# O Método das Imagens e as Funções de Green

(The image method and the Green functions)

J.A. Baêta Segundo

*Departamento de Matemática e Computação*

*Escola Federal de Engenharia de Itajubá*

*Caixa Postal 50, 37500-000 Itajubá, MG*

Trabalho recebido em 10 de fevereiro de 1997

São muitas as situações físicas nas quais as equações de Poisson e de Laplace desempenham um relevante papel. Neste trabalho consideramos alguns aspectos destas equações associados à situação física do campo eletrostático; mais especificamente, abordamos o tema dos problemas de contorno dos tipos de Dirichlet e de Neumann pelos métodos da função de Green e das imagens, no sentido de tornar transparente o vínculo entre os referidos métodos.

There are many situations where the Poisson and Laplace's equations are relevants. In this work we consider some aspects of these equations in relation with the electrostatic field; more specically we treat the Diriclet and Neumann boundary value problems by the Green function and the image methods to show their relationsphip.

## 1. As equações de Poisson e de Laplace

O campo eletrostático, isto é, o campo elétrico $\vec{E}$ produzido por uma distribuição de cargas elétricas estacionárias com relação a um referencial inercial $\mathcal{S}$ e com densidade $\rho$, satisfaz em $\mathcal{S}$ às seguintes equações diferenciais derivadas da lei empírica de Coulomb:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad \text{(no vácuo)} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = \vec{O} \ , \tag{1.2}$$

onde $\vec{x} \in \mathcal{R}^3$ e $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}(F/m)$ é a permissividade do vácuo.

Da Análise Vetorial temos o seguinte importante teorema [2,3].

**TEOREMA DE HELMHOLTZ** - *Um campo vetorial $\vec{V}(\vec{x})$ fica definido univocamente se os valores de seu divergente e de seu rotacional forem conhecidos em todos os pontos do espaço ($\mathcal{R}^3$), desde que estes valores sejam não nulos apenas numa região $\Delta V' \subset \mathcal{R}^3$ finita. Nestas condições, se*

$$\nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}) = S(\vec{x}) \quad e \quad \nabla \times \vec{V}(\vec{x}) = \vec{C}(\vec{x}) \ ,$$

*então*

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{x})$$

*sendo*

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Delta V'} \frac{S(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} d^3x'$$

e

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Delta V'} \frac{\vec{C}(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} d^3x' \quad .\blacksquare$$

A aplicação desse teorema à situação eletrostática conduz à seguinte conclusão:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\phi(\vec{x}) \tag{1.3}$$

onde

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Delta V'} \frac{\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} d^3x' \ . \tag{1.4}$$

À função escalar $\phi(\vec{x})$ chamamos de *potencial eletrostático.*

Na maioria das situações físicas de interesse não é conhecida a distribuição de cargas $\rho(\vec{x})$ em *todo* o espaço, que impede a determinação do campo $\vec{E}$ através da expressão de $\phi$ como dada em (1.4). Em muitas situações conhece-se a distribuição de cargas apenas numa determinada região do espaço, além de certas condições nas fronteiras desta região (condições de contorno). Do ponto de vista físico é bastante claro que, em tais circunstâncias, o problema de determinação do potencial eletrostático (e consequentemente do campo $\vec{E} = -\nabla\phi$)) da região só terá solução (única) se as condições de contorno possuirem, de alguma forma, informações sobre a distribuição de cargas da região exterior, suficientes a determinação de seus efeitos na região de interesse (ou interior).

As considerações acima apontam para a conveniência de obtenção de uma equação diferencial para o potencial $\phi$ e de condições de contorno tais que o problema de contorno constituído pelas referidas equação diferencial e condições de contorno, tenha solução única.

Substituindo-se (1.3) em (1.1) resulta que o potencial eletrostático $\phi$, em qualquer região, satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi(\vec{x}) = -\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \qquad (1.5)$$

denominada equação de Poisson. Assim, em regiões isentas de carga, $\phi$ é tal que

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = 0 \ . \qquad (1.6)$$

A equação (1.6) é conhecida como equação de Laplace.

