

Sobre um Modelo que Reproduz a Teoria Quântica de Spin 1/2

Elton Casado Fireman e Jenner Barretto Bastos Filho

*Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas
Cidade Universitária, CEP 57072-970, Maceió, Alagoas, Brasil
e-mail: elton@fis.ufal.br; jenner@fis.ufal.br*

Trabalho recebido em 15 de maio de 1997

As idéias de complementaridade (Bohr) e de impossibilidade (von Neumann) são confrontadas com um modelo que reproduz de maneira causal, e até mesmo determinista, os resultados da teoria quântica de spin 1/2.

We discuss a causal and deterministic model which is able to reproduce all the results of the quantum theory of spin 1/2. These results are confronted with the ideas of complementarity (Bohr) and impossibility (von Neumann).

1. Introdução

A tradição científica desde o tempo dos gregos foi, em larga medida, a de uma adoção que implicasse o estudo dos fenômenos naturais como tendo lugar no espaço e no tempo e regidos por leis causais [1]. Essa tradição não diz respeito apenas à física matemática inaugurada por Galileu e Newton, embora os conceitos de espaço, tempo e causa tenham se enriquecido e, inclusive, sofrido rupturas conceituais de monta, a partir do século XVII.

Com a formulação da mecânica quântica, em 1927, foi dada uma interpretação deste formalismo que anunciaria uma ruptura profunda com a tradição referida acima. Essa interpretação de Bohr, Heisenberg, Pauli e Born, e que se tornou dominante na física, reivindicava, grosso modo, o seguinte:

[A] - Não é possível descrever a realidade atômica exatamente nos moldes da tradição clássica (da física de Galileu, Newton, Faraday, Maxwell, etc...) isto é, adotando uma atitude, a um só tempo, espaço-temporal e causal.

[B] - Por atitude espaço-temporal deve-se entender uma tal que descreva, por exemplo, o movimento de um objeto suposto pontual, de acordo com uma correspondência exata do tipo: para cada instante t de seu movimento, corresponde uma posição do espaço.

[C] - Por atitude causal deve-se entender uma tal

que descreva, por exemplo, um sistema físico com base nas leis de conservação, notadamente as de energia, do momento linear e do momento angular.

[D] - Bohr argumentou que a implementação da posição de uma partícula acarreta uma total imprecisão de seu momento linear. De maneira análoga, a implementação do momento linear acarreta uma total imprecisão da posição da partícula em consideração. Em outras palavras, a implementação da posição exata, é o mesmo que implementação do aspecto espaço-temporal. Nesse caso nada se poderá afirmar sobre o valor do momento linear da partícula e, por conseguinte, nada se poderá falar sobre sua causa uma vez que nada se poderá dizer sobre a conservação do momento linear. De maneira análoga, a implementação do momento linear, acarreta a implementação da causa desde que permite a descrição em termos da conservação do momento linear. Nesse caso, nada então se poderá dizer sobre a implementação da posição e por conseguinte, nada se poderá dizer sobre o aspecto espaço-temporal.

[E] - Bohr argumenta que apesar da impossibilidade de uma descrição, a uma só vez, espaço-temporal e causal - em virtude do quantum mínimo de ação - não podemos prescindir desses dois aspectos pois são eles os que nossos cérebros, a nossa tradição e a nossa experiência cotidiana permitem inteligibilidade. Segundo Bohr, necessariamente os conceitos clássicos (espaço,

tempo, causa, onda, partícula,...) devem ser usados. Necessariamente também segundo Bohr, eles não podem ser usados simultaneamente.

O aspecto espaço-temporal exclui o causal.

O aspecto causal exclui o espaço-temporal.

Eles são complementares mas mutuamente excludentes.

Em outras palavras, se num dado experimento for implementado um desses aspectos, necessariamente o outro estará excluído.

É esse o chamado princípio da complementaridade de Bohr. Esse princípio também é enunciado em relação aos aspectos, corpusculares e ondulatórios.

Experimentos que implementem o aspecto corpuscular excluem necessariamente o ondulatório. Experimentos que implementam o aspecto ondulatório excluem o aspecto corpuscular. Segundo Bohr, eles são aspectos complementares mas mutuamente excludentes.

[F] - No corpo do formalismo da mecânica quântica, pode-se facilmente mostrar que o operador correspondente à grandeza física componente x do momento linear p_x e o operador correspondente à grandeza física coordenada x , respectivamente $P_x = -i\hbar \partial/\partial x$ e X , não comutam, o que é expresso pela fórmula

$$P_x X - X P_x = -i\hbar \quad (1)$$

onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π .

A leitura que Bohr faz destes resultados é a seguinte: podem ser atribuídos a ambos tanto a P_x (momento linear em x) quanto a X (coordenada x), realidades físicas. No entanto, P_x e X não têm realidades físicas simultâneas. A razão precípua dessa impossibilidade residiria no caráter irremovível do quantum mínimo de ação \hbar . Os pontos [D] e [E] podem ser vistos, grosso modo, como a leitura física (metaformal), isto é, transcendendo o formalismo da mecânica quântica, que a escola de Copenhagen faz do resultado formal matemático (1), resultado formal matemático esse aceito pelas outras Escolas de Pensamento com leituras físicas (metaformais) distintas.

