

# O Problema de Dois Corpos: Aplicações Pouco Discutidas nos Cursos de Mecânica

Rodrigo Dias Tarsia

*Observatório Astronômico*

*Departamento de Física, ICEx - UFMG Caixa Postal 702, 30161 - 970 - Belo Horizonte*

Trabalho recebido em 29 de março de 1997

Neste artigo discute-se o problema de dois corpos perturbado pela presença de uma terceira partícula, supondo existir a interação gravitacional mútua entre elas. O formalismo matemático simples é aplicado numa discussão semiquantitativa de alguns casos tais como estabilidade de satélites e marés oceânicas.

## 1. Introdução

O problema de dois corpos tem importância fundamental em Física, sendo estudado em todos os textos de Mecânica. Entretanto ele é sempre tratado com as duas partículas isoladas do resto do Universo, hipótese usada para colocar em evidência as características principais do movimento. O caso geral é aquele em que cada uma das partículas sofre ação de uma força resultante externa ao sistema. Dependendo desta força o problema pode se tornar complicado, passando a ser didaticamente desinteressante. Neste artigo apresentamos algumas aplicações do caso geral, supondo existir a interação gravitacional mútua entre as partículas e entre elas e uma terceira. O formalismo matemático é simples e aplicável a casos pouco discutidos nos livros de Mecânica, mas que enriquecem o estudo do problema.

## 2. O problema geral

Sejam três partículas de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , interagindo gravitacionalmente. Estamos interessados em descrever o movimento de  $m_2$  em relação a  $m_1$ , na presença de  $m_3$ . As equações de movimento de  $m_1$  e  $m_2$  em relação a um referencial inercial com origem em um ponto O do espaço são:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}^{(i)} + \vec{F}_{31}^{(e)} \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}^{(i)} + \vec{F}_{32}^{(e)} \quad (2)$$

em que os índices ( $i$ ) e ( $e$ ) são usados para reforçar o que são consideradas forças internas e externas ao problema de dois corpos.

Seja agora a mudança de coordenadas:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

e as transformações inversas:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}$$

em que  $\vec{R}$  é o vetor-posição do centro de massa do sistema ( $m_1, m_2$ ) em relação a O e  $\vec{r}_{21}$ , o vetor-posição de  $m_2$  em relação a  $m_1$ .

Com essas expressões e com a terceira lei de Newton,  $\vec{F}_{21}^{(i)} = -\vec{F}_{12}^{(i)}$ , as equações (1) e (2) podem ser transformadas em:

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{31}^{(e)} + \vec{F}_{32}^{(e)} \quad (3)$$

$$\mu \ddot{\vec{r}}_{21} = \vec{F}_{12}^{(i)} + \mu \left( \frac{\vec{F}_{32}^{(e)}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{31}^{(e)}}{m_1} \right) \quad (4)$$

com

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

A primeira equação descreve o movimento do centro de massa do sistema ( $m_1, m_2$ ) em relação a O; a segunda, o movimento de uma partícula de massa reduzida  $\mu$  em relação a  $m_1$ . Assim, o movimento da

partícula  $m_2$ , visto por  $m_1$ , é o mesmo que se  $m_1$  fosse fixa e  $m_2$  tivesse massa  $\mu$ .

Se as forças que atuam sobre as partículas são de origem gravitacional, a equação acima fica escrita:

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r_{21}^2} \hat{u}_{21} + Gm_3 \left( \frac{\hat{u}_{32}}{r_{32}^2} - \frac{\hat{u}_{31}}{r_{31}^2} \right) \quad (5)$$

em que  $\hat{u}_{jk}$  é o vetor unitário na direção e sentido de  $\vec{r}_{jk}$ . Esta equação nos dá a aceleração de  $m_2$  em relação a  $m_1$ . O primeiro termo é o do movimento kepleriano (descrito pelas leis de Kepler) de  $m_2$  em relação a  $m_1$ . O segundo termo, que chamaremos de aceleração diferencial, representa a influência de  $m_3$  sobre o movimento relativo de  $m_2$ . Ele é a diferença entre as acelerações de  $m_2$  e  $m_1$ , sob a ação de  $m_3$ . Normalmente não considerado nos livros, é o responsável pelas aplicações a serem discutidas a seguir. Notemos que os casos de nosso interesse são aqueles em que a aceleração diferencial é pequena em relação à kepleriana; caso contrário, o problema passa a ser de três corpos.