Quanto ao problema mais delicado das condições de contorno, isto é, do estudo de critérios a serem obedecidos pelas condições de contorno a fim de possibilitarem uma e só uma solução da equação de Poisson ou de Laplace, iremos nos restringir a apresentação de um teorema de unicidade para problemas de contorno envolvendo as referidas equações e condições do tipo de Dirichlet ou de Neumann a seguir caracterizadas: seja $V$ uma região de $\mathcal{R}^3$ delimitada por uma superfície de contorno $S$ que pode estar toda, ou apenas em parte, no infinito. Diremos ter uma condição de Dirichlet quando o potencial $\phi(\vec{x})$ for especificado em todo $\vec{x} \in \mathcal{S}$ e teremos uma condição de Neumann quando a derivada normal de $\phi(\vec{x})$ for conhecida para todo $\vec{x} \in \mathcal{S}$.

**TEOREMA DA UNICIDADE [1]** - *É única a função $\phi(\vec{x})$, com $\vec{x} \in V$, que satisfaz a equação de Poisson (Laplace) e as condições de Dirichlet ou de Neumann.* ■

No caso da condição de Neumann a unicidade se dá a menos de uma constante aditiva.

## 2. Funções de Green [1,3]

O teorema da divergência de Gauss [1] estabelece, para um campo vetorial $\vec{A}$, que:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} d^3x = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS \ .$$

Fazendo-se

$$\vec{A} = \varphi\nabla\psi \ ,$$

onde $\varphi$ e $\psi$ são campos escalares, temos que:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi$$

e o teorema da divergência assume a forma

$$\int_V [\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi] d^3x = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} dS \ ,$$

conhecida como a primeira identidade de Green. Trocando-se $\varphi$ por $\psi$ e $\psi$ por $\varphi$ na primeira identidade de Green e subtraindo a expressão assim obtida da expressão acima, temos:

$$\int_V [\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi] d^3x = \oint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS \ , \qquad (2.1)$$

denominada a segunda identidade de Green, que pode ser usada para se obter uma equação integral para o potencial $\phi$. Para tal façamos em (2.1) $\varphi = \phi(\vec{x}\,')$ e $\psi = 1/|\vec{x} - \vec{x}\,'|$, sendo $\vec{x}$ o vetor do ponto de observação e $\vec{x}\,'$ a variável de integração. Teremos, após considerar a identidade [1]

$$\nabla'^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} = \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') \ , \qquad (2.2)$$

que:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} d^3x\,' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\phi(\vec{x}\,')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}\right) - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}\frac{\partial\phi(\vec{x}\,')}{\partial n'}\right] dS \ . \qquad (2.3)$$

Observemos que a expressão acima nos dá o potencial $\phi(\vec{x})$, para cada $\vec{x} \in V$, desde que conheçamos a distribuição de cargas $\rho(\vec{x})$ em toda a região $V$, além do potencial $\phi$ e sua derivada normal, ambos sobre o contorno $S$ de $V$. Desta forma poderia parecer que a referida expressão é a solução para os problemas de Dirichlet e de Neumann. De fato não o é, pois se especificarmos o potencial $\phi(\vec{x} \in S)$, então, pelo teorema de unicidade, $\phi(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$ estará determinado univocamente, com o que podemos determinar $\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\vec{x}\in S}$. Vemos assim que a especificação arbitrária e independente para $\phi(\vec{x} \in S)$ e $\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\vec{x}\in S}$ não pode ser feita, e portanto a última expressão, longe de conduzir às soluções para os problemas de contorno considerados, é apenas uma relação integral à qual devem satisfazer.