[G]- No corpo do formalismo, aquilo que vale para P_x e X , vale também para quaisquer outros dois operadores lineares hermitianos que não comutem entre si. Por exemplo, para os operadores de Spin de Pauli utilizados na teoria quântica de spin meio vale a regra:

$$S_x S_y - S_y S_x = i\hbar S_z \quad (2)$$

onde:

$$\vec{S} = S_x \hat{e}_x + S_y \hat{e}_y + S_z \hat{e}_z = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x \hat{e}_x + \sigma_y \hat{e}_y + \sigma_z \hat{e}_z) \quad (3)$$

e

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad (4)$$

De acordo com a interpretação de Bohr, isso significa que as componentes, respectivamente x e y do Spin não têm realidades físicas simultâneas, isto é, é sempre possível implementar a realidade física de uma delas mas nunca a realidade física de ambas a uma só vez.

[H]- No congresso de Varsóvia em 1938 [2] Bohr comentou que a demonstração de von Neumann sobre a suposta impossibilidade de completar, de maneira causal, a mecânica quântica por meios de parâmetros escondidos (*"hidden variables"*), constituía essencialmente numa conclusão que ele próprio havia chegado

por meios mais elementares. Isso é extremamente relevante pois conecta de maneira íntima o famoso teorema da impossibilidade de von Neumann ao princípio da complementaridade de Bohr. David Bohm [3-6] foi capaz de formular uma teoria que fazia exatamente o que o teorema da impossibilidade de von Neumann proibia. Abriu-se em seguida a discussão segundo a qual a adoção de Bohr não era a única possível e por conseguinte, outras leituras de formalismo matemático da mecânica quântica são possíveis.

Os pontos levantados em [A], [B], [C], [D], [E], [F], [G] e [H] são alguns dos que consubstanciam a inter-

pretação mais frequentemente adotada para explicar os fenômenos atômicos. Ela foi adotada por Bohr, Heisenberg, Pauli, Born e muitos outros físicos. No entanto, divergiram dessa concepção alguns físicos notáveis entre os próprios criadores da mecânica quântica. Planck, Einstein, Ehrenfest, Schrödinger e de Broglie são exemplos emblemáticos dessa divergência [7]. Uma minoria de altíssima qualidade. Podemos constatar que a interpretação que se dá à teoria quântica não é redutível ao seu formalismo. Podemos até mesmo dizer que nenhuma interpretação que se dê ao formalismo da mecânica quântica é consequência necessária desse.

Neste artigo queremos mostrar que há escolhas metodológicas importantes que fazem exatamente tanto o que o Princípio da Complementaridade quanto o que o teorema de von Neumann estabelecem como proibitivo. Exatamente em cima de um contra exemplo concreto é que embasaremos os nossos comentários.

O presente artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2 daremos um exemplo concreto (tirado da mecânica clássica) de uma descrição, ao mesmo tempo, causal e espaço-temporal. Trata-se da queda livre de Galileu. Na seção 3 introduziremos a questão da leitura de alguns aspectos do formalismo da mecânica quântica que dizem respeito à presente análise. Na seção 4 discutiremos brevemente a teoria quântica do spin 1/2 e um modelo de variáveis ocultas [8-10] que, contrariamente ao que estabelecem a complementaridade de Bohr e o teorema da impossibilidade de von Neumann, pode reproduzir resultados quânticos. Discussões ampliadas do tema são realizadas nas seções 5 e 6 nas quais fechamos o presente artigo.

2. Descrição ao Mesmo Tempo Causal e Espaço-

Temporal

Tomemos um exemplo simples de uma descrição, ao mesmo tempo, causal e espaço-temporal. Seja o fenômeno da queda livre de Galileu. A distância H percorrida por um corpo em queda livre está relacionada com o tempo t de queda livre através da seguinte relação:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

Por descrição *espaço-temporal* entendemos uma tal que, matematicamente, nos forneça, em todos os instantes da queda, que no caso específico se dá em linha reta, todos os pares (h_1, t_1) , (h_2, t_2) , ..., (h_k, t_k) . Por descrição causal entendemos, fundamentalmente, as leis de conservação da energia e da conservação da quantidade de momento linear, no tocante ao caso em consideração. Assim, por exemplo, a energia é a causa do movimento e, por conseguinte sua conservação constitui sua causa formal. Era isso o que Niels Bohr entendia [11] por causa. Se aceitarmos esses conceitos podemos dizer que para quaisquer tempos todas as coordenadas de queda são conhecidas e ao mesmo tempo, todas as energias cinéticas e potenciais do objeto em queda.

