



# Estudo Experimental do Critério de Rayleigh

(Experimental Study of Rayleigh's Criterion)

Márcia Müller, Romir Gustavo Ernlund Paulino e José Luís Fabris

*Departamento Acadêmico de Física*

*Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná*

*Av. Sete de Setembro 3165, CEP 80230-901, Curitiba, PR*

Recebido 14 de dezembro, 1997

Neste artigo apresentamos um experimento simples que pode ser usado no curso de ótica da graduação, e que tem por finalidade auxiliar no aprendizado do Critério da Resolução de Rayleigh. No nosso experimento usamos a condição limite de resolução fornecida pelo Critério de Rayleigh, com o objetivo de obter a distância mínima em que dois pequenos orifícios circulares podem ser visualizados separadamente quando iluminados por um laser de He-Ne. Analisando os padrões de difração gerados pelos orifícios, também encontramos a separação entre eles e os seus respectivos diâmetros. Mostramos, ainda, algumas dificuldades enfrentadas na realização do experimento e o método que encontramos para superá-las.

In this paper we show a simple experiment that can be used in the optics undergraduate course, as an attempt to auxiliare the learning of Rayleigh's Resolution Criterion. In our experiment we use the limit of resolution condition of Rayleigh's Criterion, to find the minimum distance from two pinholes that allows their individual discernment when illuminated by an He-Ne laser. The analysis of pinholes diffraction pattern allows to find their separation and diameter. We show too, some difficultys found in the preparation of the experiment and the method used to superate it.

## I. Introdução

Na ótica, o critério de Rayleigh é a teoria que define a resolução de dois objetos observados com uma separação angular relativamente pequena. Por *resolução* entende-se a capacidade de se distinguir individualmente cada um dos objetos. Este critério é muito importante, pois é com base nele que se pode quantificar o desempenho relativo à característica de resolução de diversos instrumentos óticos como microscópios, binóculos, telescópios, ou mesmo o próprio olho[1,4].

Partindo do equacionamento do critério de Rayleigh, são usados vários artifícios para aumentar o poder de resolução de diversos instrumentos óticos. Um deles é a mudança do comprimento de onda  $\lambda$  que é utilizado no instrumento. Num microscópio usa-se, por exemplo, uma película de óleo transparente com índice de refração de aproximadamente 1,55 entre a objetiva e a amostra a ser visualizada, com o intuito de diminuir o comprimento de onda da luz. Um outro artifício

também utilizado para melhorar a resolução de tais aparelhos é aumentar o diâmetro das lentes, solução que é observada nos grandes telescópios.

## II. Teoria

Toda a imagem fornecida por uma lente ou orifício apresenta um padrão de difração, seja por observação direta ou após ter sido projetada sobre um anteparo. O próprio diâmetro da pupila ocular produz este efeito quando visualizamos qualquer objeto.

Quando a luz atravessa um orifício circular pequeno, ela produz uma figura de difração conhecida como difração de orifício simples, na qual o ângulo  $\theta$  subentendido pelo primeiro mínimo de difração está relacionado ao comprimento de onda  $\lambda$  da luz e ao diâmetro  $d$  da abertura, por:

$$\text{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (1)$$

onde o fator 1,22 advém da análise matemática da situação[2].

Quando o ângulo  $\theta$  for muito pequeno, o termo  $\sin(\theta)$  na equação (1) pode ser aproximado por  $\theta$ , e esta equação é rescrita como:

$$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (2)$$

Se a luz incidir sobre dois orifícios que apresentem uma separação angular pequena  $\phi$  (ver fig. 1), os dois padrões de difração de orifício simples gerados podem se sobrepor, comprometendo uma visualização individual dos mesmos. Consequentemente, a iluminação simultânea de dois orifícios iguais com luz de mesma intensidade, resulta na superposição de dois padrões de difração de orifício simples idênticos. Como o ponto central do máximo principal de cada padrão de difração se propaga perpendicularmente ao plano que contém os dois orifícios, ele será projetado em um anteparo sem apresentar nenhum desvio angular. Desta forma, a distância entre os máximos centrais DM será sempre igual à distância entre os centros dos dois orifícios.

