O Movimento Browniano e as Curvas sem Tangente

(The Brownian movement and the curves without tangent)

Luis Fernando de Osório Mello
Rua Jaime Wood 321, Avenida, Itajubá, MG, Cep 37500-000, fone: (035) 623-1530
Fax: (035) 629-1140, correio eletrônico: lfmelo@ime.usp.br
Departamento de Matemática e Computação, Instituto de Ciências,
Escola Federal de Engenharia de Itajubá,
EFEI, 37500-000, Itajubá, MG, Brasil

Trabalho recebido em 3 de abril de 1997

Nesta nota de divulgação exibimos um exemplo de função que é contínua em toda a reta real mas que não possui derivada em ponto algum de seu domínio. Seu gráfico é, portanto, uma curva contínua sem tangente. Tais objetos modelam matematicamente o importante movimento browniano.

In this paper we show an example of a function that is continous in R, but does not have derivatives at any point. Its graph is thus a continous curve without tangent. The Brownian movement can be modeled using these functions.

1. Introdução [1]

As funções usualmente utilizadas no cálculo elementar são *deriváveis* a menos de alguns pontos excepcionais, que, de um modo geral, são isolados. Por exemplo, a função $f : R \to R$, onde $f(x) = |x|$, é derivável em toda a reta exceto no ponto $x = 0$.

É concebível pensar que se uma função é *contínua*, os pontos onde ela não é derivável formam um "conjunto insignificante". É difícil de imaginar uma função que seja contínua e que não tenha derivada em ponto algum de seu domínio. Ou seja, funções contínuas cujos gráficos não têm tangente em ponto algum.

A idéia de *curva contínua sem tangente*, por exemplo, uma curva constituída só de "pontos angulosos", não condiz bem com a nossa intuição geométrica e seria de se esperar que um tal objeto, na hipótese de sua existência, não passasse de um ente que vive apenas nas cabeças dos matemáticos, sem utilidade no mundo físico. Duplo engano nosso. Tais objetos, as *funções contínuas que não têm derivada em ponto algum*, não apenas existem como há um tipo importante de movimento, denominado *movimento browniano*, cuja trajetória é modelada matematicamente por uma curva contínua sem tangente.

Em 1827, o botânico inglês Robert Brown (1773-1858), investigando o processo de fertilização de uma certa flor, notou, ao microscópio, que os grãos de pólen em suspensão na água apresentavam um rápido movimento desordenado [4]. Em 1905, Albert Einstein (1879-1955), escreveu um trabalho decisivo sobre o movimento browniano. Finalmente, na década de 20, o matemático americano Norbert Wiener (1894-1964) iniciou uma teoria matemática do movimento browniano. Wiener deu uma interpretação precisa à idéia de "movimento ao acaso" de uma partícula. Ele demonstrou, no contexto de seu modelo matemático, que a trajetória efetiva da partícula é uma curva contínua, porém, sem tangente em ponto algum. Fisicamente, o que se passa é que a partícula está, a cada instante, recebendo o impacto desordenado das moléculas do fluído, de tal modo que, em seu movimento, ela muda constantemente de direção, não possuindo, portanto, velocidade instantânea definida em ponto algum.

O primeiro exemplo de função contínua sem derivada apareceu em 1834, dado por Bernhard Bolzano (1781-1849). Em 1861, Riemann (1826-1866) apresentou o seu exemplo de uma função contínua que não tem derivada em ponto algum. Em 1872, Weierstrass (1815-1897) e, em 1930, Van der Waerden (1903-) deram mais exemplos destes objetos [2].

A seguir exibimos um exemplo de tais funções devido a Weierstrass. Para dar suporte a este exemplo vamos rever, de modo informal, os principais conceitos envolvidos, tais como continuidade, derivação, seqüências e séries de funções.

2. Conceitos básicos [3]

Faremos aqui uma breve recordação dos conceitos e resultados utilizados. O primeiro e mais familiar deles é a continuidade de uma função. Intuitivamente uma função $f : I \subset R \rightarrow R$, onde I é um intervalo da reta real R, é contínua no ponto $a \in I$ quando for possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a. Dizemos que f é contínua quando for contínua em todos os pontos de I.

Um outro conceito que precisamos aqui é o conceito de derivação. Seja $f : I \rightarrow R$, onde I é um intervalo aberto de R. Dizemos que f é derivável no ponto $a \in I$ quando o limite abaixo existir,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \ x \in I, \ x \neq a.$$

Equivalentemente, f é derivável em a, quando existir o limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $a + h \in I$.