Seja pois um corpo que cai de uma altura de 5m. Tomemos por simplicidade a aceleração da gravidade g como $g = 10m/s^2$. Para um instante de tempo $t = 0.0s$, teremos $H = 0.0m$, isto é, a queda ainda não começou e por conseguinte o corpo não percorreu distância alguma. Da equação (5) podemos substituir os valores de tempo e construir uma tabela fornecendo a distância percorrida em queda livre e o correspondente tempo de queda.

| Distância Percorrida H(m) | Tempo de Queda t(s) |
|---------------------------|---------------------|
| 0,00 | 0,00 |
| 0,05 | 0,10 |
| 0,20 | 0,20 |
| 0,45 | 0,30 |
| 0,80 | 0,40 |
| 1,25 | 0,50 |
| 1,80 | 0,60 |
| 2,45 | 0,70 |
| 3,20 | 0,80 |
| 4,05 | 0,90 |
| 5,00 | 1,00 |

Tabela 1

Calculemos as energias cinéticas e potenciais em todos esses instantes, supondo que o corpo que cai tem massa de 1Kg.

| Distância do Solo (m) | t (s) | E. Cinética (j) | E. Potencial (j) | E. Mecânica (j) |
|-----------------------|-------|-----------------|------------------|-----------------|
| 5,00 | 0,00 | 0,00 | 50,00 | 50,00 |
| 4,95 | 0,10 | 0,50 | 49,50 | 50,00 |
| 4,80 | 0,20 | 2,00 | 48,00 | 50,00 |
| 4,55 | 0,30 | 4,50 | 45,50 | 50,00 |
| 4,20 | 0,40 | 8,00 | 42,00 | 50,00 |
| 3,75 | 0,50 | 12,50 | 37,50 | 50,00 |
| 3,20 | 0,60 | 18,00 | 32,00 | 50,00 |
| 2,55 | 0,70 | 24,50 | 25,50 | 50,00 |
| 1,80 | 0,80 | 32,00 | 18,00 | 50,00 |
| 0,95 | 0,90 | 40,50 | 9,50 | 50,00 |
| 0,00 | 1,00 | 50,00 | 0,00 | 50,00 |

Tabela 2

Uma simples visão conjunta das duas tabelas acima nos fornece uma idéia precisa do que seja uma descrição, ao mesmo tempo, causal e espaço-temporal.

Por exemplo, em qualquer instante da queda podemos calcular, ambas, a energia cinética e a energia potencial; embora elas variem durante a queda, a soma dessas quantidades em qualquer instante, é a mesma (no caso específico, 50J).

Também, as coordenadas do centro de massa são, em quaisquer instantes, conhecidas. Deste modo, tanto os diversos (h_k, t_k) , quanto os correspondentes pares $(E_k^{cin.}, E_k^{pot.})$ os quais são ligados pela relação:

$$E_k^{cin.} + E_k^{pot.} = 50 \quad (6)$$

assumem valores que coexistem em quaisquer instantes da queda.

Descrições ao mesmo tempo causais e espaço-temporais constituem característica importante de toda Física Clássica. É assim no caso da queda livre o qual constitui um exemplo especialmente transparente e pedagógico.

Em mecânica, eletrodinâmica, etc, tais descrições são sempre possíveis. Será possível assim para fenômenos atômicos?

Os físicos da escola de Copenhagen sustentam que, no que se refere aos fenômenos atômicos, isso é não é possível. A razão alegada tem raízes profundas no quantum mínimo de ação h (constante de Planck).

Complementaridade e Indeterminação

A fim de interpretar os fenômenos duais da matéria e da radiação, muitas idéias novas foram articuladas dentre elas as de complementaridade e indeterminação, respectivamente propostas por Bohr e Heisenberg.

Bohr argumentou que os conceitos clássicos de onda, partícula, causa, que constituem legado herdado pela tradição clássica, são imprescindíveis para a compreensibilidade [12] dos fenômenos. (A fim de ter em mente o que concebia por compreensibilidade, ver o exemplo da queda livre de Galileu na qual coexistem as descrições causais e espaço-temporais). Em que pese o caráter imprescindível a ser legado pela tradição clássica, segundo Bohr, os conceitos clássicos não podem ser aplicados ao mesmo tempo: se tivéssemos uma descrição rigorosamente causal, a descrição espaço-temporal ficaria prejudicada; vice-versa, se tivéssemos uma descrição rigorosamente espaço-temporal a correspondente descrição causal ficaria prejudicada. Em outras palavras segundo Bohr, causa e espaço-tempo não podem coexistir nos fenômenos atômicos como na descrição da queda livre mostrada na seção anterior. A complementaridade de Bohr pode então ser resumida: causa e espaço-tempo são imprescindíveis embora se excluam mutuamente. Também onda e partícula (conceitos herdados do legado clássico) são imprescindíveis na análise dos fenômenos atômicos, embora, também, devam se excluir mutuamente.

As relações entre a complementaridade de Bohr e a famosa relação de incerteza de Heisenberg são reivindicadas grosso modo da seguinte maneira. Numa descrição clássica como a da queda livre de Galileu, como causa (conservação da energia e do momento linear) e trajetória (espaço-tempo) coexistem, as incertezas na posição e do momento linear são ambas nulas.

3. Sobre o Formalismo

A estrutura formal da mecânica quântica contém elementos como autovalores, autovetores, operadores lineares hermitianos associados a grandezas físicas, espaço vetoriais, entre outros. Um conceito bastante importante, no corpo do formalismo, é o da equação de autovalores. A equação de autovalores tem a seguinte estrutura:

$$R\Psi = r\Psi \quad (7)$$

O operador hermitiano \mathbf{R} associado à grandeza física R age sobre uma função de onda Ψ descrevendo de um dado estado quântico e fornece um autovalor r (real) da grandeza física correspondente para esse mesmo estado quântico em questão.