### 3. O sistema Terra-Lua

A Lua descreve uma órbita kepleriana elíptica em torno da Terra, cuja excentricidade é 0,055. O período do movimento é de 27,32 dias; a distância média da Lua à Terra é de cerca de 384000 km. O plano da órbita lunar faz um ângulo de 5,1 graus com o da órbita da Terra em torno do Sol (a Eclíptica). Tanto o Sol como os outros planetas influenciam no movimento da Lua em relação à Terra através do termo não kepleriano da equação (5), mas o Sol, por sua massa, é o que tem maior importância. Calculemos então a aceleração diferencial para o caso de  $m_3$  ser o Sol. Desprezando a inclinação do plano orbital da Lua em relação à Eclíptica, podemos ver que o valor máximo deste termo ocorre com a Lua, a Terra e o Sol alinhados, quando  $\hat{u}_{32} = \pm \hat{u}_{31}$ . Nesse caso,  $r_{31} = r = 1,496 \cdot 10^{11}$  m (distância média Terra-Sol),  $r_{21} = d = 3,84 \cdot 10^8$  m e  $r_{32} = r \pm d$ . Então:

$$a_d = \frac{GM_S}{(r \pm d)^2} - \frac{GM_S}{r^2} \simeq \frac{2GM_S d}{r^3}$$

pois  $d \ll r$ . Portanto, a influência do Sol é inversamente proporcional ao cubo da sua distância à Lua. Assim a aceleração diferencial ( $a_d$ ) pode ser considerada como o efeito de uma perturbação ao movimento kepleriano puro. O valor desta aceleração, em relação

à produzida pela atração gravitacional da Terra sobre a Lua ( $a_g$ ) é dado por:

$$\frac{a_d}{a_g} = \frac{2M_S}{(M_T + M_L)} \left( \frac{d}{r} \right)^3 \simeq 0,01$$

com  $M_L/M_T = 0,0123$ ,  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg e  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg.

Apesar de pequeno, este termo é facilmente mensurável. Então, quando os três corpos estão alinhados, o Sol tende a afastar a Lua da Terra e quando a direção Terra-Lua faz um ângulo reto com a direção Terra-Sol, o efeito é o de aproximar a Lua da Terra. Em qualquer caso, o Sol modifica a forma da órbita lunar em torno da Terra.

### 4. Limite de estabilidade

Um outro efeito da presença da aceleração diferencial é o fato de que passa a existir um limite para a estabilidade do movimento de  $m_2$  em relação a  $m_1$ , na presença de  $m_3$ . Com efeito, se  $d$  é a distância entre  $m_1$  e  $m_2$  e  $r$  a entre  $m_3$  e  $m_1$ , a aceleração diferencial máxima de  $m_2$ , devida à presença de  $m_3$  é:

$$a_d = \frac{Gm_3}{(r-d)^2} - \frac{Gm_3}{r^2}$$

Quando esta aceleração se iguala à kepleriana, temos:

$$r^3(2d-r) = \frac{m_1 + m_2}{m_3} (d-r)^2 d^2$$

Esta equação dá a maior distância  $d$  a que  $m_2$  pode ficar de  $m_1$  de modo que ainda permaneça gravitando em torno de  $m_1$ . Quando  $m_2 \ll m_1$  e  $m_1 \ll m_3$ , ela se reduz a:

$$d = \left( \frac{m_1}{2m_3} \right)^{1/3} r$$

No caso do sistema Terra-Lua com a presença do Sol,  $r = 1,7 \cdot 10^9$  m, valor que é 4,8 vezes a distância Terra - Lua. Logo a Lua é estável em sua órbita em torno da Terra.

### 5. Marés oceânicas

O mesmo formalismo pode ser aplicado para se ter uma explicação simples sobre as marés oceânicas. As forças de maré ocorrem toda vez que um corpo de dimensão finita se acelera como um todo sob ação de uma força que varia ao longo da dimensão deste corpo. Devido ao fato da Terra não ser infinitamente pequena

em relação às suas distâncias ao Sol e à Lua, as forças de atração gravitacional desses corpos sobre os vários pontos da Terra não são iguais, resultando numa força perturbadora que é função da direção e da distância entre esses pontos e o corpo perturbador.

Suponhamos a Terra sólida e esférica, inteiramente coberta por uma camada de água. A aceleração de uma partícula de água, devido à atração gravitacional da Terra é

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

em que  $M$  e  $R$  são a massa e o raio da Terra. Com a presença da Lua, a aceleração diferencial desta partícula de água, será:

$$a_d = \frac{Gm}{r^2} \hat{u}_r - \frac{Gm}{a^2} \hat{u}_a$$

em que  $m$  é a massa da Lua, e  $a$ , a distância Terra-Lua  $r$  a distância partícula - Lua. De acordo com a posição da partícula de água,  $r$  muda de valor e  $\hat{u}_r$ , de direção. O Apêndice contém uma dedução simples para a aceleração diferencial; por enquanto vamos procurar fazer a discussão de modo mais intuitivo para que os efeitos físicos fiquem mais claros. A Figura 1 mostra a Terra, a Lua e quatro pontos (A,B,C,D) do oceano.

