



# Criação de um Dipolo: O Proto-Potencial Vetor

(Creation of a dipole: the proto-potential vector)

G. F. Leal Ferreira

Instituto de Física, Universidade de São Paulo  
Caixa Postal 369, 13560-970, São Carlos, SP, Brasil

Recebido 3 de novembro, 1997

Os campos gerados na criação de um dipolo são obtidos e em especial o que chamamos de proto-potencial vetor do qual derivam os campos elétrico e magnético. Vendo o movimento de uma carga como a criação continua dipolos ao longo da sua trajetória os potenciais de Liénard-Wiechert são reobtidos. Expressão do campo elétrico dada por Feynman, sem demonstração, no Volume I de suas *Lectures*, é deduzida.

The fields generated in the creation of a dipole are obtained specially, as we call it, the proto-potential vector, from which both fields, the electric and magnetic, derive. Looking the movement of a charge as a continuous creation of dipoles along the path, the Liénard-Wiechert potentials are found. An expression for the electric field presented by Feynman, without proof, in the first volume of his *Lectures*, is obtained.

## 1. Introdução

O dipolo oscilante é o paradigma da emissão de radiação nos textos introdutórios de Eletromagnetismo. Um caso igualmente simples de ser estudado é o da criação instantânea de um dipolo, com os campos transientes e permanentes a ela associados. É mesmo mais fundamental, já que um sistema de correntes no espaço e no tempo pode ser obtido dela por superposição. E mais, pela matemática da função delta, podemos obter os campos de uma carga em movimento, numa abordagem alternativa à usual, embora mais longa.

Na formulação do Eletromagnetismo confrontamos com dois campos - o elétrico e o magnético -, cada um a grosso modo associado a suas fontes, cargas e correntes, que em fenômenos dependentes do tempo, geram os potenciais retardados. Mas, pela condição de Lorentz, os dois potenciais - o vetorial e o escalar -, relacionam-se numa equação do tipo de continuidade, remanescente da equação da continuidade corrente-carga, o que vai permitir, por uma transformação de calibre, a definição de um proto-potencial vetor do qual unicamente derivam os campos elétrico e magnético. No presente trabalho achamos os campos associados à criação do dipolo, o proto-potencial

vetor, os potenciais de Liénard-Wiechert e também o campo elétrico associado a uma carga em movimento de forma a reproduzir equação que Feynman apresenta sem demonstração no Cap.28, Eq.28.3, vol.I de suas *Lectures* [1].

## 2. Campos de criação de um dipolo

### 2.1 O Potencial vetor

Consideremos uma curva e seja  $s$  o seu comprimento de arco. Se em  $s = 0$  e ao longo da tangente à curva cria-se o dipolo  $\vec{p}$  em  $t = 0$ , a corrente linear  $\vec{J}_s(s, t)$  será dada por (ver Fig. 1 na qual a curva foi omitida)

$$\vec{J}_s(s, t) = \vec{p}\delta(s)\delta(t) \quad (1)$$

e o potencial vetor  $A(\vec{x}, t)$  será no ponto  $\vec{x}$ , contado a partir de  $s = 0$ , e no tempo  $t$ ,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{\vec{J}_s(t - r/c)ds}{r} \quad (2)$$

ou seja

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{p}\delta(t - r/c)/cr \quad (3)$$

em que  $r = |\vec{x}|$ ,  $c$  é a velocidade da luz e os deltas representam a função  $\delta$  de Dirac. Portanto,  $\vec{A}$  se constitui

num pulso de intensidade  $\vec{p}$  que se propaga esfericamente a partir do ponto de criação do dipolo.

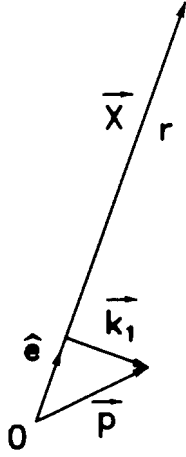


Figura 1. O dipolo  $\vec{p}$  é criado instantaneamente na origem O. Os campos são calculados no ponto  $\vec{x}$ , com  $\vec{x} = r\hat{e}$ ,  $\hat{e}$  versor.  $\vec{k}_1$  é o vetor componente de  $\vec{p}$  na direção normal a  $\hat{e}$ .