Chamando de  $r$  a distância do máximo central ao primeiro mínimo de difração, vemos da figura 1 que a posição angular deste primeiro mínimo é dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{r}{R}\right) \quad (3)$$

De acordo com o Critério de Rayleigh, quando o primeiro mínimo de difração de um dos orifícios coincide com o máximo central do outro os objetos estão no limiar da resolução. Nesta situação (ver fig. 1), a linha que une o centro de qualquer um dos orifícios ao ponto médio entre os máximos centrais divide o ângulo  $\theta$  pela metade, e consequentemente:

$$\begin{cases} \phi + 2\alpha = 180^\circ \\ \frac{\theta}{2} + \alpha = 90^\circ \end{cases} \quad (4)$$

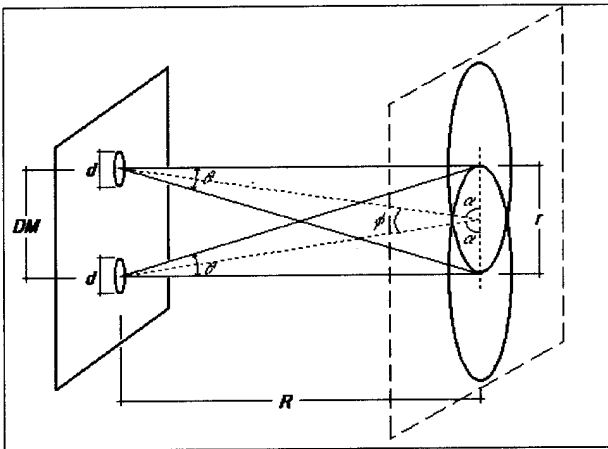


Figura 1. Figura de difração de 2 orifícios circulares.

A solução deste sistema de equações mostra que, quando os orifícios estiverem no limiar da resolução, a separação angular  $\phi$  entre eles é igual à posição angular  $\theta$  do primeiro mínimo de difração.

Logo, a separação angular crítica  $\phi_c$  entre os orifícios é dada por:

$$\phi_c \approx 1,22 \frac{\lambda}{d} = \arctan\left(\frac{r_c}{R_c}\right) \quad (5)$$

onde  $R_c$  é a distância entre o plano que contém os orifícios e o observador que satisfaz o critério de Rayleigh, e  $r_c$  é a separação entre os orifícios.

Vemos da equação 5, que os orifícios serão vistos como duas fontes distintas se a separação angular  $\phi$  entre eles for maior que  $1,22\lambda/d$ . No entanto, se  $\phi$  diminuir em consequência do aumento da distância de observação  $R$ , a superposição das figuras de difração irá aumentar, ficando cada vez mais difícil distinguir individualmente cada um dos orifícios.

O poder de resolução de instrumentos óticos refere-se à capacidade do instrumento de resolver dois objetos subentendidos por uma separação angular pequena de visualização. Analisando a equação (5) vemos que a variação do comprimento de onda da luz, ou a alteração do diâmetro do orifício difrator do sistema, podem influenciar na resolução do instrumento. Instrumentos com bom poder de resolução caracterizam-se por apresentar um pequeno  $\phi_c$ , o que pode ser conseguido utilizando-se filtros apropriados para a redução do comprimento de onda da luz ou lentes (orifícios difratores) com grande diâmetro.

É importante ressaltar que a validade da equação (5) depende fundamentalmente do paralelismo dos feixes, da igualdade na intensidade dos máximos centrais de difração, e de que as fontes sejam pontuais. Esta última característica pode ser assegurada no nosso experimento, levando-se em conta que estamos tratando de objetos com dimensões desprezíveis se comparadas com seu afastamento até o ponto de observação ( $d \ll R$ ).

### III. Montagem experimental e procedimentos

A figura 2 mostra um esquema simplificado da montagem experimental usada para o estudo do Critério

de Rayleigh. Nesta montagem, é utilizado um laser de He-Ne, modelo 1135P da Uniphase com 10mW de potência, para iluminar os orifícios que funcionam como

duas fontes distintas de luz. Estes orifícios foram feitos em papel alumínio com o auxílio de um fio de cobre fino.