A coordenada x é uma grandeza física e, por conseguinte, está associada a um operador hermitiano Q . A equação de autovalores correspondente é:

$$Q\Psi(q, x) = q\Psi(q, x) \quad (8)$$

A solução da equação de autovalores acima é uma função do tipo delta de Dirac:

$$\Psi(q, x) = \delta(x - q) \quad (9)$$

normalizada sobre a unidade de comprimento no espaço do número de onda (q é um valor real arbitrário). A função acima é inteiramente localizada em $x = q$. Do ponto de vista matemático, uma função inteiramente localizada em um ponto no espaço do x está inteiramente estendida no espaço dos momentos p_x como mostra a representação integral da função delta dada por:

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} dy \quad (10)$$

Deste modo teremos,

$$\Psi(q, x) = \delta(x - q) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp' e^{ip'(x-q)/h} \quad (11)$$

A equação acima mostra uma integração no espaço dos momentos p' de $-\infty$ a ∞ . Isso significa que a implementação exata da coordenada na posição $x = q$, implica numa indeterminação total do seu momento.

A situação é análoga para a equação de autovalores dos momentos:

$$P\Theta(p, x) = p\Theta(p, x) \quad (12)$$

onde:

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (13)$$

Resolvendo a equação acima, obtemos:

$$\Theta = e^{ip_x x/\hbar} \quad (14)$$

A análise da densidade de probabilidade $\Theta(p, x)\Theta^*(p, x) = |\Theta(p, x)|^2$ leva a um valor constante. Tal fato mostra que quando um autovalor p' é implementado, há uma indeterminação completa do valor de x , posto que a densidade $|\Theta(p, x)|^2$ é constante ao longo de x .

Os resultados acima fazem parte do próprio formalismo matemático da mecânica quântica. O que transcende o formalismo é a interpretação segundo a qual a não comutação dos operadores $Q = q$ e $P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ expressa por $[Q, P] = -i\hbar$ seja interpretada como a não simultaneidade das realidades físicas da posição e do momento de uma partícula. Uma tal interpretação, como veremos adiante, submete o conceito de realidade física ao mero conceito operacionalista de medida, o que, sem dúvida, tem uma forte conotação positivista.

4. Teoria Quântica de Spin 1/2 e um Modelo que Reproduz seus Resultados

Vejamos agora que os resultados da teoria quântica de spin 1/2 podem ser obtidos a partir de um modelo que atua de tal maneira a fazer exatamente o que o teorema de von Neumann proibe. Em outras palavras, é perfeitamente possível completar causalmente a mecânica quântica e, além disso, até mesmo completá-la deterministicamente, pelo menos neste exemplo particular.

Nesta secção procederemos da seguinte maneira: primeiramente exploraremos a teoria quântica de spin

1/2 mostrando como são obtidos os autovalores do operador de spin R na representação matricial 2×2 e as probabilidades desses autovalores correspondentes aos dois autoestados possíveis; em seguida, num segundo momento, apresentaremos o modelo “Statistical ensemble of spinning spheres” (Conjunto Estatístico das Esferas Girantes) que reproduz todos os resultados da mecânica quântica de spin 1/2, isto é autovalores, autovetores, probabilidades, e isso, através de uma abordagem causal e até mesmo determinista. Em outras palavras, é apresentado um contra exemplo do teorema da impossibilidade de von Neumann.

4.a Teoria Quântica de Spin 1/2

Seja:

$$R = \alpha I + \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \quad (15)$$

o operador mais geral de spin 2×2 onde I é a matriz identidade e $\vec{\sigma}$ é tal que suas componentes são as matrizes de Pauli (4); α, B_x, B_y e B_z são constantes reais, com :

$$\vec{B} = B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z \quad (16)$$

Seja

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

o estado mais geral para partículas de spin 1/2. A equação de autovalores:

$$R|\Psi\rangle = r|\Psi\rangle \quad (18)$$

nos dará:

$$\begin{pmatrix} \alpha + B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & \alpha - B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (19)$$

Uma solução não trivial requer que o determinante de $(R - rI)$ seja diferente de zero. O procedimento desses cálculos bastantes diretos nos leva aos dois possíveis autovalores r de R que são:

$$r = \alpha \pm |\vec{B}| \quad (20)$$

Procedamos agora ao cálculo das probabilidades correspondentes aos autovalores acima. O valor médio de R no estado $+\Psi$ é:

$$\langle \Psi | R | \Psi \rangle = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{p_1 + p_2} \quad (21)$$

ou seja, é igual à média ponderada dos dois autovalores possíveis $r_1 = \alpha + |\vec{B}|$ e $r_2 = \alpha - |\vec{B}|$, onde, naturalmente as probabilidades, respectivamente p_1 e p_2 , constituem fatores ponderais. Tendo a vista uma normalização da probabilidade total a unidade, teremos:

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (22)$$

Sem que constitua qualquer perda de generalidade, podemos escolher um $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ no qual a direção de \hat{n} coincide com o eixo z . Assim teremos;

$$|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Desde modo,

$$\langle \Psi | R | \Psi \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} \alpha + B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & \alpha - B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha + B_z \quad (24)$$

Tendo em vista as fórmulas acima, teremos

$$\alpha + B_z = (\alpha + |\vec{B}|)p_1 + (\alpha - |\vec{B}|)(1 - p_1)$$

Cálculos diretos nos levam às probabilidades:

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{B_z}{|\vec{B}|} \right) \quad (25)$$

e

$$p_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_z}{|\vec{B}|} \right) \quad (26)$$

4.b - Modelo do conjunto estatístico das esferas girantes

Veamos um modelo que reproduz os resultados da teoria quântica de spin 1/2.