## 2.2 O potencial escalar

Da condição de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \dot{\Phi}/c = 0 \quad (4)$$

em que  $\Phi$  é o potencial escalar e  $\dot{\Phi}$  sua derivada parcial em relação ao tempo, tira-se

$$\vec{\nabla} \Phi = \left[ \Theta(t - r/c) + \frac{r}{c} \delta(t - r/c) \right] \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}}{c^2 r} - \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}}{c^2 r} \dot{\delta}(t - r/c) \hat{e} \quad (8)$$

onde fundimos no termo em delta contribuições dos dois termos da Eq.6 e renunciando assim ao rastreamento detalhado da origem dos termos. Continuando,  $\partial \vec{A} / \partial t$  obtém-se logo da Eq.4 e para o campo elétrico,  $\vec{E}$ , finalmente

$$\vec{E} = - \left[ \Theta(t - r/c) + \frac{r}{c} \delta(t - r/c) \right] \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}}{r^2} - \dot{\delta}(t - r/c) \frac{\vec{p} - \vec{p} \cdot \hat{e} \hat{e}}{c^2 r} \quad (9)$$

O vetor no termo em  $\dot{\delta}$  na Eq. 9 nada mais é do que a componente  $\vec{p}$  na direção normal a  $\hat{e}$  e que chamaremos de  $\vec{k}_1$  (ver Fig. 1), ou seja,

$$\vec{p} - \vec{p} \cdot \hat{e} \hat{e} = \vec{k}_1 \quad (10)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}}{r^2} \delta(t - r/c) + \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}}{cr} \dot{\delta}(t - r/c) \quad (5)$$

em que se omitiu a dependência na posição e no tempo em  $\dot{\Phi}$ .  $\hat{e}$  é o versor do vetor posição  $\vec{x}$  e  $\dot{\delta}$  a derivada, em relação ao seu argumento, da função delta. Na Eq.5 usou-se a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{p} \cdot f) = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} f$ , com  $\vec{p}$  um vetor constante e  $f$  uma função escalar. Da Eq.5 acha-se  $\Phi$  por integração no tempo:

$$\Phi = \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}}{r^2} \left[ \Theta(t - r/c) + \frac{r}{c} \delta(t - r/c) \right]. \quad (6)$$

Note-se que o potencial escalar apresenta, além do termo dipolar para  $t \geq r/c$ , termo pulsado, da ordem de  $1/r$ , remanescente do campo coulombiano e devido à discriminação entre os tempos de chegada dos sinais das cargas positiva e negativa, conforme o ponto de observação. Isto ficaria bem visível se tivéssemos preferido usar os potenciais retardados das cargas criadas.

## 2.3 O campo elétrico de criação do dipolo

O campo elétrico,  $\vec{E}$ , é obtido de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7)$$

Para o gradiente encontramos

## 2.4 O proto-potencial vetor

Definimos o proto-potencial vetor como aquele que gera tanto o campo elétrico como o magnético. Como  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  em todo o espaço, excluindo a singularidade, um novo  $\vec{A}_p(\vec{x}, t)$ , com  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_p = 0$ , pode ser definido tal que

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_p}{\partial t} = \vec{E} \quad (11)$$

ou seja,

$$\vec{A}_p(\vec{x}, t) = - \int_{-\infty}^t \vec{E}(\vec{x}, t') dt' \quad (12)$$

Pela Eq. (9) obtém-se

$$\vec{A}_p = ct\Theta(t - r/c) \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}}{r^2} - \delta(t - r/c) \frac{\vec{k}_1}{cr} \quad (13)$$

É interessante que o proto-potencial vetor guarda memória do tempo de criação do dipolo e não do tempo em que o sinal o alcançou. Poder-se-ia dar algum sentido físico a isto? Não sabemos. Notemos também 1) que o rotacional de  $\vec{A}_p$  é igual ao rotacional de  $\vec{A}$ , Eq. 4, gerando portanto o mesmo campo magnético e 2) que se usarmos a Eq. 13 como ponte para se obter o (super) vetor potencial de uma distribuição de correntes no espaço e no tempo, as suas singularidades, ligadas à densidade de corrente e carga instantaneas, devem adicionadas.