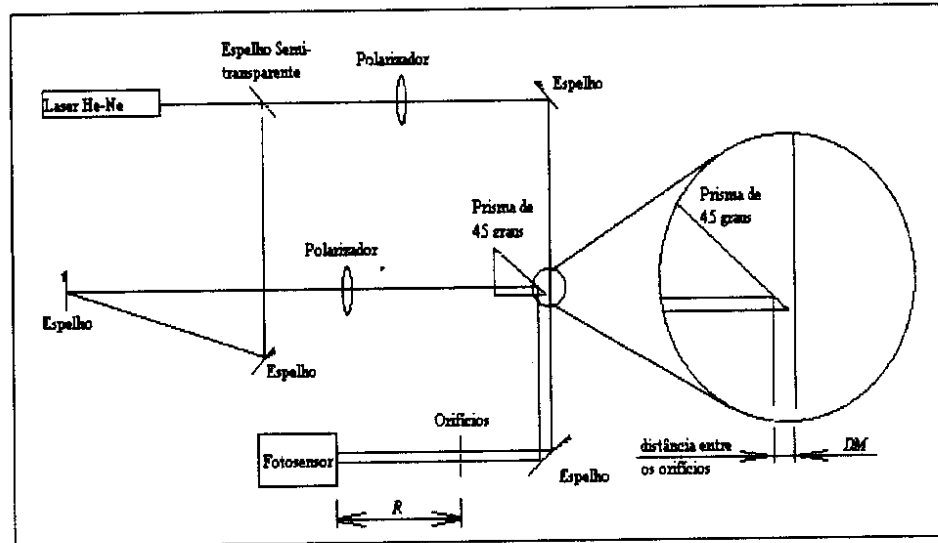


Figura 2. Esquema simplificado da montagem experimental utilizada.

Antes de chegar aos orifícios, o feixe proveniente do laser He-Ne é dividido por um espelho semi-transparente em dois outros feixes, que percorrem caminhos óticos diferentes. Fazendo a diferença de percurso entre eles maior que o comprimento de coerência do laser [2,3], asseguramos que na posição dos orifícios, os dois feixes são incoerentes entre si. É necessário que as fontes sejam incoerentes, para que não exista um padrão de interferência de fenda dupla superposto aos padrões de difração de cada orifício, o que tomaria a análise dos resultados desnecessariamente trabalhosa. Na figura 3 é mostrada a distribuição de intensidades resultante desta superposição, obtida por meio da iluminação dos orifícios com feixes coerentes.

São usados polarizadores para efetuar a correção das intensidades dos dois feixes, de modo que ambos os máximos centrais de difração possuam igual intensidade a uma distância  $R$  qualquer dos orifícios. Para ajustar estas intensidades, é feita uma varredura preliminar da distribuição de intensidade dos dois máximos centrais de difração a uma distância  $R$  dos orifícios, para a qual não há superposição dos mesmos. Em seguida, com uma adequada rotação dos polarizadores, pode-se ajus-

tar as intensidades dos dois feixes de tal forma que elas fiquem iguais.

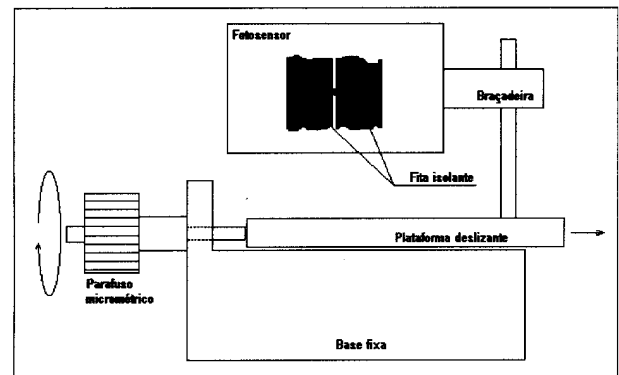


Figura 3. Padrão de interferência de fenda dupla superposto aos padrões de difração de cada orifício.

Após este ajuste são realizadas as medidas da distribuição de intensidade resultante da superposição dos padrões de difração, em distâncias  $R$  dos orifícios previamente escolhidas. A varredura destas distribuições de intensidade é feita por um fotosensor acoplado a um dispositivo translacionador dotado de um parafuso micrométrico, como mostra a figura 4.