Seja um conjunto estatístico de esferas girantes (“Statistical Ensemble of Spinning Spheres”). Cada uma dessas esferas tem um momento angular apontando (ver Fig. 1) para a sua correspondente direção $\vec{\lambda}$. O ângulo formado entre $\vec{\lambda}$ e a direção positiva do eixo z é igual a θ . A fim de reproduzir os possíveis autovalores do observável \mathbf{R} , onde, tal como na teoria quântica de spin 1/2, as quantidades α e \vec{B} são dadas, concebemos um aparato que segue os seguintes passos:

1^o Passo: Medimos em cada uma das esferas giratórias o sinal do produto escalar ($\vec{\lambda} \cdot \vec{B}$) correspondente

$$\mu = \text{sinal}(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) \quad (27)$$

Evidentemente, $\mu = \pm 1$.

2^o Passo: Multiplicamos μ por \vec{B} .

3^o Passo: Adicionamos α ao resultado anterior de tal maneira que obtemos

$$\alpha + \mu|\vec{B}| \quad (28)$$

Evidentemente, as esferas cujos valores de λ ($\vec{\lambda}$) formam um ângulo com a direção fixa (\vec{B}) tal que $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) > 0$, corresponderão, no contexto do presente modelo, ao autovalor $r_1 = \alpha + |\vec{B}|$ de \mathbf{R} da teoria quântica de spin 1/2. Do mesmo modo, as esferas cujos valores de λ ($\vec{\lambda}$) formam um ângulo com a direção fixa (\vec{B}) tal que $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) < 0$, no corpo do modelo, correspondem ao autovalor $r_1 = \alpha - |\vec{B}|$ de \mathbf{R} dado pela teoria quântica de spin 1/2.

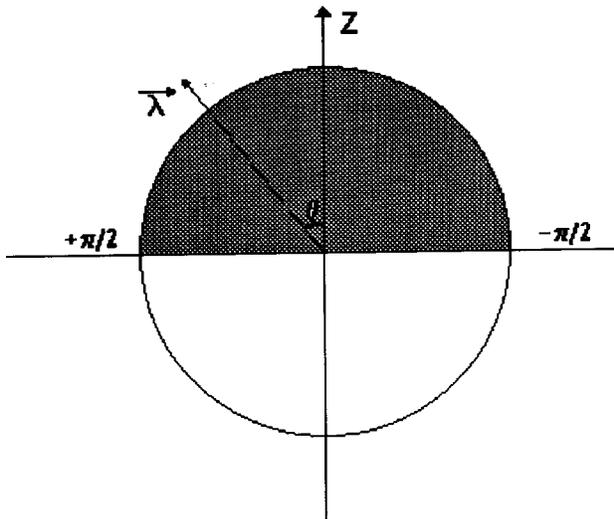


Figura 1. No contexto do modelo do conjunto estatístico de esferas giratórias, $\vec{\lambda}$ desempenha o papel de variável oculta. θ é o ângulo formado entre $\vec{\lambda}$ e o eixo positivo Z . Conforme

a eq. (29), os valores possíveis de θ cobrem o intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$.

A fim de representar o estado $|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no corpo do presente modelo suponhamos que os diversos ($\vec{\lambda}$) são distribuídos na esfera de acordo com a lei

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(\theta) & \text{para } -\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{para qualquer outro valor de } \theta \end{cases} \quad (29)$$

Evidentemente,

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta)d\theta = 1 \quad (30)$$

O que significa que a densidade dos ($\vec{\lambda}$), distribuídos pelos diversos ângulos possíveis θ quando integrada sobre todo o universo de possibilidades de θ dada por (30) fornece o resultado igual 1.

Vejamos como o presente modelo também é capaz de fornecer as probabilidades correspondentes aos dois autovalores obtidos pela teoria quântica. Aqui p_1 corresponde à probabilidade do autovalor r_1 e p_2 corresponde à probabilidade do autovalor r_2 . Assim:

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (31)$$

Vejamos a Fig. 2, na qual a direção fixa \vec{B} forma um ângulo ϕ com a direção do eixo z positivo. Todos os ($\vec{\lambda} \cdot \vec{B}$) positivos serão aqueles para os quais $\vec{\lambda}$ assume valores tais que o ângulo θ (que é ângulo formado entre $\vec{\lambda}$ e a direção positiva do eixo z) varia de $-\pi/2$ a $(\pi/2 - \phi)$ conforme a Fig. 2.