É bem sabido que se uma função é derivável num ponto então ela é contínua neste ponto. Antes de passarmos ao nosso exemplo é bom darmos uma olhada nas seqüências e séries de funções. Um dos conceitos que precisamos é o de convergência, e em especial o de convergência uniforme de uma seqüência de funções.

Dizemos que uma seqüência de funções $f_n : I \rightarrow R$ converge uniformemente para uma função $f : I \rightarrow R$ quando para todo $\epsilon > 0$, existir $n_\epsilon \in N$ tal que se $n > n_\epsilon$ então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in I$. Em outras palavras, o gráfico de f_n está contido na faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f, para $n > n_\epsilon$. Por definição uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente se, e somente se, a seqüência das somas parciais é uniformemente convergente em I. Dizemos que a série de funções $\sum f_n$ é normalmente convergente quando existir uma seqüência de números reais $(a_n)_{n \in N}$ com $a_n \geq 0$, $\forall n \in N$, tal que $\sum a_n$ é convergente e $|f_n(x)| = a_n$, $\forall n \in N$ e $\forall x \in I$. Por exemplo a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$, $x \in R$, é normalmente convergente.

Um importante resultado acerca destes objetos é o conhecido teste de Weierstrass, que diz que se uma série de funções é normalmente convergente então ela é uniformemente convergente. No mesmo patamar de importância temos o seguinte resultado. Se uma seqüência de funções contínuas converge uniformemente então a função limite é contínua. Como corolário segue que se uma série de funções converge uniformemente e se cada uma das funções desta série é contínua então a função limite também o é.

3. Exemplo de função contínua sem derivada (Weierstrass) [5]

Seja a função $f : R \rightarrow R$, que veremos estar bem definida, dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \ , \tag{3.1}$$

onde $0 < b < 1$ e a é um inteiro positivo ímpar, com a condição de que

$$ab > 1 + 3\pi/2 \ . \tag{3.2}$$

Assim, o que temos, na verdade, é uma família de funções, uma para cada a e b tomados. Por exemplo,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(15^n \pi x).$$

Tomemos, para cada $n \in N = \{0, 1, 2, ...\}$, a função $f_n : R \rightarrow R$, dada por

$$f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x). \tag{3.3}$$

É imediato que para cada $n \in N, f_n$, é contínua para todo $x \in R$. Agora,

$$|b^n \cos(a^n \pi x)| = |b^n||\cos(a^n \pi x)| \leq b^n \ . \tag{3.4}$$

Como a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ é convergente, $0 < b < 1$, segue pelo teste de Weierstrass que a função dada em (3.1) está bem definida e é contínua em todo $x \in R$.

Mostremos agora que f não é derivável em ponto algum da reta real. Para tanto tomemos $x \in R$, arbitrário e fixo. Mostremos então que f não é derivável em x.

Temos que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos[a^n\pi(x+h)]-\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos[a^n\pi x]}{h}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}}{h}=$$
$$=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}}{h}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}}{h}\ .$$

Definindo

$$S_m=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}}{h}$$

e

$$R_m=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}}{h},$$

temos,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=S_m+R_m. \tag{3.5}$$

Do teorema do valor médio para derivadas, vem

$$\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]=-a^n\pi h\mathrm{sen}[a^n\pi(x+\theta h)]. \tag{3.6}$$

Assim,

$$|\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]|=|a^n\pi h\mathrm{sen}[a^n\pi(x+\theta h)]|=|a^n\pi h||\mathrm{sen}[a^n\pi(x+\theta h)]|\le a^n\pi|h|, \tag{3.7}$$

de modo que

$$|S_m|=\Big|\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}}{h}\Big|\le$$
$$\le\sum_{n=0}^{m-1}\Big|\frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}}{h}\Big|=\sum_{n=0}^{m-1}b_n\frac{|\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]\}|}{|h|}\le$$
$$\le\sum_{n=0}^{m-1}b^n\frac{a^n\pi|h|}{|h|}=\pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n=$$
$$=\pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1}<\pi\frac{(ab)^m}{ab-1},$$

ou seja,

$$|S_m|<\pi\frac{(ab)^m}{ab-1}\ . \tag{3.8}$$

Por outro lado, dando a h um valor particular podemos obter um limite inferior para R_m. Escrevamos,

$$a^m x=\alpha_m+\epsilon_m, \tag{3.9}$$

onde α_m é um inteiro e $-1/2\le\epsilon_m<1/2$ (qualquer número real pode ser escrito como um inteiro mais uma parcela $\epsilon_m\in[-1/2,1/2)$).