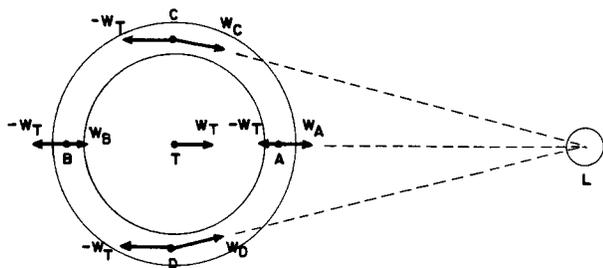


FIGURA 1

No ponto A, a aceleração diferencial vale

$$a_d = w_a + w_t = \frac{Gm}{(a - R)^2} - \frac{Gm}{a^2} \simeq \frac{2GmR}{a^3}$$

Como  $w_a$  é maior que  $w_t$ ,  $a_d$  tem sentido voltado para a Lua a aceleração total da partícula em A

$$\vec{a} = \vec{g}_0 + \vec{a}_d$$

passa a ser menor que  $g_0$ .

No ponto B, teremos:

$$a_d = w_b + w_t = \frac{Gm}{(a + R)^2} - \frac{Gm}{a^2} \simeq \frac{2GmR}{a^3}$$

e, como agora  $w_t$  é maior que  $w_b$ , a aceleração diferencial está dirigida para fora da Terra. Assim, da mesma forma que em A, a aceleração total em B é menor que  $g_0$ .

Nos pontos C e D, as acelerações  $w_c$  e  $w_d$  fazem um ângulo obtuso com  $w_t$ . Elas podem ser decompostas em duas componentes, uma paralela e oposta a  $w_t$  e outra, perpendicular a esta, voltada para o centro da Terra. Dessa forma, em C e D, a aceleração resultante torna-se maior que  $g_0$ . Entre C e D, no trecho CAD, a aceleração resultante está dirigida para A e no trecho CBD, ela está dirigida para B. O efeito total é então do oceano se precipitar, em uma metade da Terra, no sentido do ponto A, onde a Lua está no zênite, e na outra metade, para o ponto B, onde ela se encontra no nadir. O invólucro do oceano torna-se um elipsóide com o eixo maior apontado para a Lua. Próximo a A e B ocorrerá a maré alta e em C e D, a maré baixa.

Com a rotação da Terra, os pontos de maré alta e baixa se deslocam sobre a superfície de nosso planeta. Por isso, no intervalo de tempo entre duas passagens sucessivas da Lua pelo meridiano de um local (em média, igual a 24 horas e 52 minutos), os pontos de maré alta dão uma volta em torno da Terra e, durante este intervalo de tempo, haverá duas marés altas e duas baixas.

As marés produzidas pelo Sol são semelhantes às da Lua, mas como a razão entre as acelerações devidas à Lua e ao Sol é:

$$\frac{m}{M} \left( \frac{R_S}{R_L} \right)^3 \simeq 2,2$$

a força da maré solar é 2,2 vezes mais fraca que a da lunar.

Durante as luas Nova e Cheia, os fluxos de maré solar e lunar começam simultaneamente e observa-se a maré alta máxima; nos quartos Crescente e Minguante da Lua, nos momentos da maré alta lunar tem lugar a maré baixa solar e observa-se a maré mínima. Deve-se notar que, na realidade o fenômeno das marés é mais complicado que o esquema simples apresentado acima; provavelmente o efeito mais importante não discutido, é o de que os oceanos estão sujeitos a oscilações naturais. Além disso, a Terra não está coberta totalmente

pelas águas; a onda de maré encontra formas de litoral diferentes e complexas, bem como fundos de mar diferentes. Isso produz atrito e em consequência, o máximo de maré em um ponto da Terra, não coincide com o momento de culminação da Lua neste ponto, podendo haver atrasos de até 6 horas. Da mesma forma, a altura da maré não é a mesma em todos os lugares.

## 6. Limite de Roche

Em 1880, Edouard Roche mostrou que se um satélite se aproximar de um planeta além de uma distância mínima, forças de maré podem destruí-lo. Embora a determinação rigorosa desta distância seja complicada, o formalismo descrito e aplicado acima pode ser usado para termos uma boa aproximação.