Toda a região hachuriada da Fig. 2 diz respeito à probabilidade do autovalor r_1 . A probabilidade correspondente p_1 será:

$$p_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2 - \phi} \rho(\theta)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2 - \phi} \frac{\cos\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}[1 + \cos\phi]$$

com

$$\cos\phi = \frac{B_z}{|\vec{B}|}$$

logo

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{B_z}{|\vec{B}|} \right] \quad (32)$$

A probabilidade p_2 correspondente a r_2 será aquela obtida através da integração sobre os valores negativos de $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B})$. Assim (ver Fig.3),

$$p_2 = \int_{\frac{\pi}{2}-\phi}^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}-\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} [1 - \cos\phi]$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{B_z}{|\vec{B}|} \right] \tag{33}$$

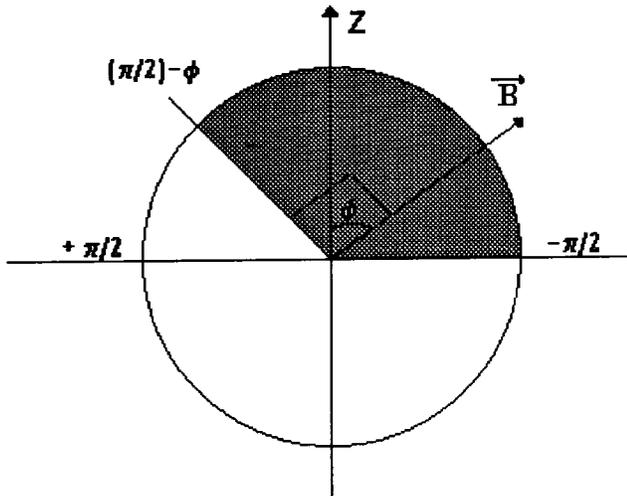


Figura 2. No contexto do modelo, a probabilidade p_1 do autovalor r_1 é reproduzida para valores tais que $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) > 0$, o que corresponde à região hachuriada acima.

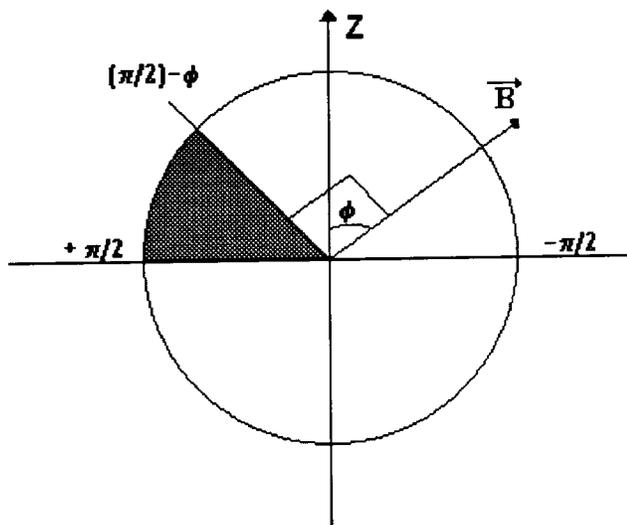


Figura 3. No contexto do modelo, a probabilidade p_2 do autovalor r_2 é reproduzida para valores tais que $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) < 0$, o que corresponde à região hachuriada acima.

5. Discussão

Um resultado que merece ênfase é que o modelo do conjunto estatístico das esferas giratórias, além de reproduzir a teoria quântica de spin 1/2, ainda permite

espaço para se contestar uma série de aspectos da interpretação de Bohr. Efetivamente, no contexto do modelo estudado, uma medida de $(\alpha I + \vec{B} \cdot \vec{\sigma})$ sobre uma dada esfera do conjunto é determinada completamente pelo valor de $\vec{\lambda}$ dessa esfera. Desta maneira, concluímos que, no contexto desse modelo, as medidas revelam a causa responsável pela obtenção de ambos os autovalores r_1 e r_2 de \mathbf{R} . Efetivamente, todas as esferas que exibem lambdas tais que $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) > 0$ implicam o autovalor r_1 de \mathbf{R} , enquanto todas aquelas que exibem $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) < 0$ implicam no autovalor de r_2 de \mathbf{R} . *Concluimos então que o valor do produto escalar constitui a causa que implica algum dos dois autovalores r_1 ou r_2 .* Mais especificamente, como o valor de \mathbf{B} é dado, pois trata-se de ingrediente do próprio observável em questão, então concluímos que o valor de $\vec{\lambda}$ para cada esfera constitui a *causa* que implicará algum dos dois valores (r_1 ou r_2). Isso significa que, em linha de princípio é perfeitamente possível reproduzir resultados quânticos procurando causas locais. Deste modo, é possível encontrar causas para os fenômenos quânticos, o que significa que estamos diante de um contra exemplo da posição que expressa a impossibilidade de se completar a mecânica quântica de maneira causal. Em outras palavras, o modelo estudado faz exatamente o que o teorema de von Neumann proibe.

Uma outra coisa que pode ser dita é que a distribuição dos $\vec{\lambda}$ determina também as probabilidades. Como foi dito, todas as esferas para as quais $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) > 0$ estão relacionadas com o autovalor r_1 enquanto todas as esferas para as quais $(\vec{\lambda} \cdot \vec{B}) < 0$ estão relacionadas com o autovalor r_2 . As probabilidades correspondentes são determinadas por causas locais [13] que também são propensões locais. É a distribuição dos $(\vec{\lambda})$ conforme uma dada lei que constitui numa causa de p_1 e p_2 . Sem dúvida uma interpretação desse tipo é preferível às interpretações subjetivas das probabilidades como a ignorância ou desconhecimento do observador.