### 3. Os potenciais de uma carga em movimento

Seja  $\vec{x}_1 = \vec{x}_1(t_1)$  a equação de movimento de uma carga  $q$ , contada de uma origem  $O$  (ver Figura 2). A ação emitida por  $q$  no tempo genérico  $t_2$  atingirá o ponto  $\vec{x}$  no tempo  $t$  tal que

$$t = t_2 + r(t_2)/c \quad (14)$$

em que  $r(t_2)$  é igual a  $|\vec{x} - \vec{x}_1(t_2)|$ .

O movimento da carga pode ser visto como a contínua criação de dipolos elementares, de momento  $d\vec{p}(t_2)$ , no tempo  $t_2$ ,

$$d\vec{p}(t_2) = q d\vec{x}_1(t_2) = q\vec{v}(t_2) dt_2 \quad (15)$$

sendo  $\vec{v}$  a velocidade de  $q$ .

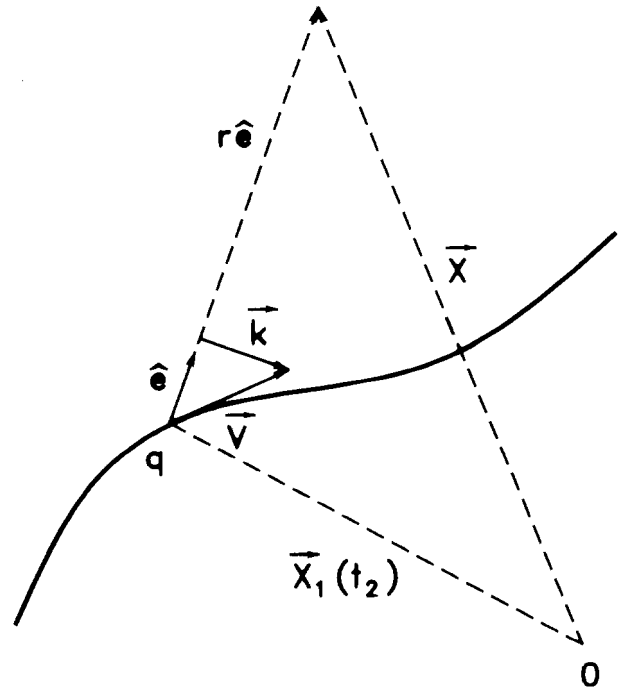


Figura 2. No instante genérico  $t_2$  a carga  $q$ , situada em  $\vec{x}_1$  com velocidade  $\vec{v}$ , cria o dipolo  $\vec{v} dt_2 \cdot \hat{e}$  e  $\hat{e}$  é o versor de  $\vec{x} - \vec{x}_1$  e  $r$  o módulo deste.  $\vec{k}$  é o vetor componente de  $\vec{v}$  na direção normal a  $\hat{e}$ .

#### 3.1 O potencial vetor de uma carga em movimento

Vamos adaptar a Eq.3 ao problema presente. Em vez de  $t - r/c$  devemos por  $\bar{t}$ , abaixo definido, já que o tempo de emissão é  $t_2$  e não zero:

$$\bar{t} = t - t_2 - r(t_2)/c \quad (16)$$

para o potencial vetor no ponto  $\vec{x}$  e no instante  $t$ , diretamente da Eq.3,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\vec{v}(t_2)\delta(\bar{t})}{r(t_2)} dt_2 \quad (17)$$

Relembremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{t}(t_2)) f(t_2) dt_2 = \frac{f(t_{20})}{|df/dt_{20}|} \quad (18)$$

onde  $t_{20}$  é a raiz da equação  $\bar{t} - (t_2) = 0$  e  $f$  uma função regular. Da Eq. 13 e lembrando que  $t$  deve ser mantido constante

$$d\bar{t} = -dt_2 - (dr/c dt_2) dt_2 \quad (19)$$

Mas

$$r = \sqrt{(x - x_1(t_2))^2 + \dots} \quad (20)$$

e com o índice  $r$  indicando grandezas retardadas,

$$dr/dt_2 = -\vec{v}(t_2) \cdot \hat{e}_r(t_2) \quad (21)$$

e então

$$d\bar{t} = -dt_2 \left( 1 - \frac{\vec{v}(t_2) \cdot \hat{e}_r(t_2)}{c} \right) \quad (22)$$