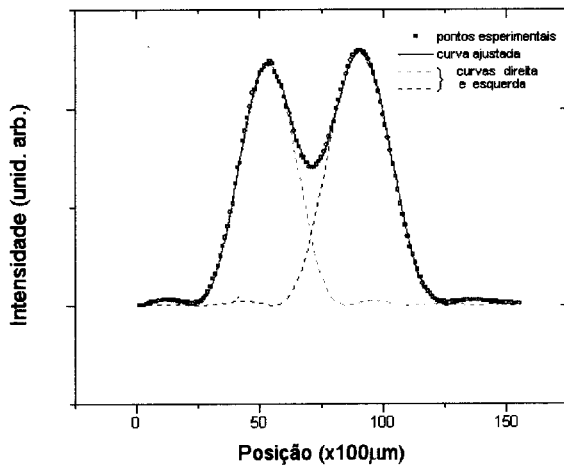


Figura 4. Montagem do fotosensor sobre plataforma móvel.

A rotação do parafuso micrométrico permite que a janela do fotosensor percorra todo o padrão de difração observado a uma certa distância  $R$  das fontes. Para diminuir a área da janela do fotosensor foi colocada sobre ela uma fenda com dimensões retangulares de aproximadamente 0,15 mm por 0,43 mm (estas dimensões foram medidas através do padrão de difração da fenda). Esta fenda foi feita com duas tiras de fita isolante e garantiu uma boa resolução para o sistema de leitura do padrão de difração. É interessante notar que se a fenda for estreita demais, perde-se intensidade na leitura, diminuindo a precisão do resultado; no entanto, se a fenda for muito grande, perde-se resolução na translação do sistema.

Os resultados obtidos com a varredura das distribuições de intensidade resultantes da superposição dos padrões de difração dos orifícios, foram inseridos em um software apropriado para gerar os gráficos de intensidade da luz  $x$  distância  $R$ . Para encontrar as posições dos mínimos e máximos centrais do padrão de difração de cada orifício, estes gráficos foram ajustados com base na soma de duas equações como a equação (6), que representa o padrão de difração de um único orifício circular [3].

$$I = \left( \frac{J_1(x)}{x} \right)^2 \quad (6)$$

Nesta expressão,  $J_1$  é a função de Bessel de ordem 1,  $I$  é a intensidade do padrão de difração, e  $x$  sua posição ao longo do perfil de intensidade.

Algumas modificações foram feitas na equação (6) de modo que os parâmetros de ajuste pudessem ser inseridos na função, transformando-a em:

$$I = A \left( \frac{J_1[(x+B)C]}{(x+B)C} \right)^2 \quad (7)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os parâmetros de ajuste que controlam, respectivamente, a amplitude, a posição e a largura do máximo principal.

A utilização da soma de duas equações semelhantes a equação (7) para ajustar a curva resultante da superposição dos padrões de difração dos dois orifícios, permitiu encontrar os valores de seis parâmetros, chamados de  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $A_2$ ,  $B_2$ , e  $C_2$ . Estes parâmetros representam as amplitudes, posições e larguras dos máximos centrais dos padrões de difração de cada um dos orifícios. Os parâmetros  $B_1$  e  $B_2$  fornecem a separação entre os máximos centrais, que por sua vez é igual a separação entre as fontes. Estes parâmetros permitem ainda escrever as equações que representam o padrão de difração de cada orifício, cujas raízes são as posições em que ocorrem os mínimos. O ajuste foi feito para varias distâncias  $R$  diferentes, tornando possível a construção e linearização de um gráfico  $R \times (DM - r)$ . Este gráfico permite encontrar facilmente o ponto em que  $(DM - r)$  é igual a zero, ou seja, a distância  $R_c$  desde os orifícios para a qual o critério de Rayleigh é satisfeito, já que para esta distância o primeiro mínimo de difração de um dos orifícios coincide com o máximo de difração do outro.

Conhecendo-se a distância  $R_c$  para a qual o critério de Rayleigh é satisfeito, e a posição  $r_c$  do primeiro mínimo de difração neste ponto, podemos utilizar a equação (5) para calcular a separação angular entre os orifícios. Por outro lado, a distância  $R_c$  e a separação angular  $\phi_c$  para as quais os objetos estão resolvidos pelo Critério de Resolução de Rayleigh podem ser calculados pela equação 5, conhecendo-se o comprimento de onda da luz proveniente das fontes, e o diâmetro das mesmas.

Podemos fazer uma estimativa grosseira do diâmetro dos orifícios medindo com um micrômetro o diâmetro do fio de cobre usado na confecção dos mesmos.