Passemos a um outro ponto. Vejamos o que pode ser dito sobre a interpretação de Bohr e Heisenberg segundo a qual a não comutação das componentes de spin necessariamente implique na não implementação simultânea das realidades físicas dessas duas componentes. Ora, no contexto do presente modelo, a causa (*"Hidden variable"*) implica na determinação do momento angular e conseqüentemente na simultaneidade

das realidades físicas de todas as suas três componentes. Deste modo, no contexto do presente modelo, todas as componentes de spin são simultaneamente reais. No entanto, a medida simultânea de duas delas é impossível pois cada uma das medidas implica numa redistribuição dos diversos ($\vec{\lambda}$) do conjunto estatístico de esferas giratórias. Essas distribuições se dão sobre conjuntos diferentes e incompatíveis. Daí a impossibilidade de medida simultânea das componentes de spin, o que é muito diferente de dizer que as duas realidades físicas não coexistam. É necessário que levemos em conta as circunstâncias segundo as quais as medidas realizadas pelo aparato sobre os elétrons (no corpo do modelo tais medidas são realizadas sobre as esferas girantes) redistribuem os diversos lambdas das esferas. No entanto, deveremos assumir, que após cada uma dessas medidas, a nova redistribuição tem lugar conforme a mesma lei expressa por (29).

As relações de indeterminação são assim interpretadas como relações de dispersão, ou seja, como relações de espalhamento sobre o conjunto estatístico. As relações de Heisenberg são então lidas sem quaisquer apelos a atributos do sujeito tais como os de incerteza. Ao invés de se atribuir à incerteza, pois essa constitui um atributo do sujeito e não da natureza, se atribui a algo como dispersão. E o produto de dispersões é que está relacionado com o quantum mínimo de ação \hbar , e certamente com a dualidade objetiva.

Outro ponto que merece destaque diz respeito ao fato do modelo não levar em conta uma propriedade tão importante quanto a dualidade. O modelo não pode ter pretensão de cobrir todos os aspectos do real; o importante fenômeno da dualidade, não é contemplado pelo presente modelo. É necessário darmos ênfase ao fato desse não ser um modelo realista a toda prova. O alcance do modelo é apenas o de provar que as idéias de impossibilidade não podem se sustentar. A partir daí o que se espera é a proposta de modelos melhores que incluam a dualidade. No corpo da teoria quântica de spin 1/2 também não é transparente a dualidade. Ela aparece muito mais como uma leitura transcendendo o formalismo.

6. Observações finais e conclusões

É fato conhecido que o formalismo matemático da mecânica quântica não necessariamente implica uma

dada interpretação. Por exemplo, no que concerne à dualidade, a adoção da mutua exclusão da escola de Copenhagen conduz a problemas que podem ser evitados através de uma outra escolha metodológica, igualmente legítima, como a que segue a linha inicialmente proposta por Einstein e por de Broglie.

No que concerne à interpretação de Copenhagen do resultado segundo o qual a não comutação de dois operadores hermitianos implique necessariamente a não realidade física simultânea das grandezas físicas correspondentes, muito espaço existe para discussão inclusive, sobre qual o critério da realidade a ser adotado. Como sabemos, no famoso trabalho de EPR (Einstein, Podolsky e Rosen)[14] foi proposto o critério de realidade seguinte:

"If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exist an element of physical reality corresponding to this physical quantity." [Se, sem perturbar de qualquer maneira um sistema, pudermos prever com certeza (isto é, com probabilidade igual a unidade) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento da realidade física correspondente a essa quantidade física.]

Tal como discutimos na secção 3, a implementação precisa da coordenada x implica numa dispersão infinitamente grande do momentum linear p_x da partícula e, vice versa, a implementação de p_x implica numa dispersão infinitamente grande da posição dessa partícula. Desta maneira, com base no critério EPR, como os valores de x e p_x não podem ser previstos simultaneamente com uma probabilidade igual a 1 (isto é, certeza), logo eles não podem ter realidades físicas simultâneas. No entanto, se esse é o caso quando tivermos um objeto quântico apenas (ou seja, apenas uma partícula), não será o caso de dois objetos quânticos correlacionados. Einstein, Podolsky e Rosen foram capazes de mostrar um caso concreto em que poderíamos atribuir realidades físicas simultâneas à diferença da posição de duas partículas e a soma de seus momentos lineares, nesse exemplo de Einstein vale a comutação,

$$[(\hat{q}_\alpha - \hat{q}_\beta), [(\hat{p}_\alpha - \hat{p}_\beta)]] = 0 \quad (34)$$

(Para um maior aprofundamento da questão, ver [14] e [11]).

Vejamos agora o exemplo clássico seguinte: 1 litro de água ferve a 100°C e se congela a 0°C . Ambas as propriedades (ebulição e solidificação) podem ser previstas com certeza, isto é, (probabilidade igual a unidade de acordo com o critério de realidade de EPR) ambas constituem elementos de realidade. Evidentemente o mesmo litro d'água não pode ferver e se congelar simultaneamente. No entanto, ambas as propriedades podem ser previstas com certeza, no contexto do critério de EPR, pois ambas decorrem de propriedades físico-químicas acerca da molécula de H_2O . Evidentemente, ambos os elementos de realidades resultantes da propriedade físico-química da água podem ser previstos com certeza, e simultaneamente, com base no critério de EPR apesar de que a fervura e o congelamento somente possam acontecer simultaneamente para diferentes porções d'água. A questão central, tal como no caso das diversas componentes do spin, é que o fato delas não serem simultaneamente mensuráveis não implica em que as realidades físicas simultâneas não tenham lugar.

