 0 \quad (21)$$

onde podemos encontrar soluções do tipo $\phi = \phi(s)$, em

foi proposta, em 1950, por Ginzburg e Landau^[2] para descrever, fenomenologicamente, a densidade de energia livre para um supercondutor. Este estudo envolvendo a propriedade de quebra de simetria no citado material foi mais tarde generalizada na teoria de gauge de Yang-Mills, por vários autores^[27] que renomearam tal mecanismo por quebra de simetria espontânea. Em lugar dos pares de Cooper (no caso dos materiais supercondutores) foi postulada a existência de um campo escalar ϕ denominado campo de Higgs que satisfaz, por hipótese, à definição de $V(\phi)$ dada na expressão 19.

Em síntese podemos resumir a teoria de Landau^[25], para a presente discussão, como um modelo onde se explicita uma expansão do funcional de energia livre em termos de potências do parâmetro de ordem, em que os termos permitidos na mencionada expansão são aqueles selecionados por argumentos de simetria. As TF são classificadas levando-se em conta o comportamento da transformação de seu parâmetro de ordem sob uma transformação de simetria. logo pode-se descrever o parâmetro de ordem por meio de um campo escalar $\phi(x)$ e com a hipótese de Landau para definir a energia livre para o sistema em um espaço de dimensão D , ou seja

que $s = x - vt$, de tal maneira que a equação 21 fica reduzida à conhecida equação de seno-Gordon estática (ou equação do pêndulo):

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \Lambda^2 \text{sen} \phi = 0 \quad (22)$$

onde $\Lambda^2 = -\Delta^2 \gamma$ e $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$, de tal maneira que quando $s \rightarrow x$ obtemos a equação 5 na parte I. Estas soluções são ondas de perfil permanente, ou seja, ondas em que a velocidade de propagação "v" é constante. A equação 22 mais uma vez ratifica a grande importância de sua utilização na Física dos sistemas incomensuráveis.

VI Discussão e Conclusões

Nesta segunda parte do projeto estendemos a nossa discussão em torno de analogias envolvendo outros sistemas incomensuráveis, que são também exemplos de sistemas de seno-Gordon, com o problema do pêndulo matemático.

Um aspecto interessante neste estudo é a comprovação da importância da hipótese de McMillan^[17] (também introduzida por outros autores conforme citado na parte I) que considera a amplitude do parâmetro de ordem constante (somente variando a fase) na solução analítica de expressões para os potenciais termodinâmicos que representam distintos sistemas físicos e que apresentam TF estruturais ou magnéticas.

Neste trabalho o nosso objetivo foi apreciar, didaticamente, o surgimento de equações tipo seno-Gordon estática (ou equação do pêndulo matemático) que envolvem diferentes parâmetros (para distintas situações físicas em sistemas incomensuráveis), e que podem ser associadas com algumas características do problema pendular. É claro que as analogias mecânicas envolvendo tais estruturas apresentam muitas vezes dificuldades já explicitadas por outros autores^{[10]–[12],[18]–[19]}, quando se procura vincular o "espaço de fase" referente às "coordenadas" de um dado parâmetro de ordem com aquele espaço de fase ordinário da Mecânica Clássica. A analogia ligando $x \rightarrow t$ tem sido utilizada por vários autores tanto em problemas de Física da Matéria Condensada^{[10]–[12],[18]–[19]} bem como em trabalhos de Física de Partículas^[23]. No presente caso a nossa discussão foi bem mais simples apesar de ser bastante interessante o fato de se discutir paralelamente alguns diferentes sistemas incomensuráveis.

As figuras no texto ilustram parâmetros físicos e equações que podem "interligar" cada situação física do sistema incomensurável com outras similares no problema do pêndulo matemático. A Figura (1) esboça diversos arranjos multisolitônicos para diferentes situações, desde o caso da onda plana incomensurável ($m = 0$) até o regime monosolitônico ($m = 1$). A Figura (2) mostra a variação da distância intersolitônica com o parâmetro m . A Figura seguinte, (3), apresenta a variação da densidade solitônica em termos de m . As Figuras (4a e 4b) ilustram bi e tridi-

mensionalmente a parte homogênea do potencial termodinâmico. A última Figura, (5), apresenta a variação do potencial de Ginzburg-Landau em termos do campo (para as fases de alta simetria ($A > 0$) e ordenada ($A < 0$)).

Finalmente, na última seção, revisamos algumas questões básicas sobre os denominados sistemas de seno-Gordon que se apresentam em distintos ramos da Física, e que utilizam para isto o formalismo de teoria de campos onde o parâmetro de ordem do sistema é agora definido como sendo um campo. Apesar de ser um "approach" bem mais geral do que o empregado nas outras seções do nosso trabalho (teoria de campo médio), o mesmo guarda, formalmente, uma forte semelhança com os outros problemas discutidos.