Uma estimativa melhor do diâmetro dos orifícios pode ser efetuada bloqueando-se o caminho de um

dos feixes, e varrendo a distribuição de intensidade do padrão de difração do outro orifício. Ajustando a distribuição de intensidade a uma certa distância  $R$  do orifício com o auxílio da equação 7, obtém-se a posição angular do primeiro mínimo de difração. Em seguida, usando a equação (2), o diâmetro deste orifício é facilmente encontrado. Se for possível a identificação de um segundo mínimo de difração, pode-se utilizar a equação:

$$d = \frac{2,23\lambda}{\theta} \quad (8)$$

para chegar ao valor do diâmetro do orifício. O índice 2,23 advém da análise matemática da geometria da situação[2].

#### IV. Resultados

Primeiramente usando os métodos descritos no item anterior encontramos dois valores para os diâmetros dos dois orifícios. Usando o micrômetro o valor de diâmetro medido foi de 0,12 mm, e usando difração de orifício simples obtivemos o valor de 0,13 mm.

Em seguida, com o intuito de encontrar a distância  $R_c$  que satisfaz o Critério de Rayleigh, foram feitas as varreduras e os respectivos ajustes das distribuições de intensidade resultantes da superposição dos padrões de difração dos dois orifícios a distâncias  $R$  à partir dos mesmos de 29; 39; 49; 59 e 97 cm. A figura 5 mostra o gráfico de Intensidade x posição obtido a uma distância  $R = 49$  cm. Nesta figura, são indicados os pontos experimentais ( $\square$ ) e as curvas dos padrões de difração de cada orifício (curvas tracejadas), que somadas resultam na curva ajustada aos pontos experimentais (curva contínua). Estas curvas foram obtidas após o ajuste da distribuição de intensidades realizado com o auxílio da equação (7). Para esta figura, os valores dos seis parâmetros de ajuste obtidos pelo método dos mínimos quadrados foram:  $A1 = 0,98$ ;  $B1 = 53,46$ ;  $C1 = 0,12$ ;  $A2 = 1,02$ ;  $B2 = 90,33$  e  $C2 = 0,11$ .

Procedendo desta forma pudemos encontrar as posições do máximo central e do primeiro mínimo de difração de cada orifício a diferentes distâncias  $R$  dos mesmos. É importante salientar que devido ao método usado na confecção dos orifícios, estes apresentaram uma pequena diferença nos seus diâmetros, e consequentemente nas posições angulares dos seus mínimos de difração. Na figura 6 é mostrado o gráfico de

$(DM = r \times R$  onde  $DM = 3,57$  mm, obtido para um dos dois orifícios. O ajuste de uma reta aos pontos experimentais do gráfico fornece a distância  $R$  à partir dos orifícios para a qual o Critério de Rayleigh é satisfeito, ou seja o ponto onde  $DM = r = 3,57$  mm. O valor encontrado para esta distância  $R_c$  foi de 57,78 cm. Usando os valores de  $R_c$  e  $r_c$  obtidos experimentalmente na equação (5), encontramos a separação angular crítica entre as fontes como sendo  $\phi_c = 6,18$  mrad.

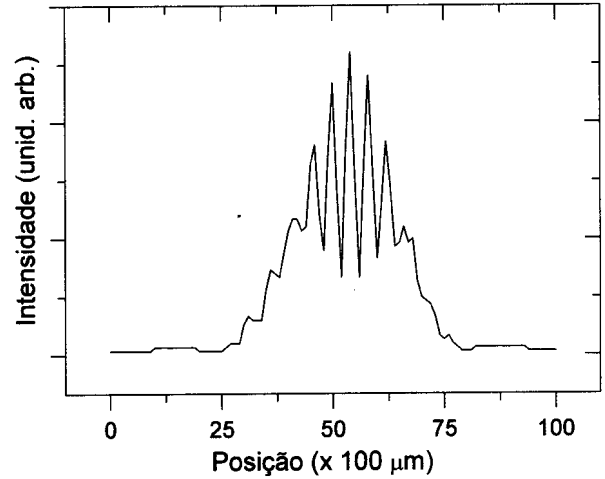


Figura 5. Gráfico da distribuição de intensidade dos padrões de difração superpostos mostrando a curva ajustada aos pontos experimentais, para  $R = 49$  cm.