É bom que se dê ênfase ao fato segundo o qual a realidade física (para os realistas) tem um nível ontológico superior à mera operação de medida que se faça dela embora sem dúvida, medidas também alterem a realidade. O fato mais fundamental, no entanto, é que para os realistas, há realidade mesmo independentemente da medida, enquanto os positivistas submetem a realidade às operações de medida.

Consideremos a interessante questão de saber o porquê de Bohr ter proposto um princípio explicativo tão pessimista e cheio de impossibilidades o que leva a uma conclusão decepcionante quanto aquela que segundo Popper seria a ingrata tarefa de tornar a incompreensibilidade "compreensível", isto é, apenas domável.

Vamos agora nos referir ao ambiente cultural que Bohr se inspirou para propor uma solução tão drástica sobre a realidade. Vários autores constataram (ver por exemplo 15) a forte influência do existencialismo dinamarquês e da *Lebensphilosophie* alemã, filosofia esta muito estranha à física de Galileu, Newton, Faraday, Maxwell e Einstein. O tratamento desses aspectos importantes foi dado em vários trabalhos. A sua discussão

é muito importante mas não será feita neste trabalho.

Finalizando o presente trabalho gostaríamos de dar ênfase que as questões aqui tratadas dividiram a opinião de cabeças entre as mais finas da física deste século XX. São questões multifacetadas e que ainda requerem reflexão. O presente trabalho pretende ser um fato motivador deste debate e é dirigido a um público amplo de professores, pesquisadores, estudantes e outros grupos de pessoas interessadas no tema.

Agradecimentos

Agradecemos calorosamente ao cordial amigo Roberto Jorge Vasconcelos dos Santos pelas inúmeras oportunidades em que discutimos. E. C. Fireman agradece a CAPES pelo suporte financeiro.

Referências e Notas

1. F. Selleri, *Quantum Paradoxes and Physical Reality*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1990).
2. Proceedings (Anais) da Conferência *New Theories in Physics*, Varsóvia (1938).
3. D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**, 160 (1952).
4. D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**, 180 (1952).
5. D. Bohm, *Phys. Rev.*, **89** 458 (1953).
6. D. Bohm, B. J. Hiley, *it The Undivided Universe (An ontological interpretation of quantum theory)*, Routledge, London/NY (1993).

Nota: Este livro foi publicado um pouco após a morte de Bohm e nele (ver pg. 2) há uma crítica dada aos termos "*Hidden Variables*" (Variáveis Ocultas) e "*Causal Interpretation*" (Interpretação Causal) que aparecem nos títulos dos artigos 3-5. Por isso, era importante acrescentar no livro o subtítulo: "*An ontological interpretation of quantum theory*". Na página 3 do livro, Bohm e Hiley retomam os artigos 3-4 respondendo a todas as objeções e críticas sofridas por Broglie no Congresso de Solvay em 1927, e que a demais, estimularam a de Broglie a retornar ao problema após 25 anos.

7. F. Selleri, ver o prefácio da referência 1.

Nota: Em sua alocução por ocasião do recebimento do prêmio Nobel em 1954, Max Born disse o seguinte reconhecendo a grande qualidade da

oposição à adoção dominante: "...when I say that physicists had accepted the way of thinking developed by us at that time, I am not quite correct: There are a few most note worthy exceptions—namely, among those very workers who have contributed most to the building up of quantum theory. Planck himself belonged to the sceptics until his death. Einstein, de Broglie, and Schrödinger have not unsatisfactory features of quantum mechanics..."

8. J. S. Bell, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 447 (1966).
9. F. Selleri, ref.1
10. F. Selleri, *Rivista di Storia d. Scienza* **2**, 545 (1985).
11. F. Selleri, *History of the Eintein-Podolsky-Rosen Paradox*, In: *Quantum Mechanics Versus Local Realism* Ed. by F. Selleri, Plenum Publishing Corporation (1988).

Nota: Na p.6 Selleri escreve: "...Bohr formulated

causality as follows: A process is causal if it takes place according to well defined and indentifiable rules, the most important one being the law of conservation of energy and momentum."

12. J. B. Bastos Filho, *Dangerous Effects of the Incomprehensibility in Micro physics*, In: *Frontiers of Fundamental Physics* Ed. Barone/Selleri, Plenum Press, New York (1994) p.485.
Nota: Trata-se de uma discussão envolvendo os conceitos de compreensibilidade e complementaridade. O artigo trata do confronto entre dois dualismos radicalmente distintos.
13. J. B. Bastos Filho e F. Selleri, *Foundations of Physics* **25**, 701 (1995).
14. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen *Phys Rev.* **47**, 777 (1935).
15. R. N. Moreira, *Hoffding and Bohr*, In: *Light and Matter*, Ed. for A. van der Merwe/ A. Garuccio Plenum, New York / London p.395 (1994).