Por outro lado a maneira segundo a qual obtivemos a relação integral (2.3), sugere um procedimento para a determinação da solução formal dos problemas de contorno em apreço. De fato, se estivéssemos a resolver o problema de Dirichlet (resp. Neumann), a solução seria obtida se a relação integral (2.3) não contivesse o termo da integral de superfície envolvendo $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ (resp. $\phi$). Ora, isto talvez possa ser conseguido fazendo-se na segunda identidade de Green, nosso ponto de partida para a obtenção da relação integral (2.3), $\varphi = \phi$ e $\psi = G(\vec{x}, \vec{x}\,')$, sendo $G(\vec{x}, x\,')$ um campo escalar que, a exemplo de $1/|\vec{x} - \vec{x}\,'|$ que desempenhou o papel de $\psi$ na derivação de (2.3), satisfaça a equação

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}\,') = \nabla'^2 G(\vec{x}, \vec{x}\,') = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}\,')}{\epsilon_0} \ . \qquad (2.4)$$

Assim procedendo resulta para todo $\vec{x} \in V$:

$$\phi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}\,')\rho(\vec{x}\,')d^3x\,' + \epsilon_0 \oint_S \left[G(\vec{x}, \vec{x}\,')\frac{\partial\phi(\vec{x}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{x}\,')\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}\,')}{\partial n'}\right] dS \ . \qquad (2.5)$$

Ora, como $G(\vec{x}, \vec{x}\,')$ é uma solução de (2.4), então devemos ter

$$G(\vec{x}, \vec{x}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} + F(\vec{x}, \vec{x}\,') \qquad (2.6)$$

onde $F(\vec{x}, \vec{x}\,')$ é uma solução da equação de Laplace na região $V$, isto é,

$$\nabla^2 F(\vec{x}, \vec{x}\,') = 0 \qquad \forall\ \vec{x} \in V \ .$$

A classe de funções $G(\vec{x}, \vec{x}\,')$ definida por (2.4) ou, equivalentemente, por (2.6) é a classe das funções de Green do operador $\nabla^2$.

Tendo agora um alto grau de liberdade, via função $F(\vec{x}, \vec{x}\,')$, na escolha da função de Green, podemos, da expressão (2.5), obter a solução formal para os dois problemas de contorno abordados neste trabalho. De fato, para obter a solução do problema de Dirichlet escolhemos $G(\vec{x}, \vec{x}\,') \equiv G_D(\vec{x}, \vec{x}\,')$, de tal forma que

$$\nabla^2 G_D(\vec{x}, \vec{x}\,') = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}\,')}{\epsilon_0} \qquad (2.7)$$

e

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}\,') = 0 \quad \forall\ \vec{x} \in S \ . \qquad (2.8)$$

Com esta escolha, que pode ser feita visto que (2.7) e (2.8) constituem-se num problema de Dirichlet para o qual a solução existe e é única, (2.5) assume a forma:

$$\phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x}, \vec{x}\,')\rho(\vec{x}\,')d^3x\,' - \epsilon_0 \oint_S \phi(x\,')\frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}\,')}{\partial n'} dS \ . \qquad (2.9)$$

que é a solução formal do problema de Dirichlet.

Para a determinação da solução formal do problema de Neumann, inclinamo-nos para a escolha $G(\vec{x}, x\,') \equiv G_N(\vec{x}, x\,')$ tal que

$$\nabla^2 G_N(\vec{x}, x\,') = -\frac{\delta(\vec{x} - x\,')}{\epsilon_0}$$

e

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'} = 0 \quad \forall \ \vec{x}\,' \in S \ .$$

No entanto estas condições são inconsistentes, pois

$$\oint_S \frac{\partial G_N}{\partial n\,'} dS = \oint_S (\nabla' G_N) \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla\,'^2 G_N d^3x\,' =$$

$$-\frac{1}{\epsilon_0}\int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}\,')d^3x\,' = -\frac{1}{\epsilon_0} \quad \forall \ \vec{x} \in V$$

e não zero como deveria ser se $\left.\frac{\partial G_N}{\partial n'}\right|_{\vec{x}\,' \in S} = 0$.