Agora, a raiz de  $\bar{t} - (t_2) = 0$  dá o tempo retardado  $t_r$ , correspondente a  $t$  e  $\vec{x}$  e finalmente

$$\vec{A} = \frac{q\vec{v}_r}{c(1 - \vec{v}_r \cdot \hat{e}_r/c)r_r}. \quad (23)$$

### 3.2 O potencial escalar de uma carga em movimento

A Eq.6 gera dois termos

$$\Phi = q \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(\bar{t})d\vec{x}_2 \cdot \hat{e}(t_2)}{r^2(t_2)} + \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \frac{r\delta(\bar{t})}{c} \right] \quad (24)$$

O primeiro,  $\Phi_1$  com a função degrau, integra as ações progressas do tipo dipolo ao longo de sua trajetória. Como resultado, dará o potencial da carga  $q$  na posição retardada, ou seja,

$$\Phi_1 = \frac{q}{r_r} \quad (25)$$

Usando agora as Eq.18-22 na integral com a  $\delta(\bar{t})$ , temos para  $\Phi_2$

$$\Phi_2 = \frac{q\vec{v}_r \cdot \hat{e}_r}{\left(1 - \frac{\vec{v}_r \cdot \hat{e}_r}{c}\right) r_r} \quad (26)$$

A soma de  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  dá o potencial retardado conhecido

$$\Phi = \frac{q}{Kr_r} \quad (27)$$

com  $K = 1 - \vec{v}_r \cdot \hat{e}_r/c$  de agora em diante.

## 4. O campo elétrico de Feynman

No Cap.28 do livro I de suas *Lectures* [1], Feynman dá a seguinte expressão para o campo elétrico de uma carga em movimento, sem demonstrá-la:

$$\vec{E} = q \left[ \frac{\hat{e}_r}{r_r^2} + \frac{r_r}{c} \frac{d}{dt} \frac{\hat{e}_r}{r_r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \hat{e}_r \right] \quad (28)$$

na nossa notação. Na verdade, ele emprega o versor  $-\hat{e}_r$ , da direção com que o ponto de observação vê a posição retardada de  $q$ , permitindo interpretação mais

sugestiva da fórmula. Na Eq.28, as derivadas temporais são feitas em relação ao tempo atual, e não em relação ao tempo retardado.

Os termos em  $\Theta$ ,  $\delta$  e  $\dot{\delta}$  da Eq.9 o gerarão os três termos da Eq.28. O primeiro deles, com a função  $\Theta$ , dará o campo retardado, exatamente como fornecido pelo primeiro termo da Eq.24, no cálculo do potencial escalar. Passemos ao o termo em  $\delta$  na Eq.9.

### 4.1 Cálculo do termo em delta

Seguindo as Eq.14-16 e 19-22, e integrando-se no tempo  $t_2$ , temos  $\vec{E}_2$  dado por

$$\vec{E}_2 = -\frac{q}{K} \frac{r_r}{c} \vec{\nabla} \frac{\vec{v} \cdot \hat{e}_r}{r_r^2} \quad (29)$$

lembrando que o gradiente é tomado em relação a  $\vec{x}$ , ponto de observação. Mas por identidade vetorial com  $\vec{v}$  constante e  $\hat{e}_r/r_r^2$  irrotacional, tem-se

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{v}_r \cdot \hat{e}_r}{r_r^2} = (\vec{v}_r \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{e}_r}{r_r} \quad (30)$$

e tomando eixos coordenados com o eixo  $x$  apontando na direção de  $\vec{v}_r$ , temos

$$(\vec{v}_r \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{e}_r}{r_r^2} = \frac{dx_r}{dt_r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\hat{e}_r}{r_r^2} \quad (31)$$

e como  $\partial/\partial x = -\partial/\partial x_r$  e então da Eq.31 segue

$$(\vec{v}_r \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{e}_r}{r_r^2} = -\frac{d}{dt_r} \frac{\hat{e}_r}{r_r^2} \quad (32)$$

Mas, pelas Eqs 14 e 21

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 - \frac{\vec{v}_r \cdot \hat{e}_r}{c} = K \quad (33)$$

e sendo

$$\frac{d}{dt_r} = \frac{dt}{dt_r} \frac{d}{dt} \quad (34)$$

chega-se finalmente ao segundo termo da Eq.28.