Agradecimentos

A. Ribeiro Filho agradece ao CNPq e à CAPES o apoio a este projeto através de bolsa junto ao CDI - Programa Suplementar de Apoio à Qualificação Docente.

References

- [1] E. M. de Nascimento, D. S. de Vasconcelos, J. F. M. Rocha e A. Ribeiro Filho, Rev. Bras. de Ensino de Física, **20**, 1, 11 (1998).
- [2] V. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **20**, (1950). (vide K. Moriyasu, Contemp. Phys., **23**, 6, 553 (1982).
- [3] R. Blinc, Phys. Reports, **79**, 5, 331 (1981).
- [4] J. Valasek, Phys. Rev. **15**, 537 (1920); **17**, 475, (1922).
- [5] H. Z. Cummins, Phys. Reports, **185**, 5-6, 211 (1990).
- [6] R. Blinc, V. Rutar, B. Topic, F. Milia and Th. Rasing, Phys. Rev. B, **33**, 3, 1721 (1986); e A. P. Levanyuk, Sov. Phys.-JETP, **22**, 901, (1966).
- [7] H. Mashyama and H. G. Unruh, Journ. Phys. C **16**, 5009, (1983).
- [8] R. Blinc, D. C. Ailion, J. Dolinsek and S. Zurev, Phys. Rev. Lett. **54**, 79, (1985).
- [9] R. B. Meyer, L. Liébert, L. Strzeleck and P. Keller, Journ. de Phys. Lett. (France), **36**, 1 (1975).
- [10] K. C. Mundim, P. Pitanga and A. Ribeiro Filho, Notas de Física, CBPF-NF-045, 1-10 (1992) e Phys Stat. Solidi (b), **179**, 53 (1993).
- [11] P. Pitanga, A. Ribeiro Filho and K. C. Mundim, Phys Stat. Solidi (b), **183**, 1, 103 (1994).
- [12] P. Pitanga, A. Ribeiro Filho and K. C. Mundim, Phys Stat. Solidi (b), **197**, 517 (1996).
- [13] B. Zeks, Mol. Cryst. Liq. Cryst., **114**, 259, (1984).

- [14] C. C. Huang and J. M. Viner, Phys. Rev. A, **25**, 3385 (1982).
- [15] T. Carlsson and I. Dahl, Mol. Cryst. Liq. Cryst., **95**, 373, (1983).
- [16] M. Yamashita and O. Tamada, Phys. Soc. Japan, **54**, 8, 2963 (1985).
- [17] W. L. McMillan, Phys. Rev. B **14**, 1496, (1976).
- [18] A. Ribeiro Filho, D. R. Tilley and B. Zeks, Phys. Lett., **100A**, 247 (1984).
- [19] D. R. Tilley, A. Ribeiro Filho, E. L. Albuquerque, N. S. Almeida and M. C. Oliveros, Proceed. of the 5th European Meet. on Ferroelectricity, Torremolinos, Spain, (1983); e A Ribeiro Filho, K C Mundim and P Pitanga, Proceed. of the 18th IUPAP, Intern. Conference on Statist. Physics. STATPHYS. Berlin. (1992).
- [20] I. E. Dzyaloshinskii, Sov. Phys. JETP, **20**, 3, 665 (1965).
- [21] P. Bak and J. von Boehm, Phys. Rev. B, **21**, 11, 5297 (1980).
- [22] M. Steiner, "Experimental Studies of Linear and Nonlinear Modes in 1-D Magnets". In Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems. Edit: T. Riste. Plenum Press, (1979).
- [23] J. J. Giambiagi, Notas de Física, CBPF-NF-005, 1-12, (1989).
- [24] W. H. Zurek, Phys. Reports **276**, 177 (1996).
- [25] H. M-Ortmanns, Rev. Mod. Phys., **68**, 2, 473 (1996).
- [26] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*. Hilger. Bristol (1982).
- [27] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132, (1964); **13**, 508, (1964); T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett., **13**, 585, (1964); P. W. Anderson, Phys. Rev., **130**, 439, (1963); F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett., **13**, 321, (1964). K. Moriyasu, Contemp. Phys., **23**, 6, 553 (1982).
- [28] J. F. M Rocha and A. Ribeiro Filho, Proceed. 17th IUPAP - International Conference on Thermodynamics and Statistical Physics - STATPHYS, Rio de Janeiro, (1989)