Considerando o resultado acima obtido para a integral de $\frac{\partial G_N}{\partial n'}$ em $S$, vamos escolher $G_N(\vec{x}, \vec{x}\,')$ de tal forma que

$$\nabla^2 G_N(\vec{x}, \vec{x}\,') = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}\,')}{\epsilon_0} \tag{2.10}$$

e

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'} = -\frac{1}{\epsilon_0 S} \quad \forall \ \vec{x}' \in S \ . \tag{2.11}$$

Com esta escolha, que também garante a existência e unicidade de $G_N(\vec{x}, \vec{x}\,')$, (2.5) implica:

$$\phi(\vec{x}) = \int_V G_N(\vec{x}, \vec{x}\,')\rho(\vec{x}\,')d^3x\,' + \epsilon_0 \oint_S G_N(\vec{x}, \vec{x}\,')\frac{\partial\phi(\vec{x}\,')}{\partial n'}dS + <\phi>_S \ , \tag{2.12}$$

onde $<\phi>_S$ é o valor médio de $\phi$ sobre $S$. A expressão acima é então a solução formal do problema de Neumann.

Notemos que a função de Green para o problema de Dirichlet é a solução do problema de contorno constituído pela equação de Poisson com $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}\,')$ (densidade devida a uma carga puntiforme e unitária situada em $\vec{x}\,' \in V$), isto é

$$\nabla^2 G_D = -\delta(\vec{x} - \vec{x}\,')/\epsilon_0 \qquad \forall \ \vec{x} \in V$$

e pela condição de contorno homogênea

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}\,') = 0 \qquad \forall \ \vec{x}\,' \in S \ .$$

Assim sendo $G_D(\vec{x}, \vec{x}\,')$ admite a seguinte interpretação: o potencial eletrostático nos pontos $\vec{x}$ da região $V$ na qual existe uma única carga puntiforme e unitária situada em $\vec{x}\,'$ e em cuja fronteira $S$ o potencial é nulo. Esta interpretação e o fato de (vide (2.6))

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} + F(\vec{x}, \vec{x}\,')$$

onde

$$\nabla^2 F(\vec{x}, \vec{x}\,') = 0 \quad \forall \ \vec{x} \in V \ ,$$

permite-nos interpretar a função $F(\vec{x}, \vec{x}\,')$. Ora, como $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}$ é o potencial em $\vec{x}$ produzido por uma carga puntiforme e unitária situada em $\vec{x}\,'$, então, $F(\vec{x}, \vec{x}\,')$ pode ser pensado como o potencial em $\vec{x} \in V$ devido a uma distribuição de cargas externas a $V$ (pois $\nabla^2 F = 0$ em $V$) escolhida de tal forma a anular em $S$ o potencial da carga puntiforme situada em $\vec{x}\,' \in V$.

Como última observação deste item, notemos que as funções de Green satisfazem condições de contorno simples ((2.8) ou (2.11)) que não dependem da forma detalhada das condições de Dirichlet ou Neumann.

## 3. O método das imagens e seu vínculo com as funções de Green [1]

Consideremos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad \forall\ \vec{x} \in V$$
$$\phi(\vec{x} \in S) = \varphi\ .$$

Admitamos agora que exista uma distribuição de cargas, caracterizada por uma densidade $\rho'(\vec{x})$, inteiramente situada na região externa a $V$ e tal que, juntamente com as cargas situadas em $V(\rho(\vec{x}))$ produza nos pontos da fronteira $S$ o mesmo potencial $\varphi$ prescrito pela condição de contorno do problema considerado. Assim, à todo problema de Dirichlet pode-se fazer corresponder um outro, aqui denominado problema associado, *sem fronteiras* e com a seguinte distribuição de cargas: $\rho$ para $\vec{x} \in V$ e $\rho'$ para $\vec{x} \notin V$. Visto que para o problema associado conhece-se a distribuição de cargas em *todo* o espaço, ou seja, o divergente e o rotacional do campo $\vec{E}$ é conhecido em todo o espaço (pois $\nabla \cdot \vec{E} = \rho\epsilon_0$ e $\nabla \times \vec{E} = \vec{O}$), então, pelo teorema de Helmholtz (seção 1), é a seguinte a solução para o potencial do problema associado:

$$\phi_a(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_V \frac{\rho(\vec{x}\ ')}{|\vec{x} - \vec{x}\ '|}d^3x\ ' + \int_{V'} \frac{\rho'(x\ ')}{|\vec{x} - \vec{x}\ '|}d^3x'\right] \quad \forall \vec{x} \in V \cup V'\ ,$$

onde $V'$ é a região do espaço complementar a $V$. Notemos que $\phi_a(\vec{x})$ é tal que $\nabla^2\phi_a(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$ para todo $\vec{x} \in V$, visto que $\rho'(\vec{x}) = 0$ para $\vec{x} \in V$, e ainda que $\phi_a(\vec{x} \in S) = \varphi$ por construção do problema associado. Portanto $\phi_a(\vec{x})$ com $\vec{x}$ restrito a $V$ é uma solução do nosso problema de contorno de partida, e portanto, devido ao teorema da unicidade (seção 1), a solução.

O método acima exposto, que consiste em achar a solução de um problema de Dirichlet resolvendo um problema sem fronteiras com uma distribuição adicional $\rho'$ na região $V'$ externa a $V$ (o problema associado), denomina-se *método das imagens.* Às cargas externas caracterizadas por $\rho'$ dá-se o nome de *cargas imagens.*

Tomemos agora o seguinte problema de Dirichlet:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}\ ')}{\epsilon_0} \quad \forall\ \vec{x} \in V$$
$$\phi(\vec{x} \in S) = 0\ .$$

Ora, de acordo com as interpretações apresentadas ao final da seção 2, a solução deste problema é a função de Green para *qualquer* problema de Dirichlet em $V$. Portanto,

$$\phi = G_D(\vec{x}, \vec{x}\ ') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\ '|} + F(\vec{x}, \vec{x}\ ')\ ,$$

sendo $F(\vec{x}, \vec{x}\ ')$, também de acordo com as interpretações acima referidas, o potencial em $V$ devido a uma distribuição de cargas externas a $V$ escolhida de forma a anular em $S$ o potencial da carga puntiforme situada em $\vec{x}\ ' \in V$. Assim, podemos concluir que $F(\vec{x}, \vec{x}\ ')$ é o potencial em $V$ produzido pelas cargas imagens $\rho'_D$ ($\rho'_D$ e não $\rho'$ como antes, para indicar que estas cargas imagens são aquelas do específico problema de contorno cuja solução é $G_D$), isto é:

$$F(\vec{x}, \vec{x}\ ') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho'_D(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}d^3y\ .$$

Logo, a função de Green para o problema de Dirichlet pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_D(\vec{x}, \vec{x}\ ') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\ '|} + F(\vec{x}, \vec{x}\ ') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\ '|} + \int_{V'} \frac{\rho'_D(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}\ '|}d^3y\right] \quad \forall\ \vec{x} \in V, \end{aligned}$$

sendo $V'$ o complemento da região $V$.

Essas considerações mostram então que o método das imagens é o equivalente físico da determinação da função de Green para o problema de Dirichlet: a função de Green para um dado problema de Dirichlet, conforme mostra a última expressão, fica determinada pela distribuição $\rho'_D$ das cargas imagens.

Toda nossa discussão sobre o método das imagens e seu vínculo com as funções de Green seria estéril se não existissem as chamadas cargas imagens. Todavia, sem dúvida elas existem pois as condições de contorno, como as de Dirichlet, são, em última análise, informações suficientes à determinação dos efeitos eletrostáticos na região $V$ devido a causas externas a $V$. Mas o que sao causas externas de efeitos eletrostáticos senão cargas elétricas situadas fora de $V$?

## Referências


1 J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (2nd edition). John Wiley, 1975.

2 P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.

3 W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (2nd edition). Addison-Wesley, 1962.