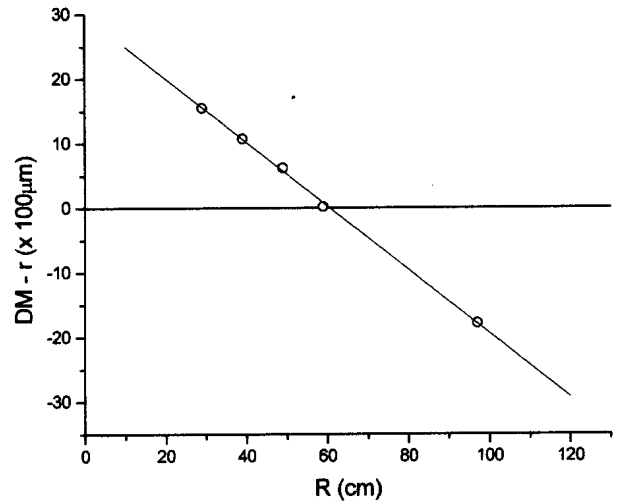


Figura 6. Gráfico  $(DM - r) \times R$ , e sua linearização para um dos orifícios.

#### V. Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma montagem que pode ser utilizada em cursos de graduação de terceiro

grau nas disciplinas de Física Básica relacionadas com Óptica Física. O experimento faz uma abordagem do Critério de Resolução de Rayleigh utilizando equipamentos que normalmente são encontrados nos Laboratórios didáticos de Física das nossas Universidades. Este experimento pode ser implementado nas aulas experimentais dos cursos de graduação, ou então pode ser adaptado para um experimento demonstrativo, dependendo das disponibilidades e características de cada Escola.

Podemos observar que uma montagem experimental relativamente simples e didática facilita a compreensão do Critério de Resolução de Rayleigh, além de exigir do aluno o conhecimento de vários dos conteúdos estudados num curso de Óptica Física. O aluno precisa compreender plenamente além do fenômeno de difração o conceito de coerência da luz, uma vez que é utilizado de um artifício para tornar incoerentes entre si dois feixes oriundos de um mesmo laser.

Além disso, o experimento estimula uma interdisciplinaridade, uma vez que os dados obtidos experimentalmente devem ser analisados tanto graficamente como numericamente. Assim, o aluno deve utilizar programas gráficos e algoritmos de ajuste de equações a dados experimentais, bem como programas que encontrem as raízes das equações de Bessel que representam a difração do orifício circular. Salientamos que, apesar destes softwares estarem normalmente disponíveis nas Escolas de terceiro grau, pode-se planejar uma ação conjunta com outras disciplinas curriculares, onde estes programas podem ser desenvolvidos pelos próprios alunos.

A maior dificuldade encontrada para a realização deste experimento está no cuidado que deve-se ter no

momento da montagem para que o critério de Rayleigh possa ser aplicado aos resultados obtidos. Dois destes cuidados são garantir o paralelismo dos feixes e a igualdade na intensidade dos mesmos.

Podemos comprovar a validade do método usado para encontrar a distância  $R_c$  (distância desde os orifícios que permite a visualização individual dos mesmos), comparando este valor com aquele calculado usando o diâmetro dos orifícios e a posição do primeiro mínimo de difração dos mesmos. Assim, usando  $\lambda = 632,8$  nm (comprimento de onda do laser de He-Ne) e os valores da posição  $r_c$  do primeiro mínimo de difração e do diâmetro dos orifícios encontrados por meio da difração de orifício simples na equação (5), encontramos uma separação angular crítica entre as fontes de 6,13 mrad e uma posição crítica  $R_c$  de 58,22 cm. A comparação dos resultados mostra uma boa concordância nos valores obtidos para  $R_c$  (57,78 cm) e  $\phi_c$  (6.18 mrad) com os dois métodos de medida.

## Referências

1. D. Halliday, R. Resnick, *Fundamentos de Física*, Volume 4. Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1991.
2. E. Hecht, *Optics*, Addison-Wesley Publishing Company. 2a Edição, 1987.
3. F. L. Pedrotti e L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
4. P. A. Tipler, *Física para cientistas e engenheiros*, Volume 4. Editora Guanabara Koogan. 3a Edição, Rio de Janeiro, 1995.