Tomemos ainda

$$h=\frac{1-\epsilon_m}{a^m}\ , \tag{3.10}$$

donde,

$$0<h<\frac{3}{2a^m}\quad\mathrm{e}\quad\frac{1}{h}>\frac{2}{3}a^m\ . \tag{3.11}$$

Assim

$$\begin{aligned} a^n\pi(x+h) &= a^{n-m}a^m\pi(x+h) = a^{n-m}\pi(a^m x + a^m h) = \\ &= a^{n-m}\pi(\alpha_m + \epsilon_m + 1 - \epsilon_m) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Uma vez que a é ímpar, temos de (3.12),

$$\cos[a^n\pi(x+h)] = \cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m+1)] = (-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)}.$$

Mas, como a é ímpar, então, a^{n-m} também será ímpar, donde podemos escrever

$$(-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)} = (-1)^{\alpha_m+1},$$

e assim

$$\cos[a^n\pi(x+h)] = (-1)^{\alpha_m+1}. \tag{3.13}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \cos[a^n\pi x] &= \cos[a^{n-m}\pi a^m x] = \cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m+\epsilon_m)] = \\ &= \cos[a^{n-m}\pi\alpha_m + a^{n-m}\pi\epsilon_m] = \\ &= \cos[a^{n-m}\pi\alpha_m]\cos[a^{n-m}\pi\epsilon_m] - \operatorname{sen}[a^{n-m}\pi\alpha_m]\operatorname{sen}[a^{n-m}\pi\epsilon_m] = \\ &= \cos[a^{n-m}\pi\alpha_m]\cos[a^{n-m}\pi\epsilon_m] = (-1)^{\alpha_m}\cos[a^{n-m}\pi\epsilon_m]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\cos[a^n\pi x] = (-1)^{\alpha_m}\cos[a^{n-m}\pi\epsilon_m]. \tag{3.14}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n\{\cos[a^n\pi(x+h)] - \cos[a^n\pi x]\}}{h} = \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n}{h}[(-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\epsilon_m)] = \\ &= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n[1+\cos(a^{n-m}\pi\epsilon_m)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Como todos os termos da série em (3.15) são não negativos, temos

$$|R_m| = \frac{1}{|h|}\left|\sum_{n=m}^{\infty} b^m[1+\cos(a^{n-m}\pi\epsilon_m)]\right| > \frac{b^m}{|h|}. \tag{3.16}$$

De (3.5) e (3.16) decorre que

$$|R_m| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}(ab)^m. \tag{3.17}$$

De (3.5), (3.8) e (3.17) obtemos

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = |S_m + R_m| \geq |R_m| - |S_m| > \left(\frac{2}{3}(ab)^m\right) - \left(\pi\frac{(ab)^m}{ab-1}\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^m.$$

Ou seja,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)a^m b^m. \tag{3.18}$$

De (3.2) decorre que o fator entre parênteses em (3.18) é positivo e de (3.10) temos que quando $m \to \infty$, $h \to 0$ e vice versa. Assim,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(ab)^m = \infty.$$

Uma vez que $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$ toma valores arbitrariamente grandes, não existe a derivada de f no ponto x tomado. Como x é arbitrário concluimos que f não é derivável em ponto algum.

4. Conclusão

O exemplo acima foi construido por Weierstrass, em 1872, que o apresentou à Academia de Berlim. Hoje em dia conhecemos vários outros exemplos de tais funções, embora suas construções apresentem sutilezas. No entanto, o que pode parecer mais surpreendente ainda, é o fato das funções contínuas que não possuem derivada em ponto algum se constituirem na "maioria" das funções contínuas. Um outro aspecto que poderia ser abordado refere-se ao fato de que se a continuidade não é suficiente para garantir a derivação, que hipótese simples poderíamos tomar para garantir sua existência? A resposta a esta pergunta é a monotonicidade da função, mas isto é uma outra conversa.

Referência bibliográfica

1. G. Ávila, *Cálculo I, Funções de uma Variável*, L.T.C., (1981).
2. C. B. Boyer, *História da Matemática,* Ed. Edgard Blücher Ltda, 408, (1974).
3. E. L. Lima, *Curso de Análise,* vol 1, Coleção Projeto Euclides, IMPA, (1976).
4. H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol 2, Ed. Edgard Blücher Ltda, (1983).
5. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, (1939).
6. B. L. Van der Waerden, Math. Zeitschrift, 32, (1930).
7. N. Wiener, J. Math. Phys., **2,** 131-174 (1923).