### 4.2 Cálculo do termo em delta ponto

Seguindo os mesmos passos, temos para essa componente do campo,  $\vec{E}_3$ ,

$$\vec{E}_3 = -\frac{q}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(\bar{t}) \frac{\vec{k}(t_2)}{r(t_2)} dt_2 \quad (35)$$

em que o vetor  $\vec{k}$  representa o vetor  $\vec{k}_1$ , Eq.10, com  $\vec{p}$  indo em  $\vec{v}$  (Fig.2). Antes de integrarmos por partes

para se obter a delta devemos atualizar a derivada para a variável  $t_2$  pondo

$$\dot{\delta}(\bar{t}) = \frac{dt_2}{dt} \delta(t_2) \quad (36)$$

usando-se o resultado na Eq.19 e integrando em  $dt_2$ , tem-se

$$\vec{E}_3 = -\frac{q}{K(t_r)c^2} \frac{d}{dt_r} \frac{\vec{k}(t_r)}{K(t_r)r_r(t_r)} \quad (37)$$

Vamos mostrar que esta expressão reproduz o terceiro termo da Eq.28. Mudemos a derivada em relação a  $t_r$ , em derivada em relação a  $t$  com o auxílio da Eq.33. Temos então que provar a igualdade

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{k}_r}{K_r r_r} = -\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \hat{e}_r \quad (38)$$

ou que

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\frac{\vec{k}_r}{K_r r_r} \quad (39)$$

Mudando a derivação para a variável  $t_r$  usando a Eq.33, vem

$$\frac{\vec{k}_r}{r_r} = \frac{d\hat{e}_r}{dt_r} \quad (40)$$

relação que segue diretamente da definição de  $\hat{e}_r$ . Adicionado nas provas: na [4] apresenta-se dedução alternativa do campo de Feynman, Eq.28.

## 5. Conclusões

Usualmente pensamos que só a Mecânica Quântica tem seus mistérios de interpretação. Mas o próprio Eletromagnetismo os tem. Vejamos: a definição de suas grandezas fundamentais, os campos, se faz com o auxílio de uma carga imaginada em cada ponto do espaço, com uma dada velocidade, e da força que a solicitaria. Enquanto isto pode ser considerado perfeito do ponto de vista matemático, do ponto de vista físico, a primeira vista, é insatisfatório. Feynman diz que como há força quando a carga está ali, alguma coisa fica quando ela é retirada [3]. Pode ser que não haja outra saída. A própria ambiguidade de prevalência entre os campos (de força) e os potenciais, os últimos se

expressando de forma inteligível pelos potenciais retardados e os primeiros com a potencialidade de exercer força (os campos de força são neste sentido também potenciais) é embaraçosa. Neste trabalho chegamos ao proto-vetor potencial do qual podemos extrair os campos elétrico e magnético do elemento de corrente e daí, por superposição, aqueles de uma distribuição no tempo e no espaço (sem outras discussões se o ponto é exterior). Mas acontece que ele é apenas um potencial.

Acreditamos que num ensino de Física menos formal estas dificuldades deveriam ser expostas com clareza, o que talvez viesse a trazer, no futuro, alguma luz ao assunto. Tudo isto sem prejuízo do ensino da teoria com a mesma tecnicidade com que se faz o da Mecânica Quântica.

Finalmente, o longo caminho percorrido na Seção 4 deste para a identificação dos termos da fórmula de Feynman nos mostra como foi ele engenhoso na obtenção deles.

## Agradecimentos

O autor agradece bolsa de pesquisador concedida pelo CNPq.

## Referências

1. R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands *The Feynman Lectures*, Addison-Wesley, Reading (1966) Vol.I, Cap. 28.
2. E.V. Bohn *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*, Addison-Wesley, Reading (1968) Cap.II.
3. R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands *The Feynman Lectures*, Addison-Wesley, Reading (1966) Vol. II, Seção 1-2.
4. A.R. Janah, T. Padmanabhan e T.P. Singh, *Am.J.Phys.* **56**, 1036 (1988).