Seja um satélite de massa  $m$  e raio  $r$ , orbitando em torno de um planeta de massa  $M \gg m$ , a uma distância  $d$ . A aceleração gravitacional produzida pelo planeta sobre o satélite, é  $GM/d^2$ . A aceleração diferencial que atua em um ponto da superfície do satélite, sobre a linha que une os centros do planeta e do satélite, é dada por:

$$a_d = \frac{GM}{(d \pm r)^2} - \frac{GM}{d^2} \simeq \frac{2Gmr}{d^3}$$

A aceleração angular do centro do satélite é:

$$\omega = \left( \frac{GM}{d^3} \right)^{1/2}$$

e a aceleração diferencial centrípeta entre a superfície do satélite e seu centro é:

$$a_1 = \omega^2(d \pm r) - \omega^2 d = \omega^2 r = \frac{Gmr}{d^3}$$

Para que o satélite não se fragmente é necessário que a combinação  $a_1 + a_d$  seja igual à aceleração auto-gravitacional do satélite,  $Gm/r^2$ , o que dá:

$$d = \left( \frac{3M}{m} \right)^{1/3} r$$

A distância  $d$  é a menor distância que o satélite pode ficar do planeta sem ser destruído pelos efeitos de maré. Em termos de densidades,

$$d = \left( \frac{3\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R \simeq 1,44 \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R$$

em que  $\rho_M$  e  $\rho_m$  são as densidades volumétricas do planeta e do satélite e  $R$ , o raio do planeta.

Os cálculos completos resultam em que, para corpos sólidos ou gelo, de raio maior que 20 km, o coeficiente numérico da equação acima é 1,38; para um corpo caindo diretamente sobre um planeta, o coeficiente é 1,19. Para o sistema Terra-Lua,  $d \simeq 2,9 R_T = 18500$  km. Devemos notar que os satélites do sistema solar estão além do limite de Roche; já os anéis de Saturno, que se localizam entre 80000 Km e 136000 km do centro do planeta, o limite de Roche é 150000 km. O mesmo acontece com os anéis de Júpiter, Urano e Netuno.

## Apêndice

A Figura 2 mostra o ponto  $P$  do oceano sujeito à força de atração gravitacional da Terra e da Lua.

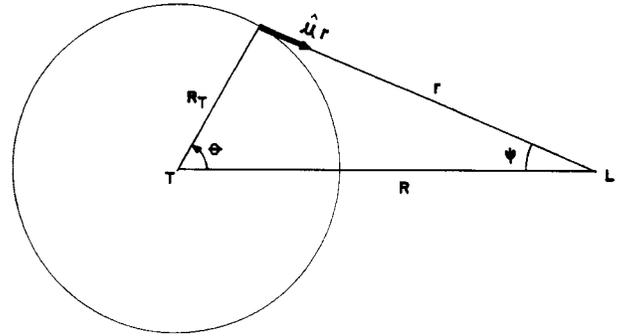


FIGURA 2

A aceleração de  $P$ , devido à atração gravitacional da Terra é:

$$g_0 = \frac{GM}{R_T^2}$$

A aceleração diferencial a que está sujeito  $P$  é

$$\vec{a}_d = \vec{f} - \vec{g}_L = \frac{Gm}{r^2} \hat{u}_r - \frac{Gm}{R^2} \hat{u}_x$$

em que  $M$  é a massa da Terra e  $m$ , a da Lua.

Como  $r^2 = R^2 + R_T^2 - 2RR_T \cos\theta$ , o segundo termo da aceleração diferencial fica:

$$\vec{f} = \left( \frac{GM}{R^2} \right) \frac{\hat{u}_r}{1 - 2(R_T/R)\cos\theta + (R_T/R)^2}$$

Como também  $(R_T/R) \ll 1$  a expressão acima pode ser desenvolvida e, em primeira ordem em  $(R_T/R)$ , temos:

$$\vec{f} = \left( \frac{GM}{R^2} \right) \{1 + 2(R_T/R)\cos\theta\} \hat{u}_1\}$$

Também em primeira ordem,

$$\text{sen}\psi \simeq (R_T/R)\text{sen}\theta \quad , \quad \text{cos}\psi \simeq 1$$

Com isso, a expressão da aceleração diferencial do ponto  $P$  fica:

$$\vec{a}_d = \left( \frac{GM R_T}{R^3} \right) (2\text{cos}\theta \hat{u}_x - \text{sen}\theta \hat{u}_y)$$

e a aceleração total do ponto  $P$  é:

$$\vec{g}_e = \vec{g}_0 + \vec{a}_d$$

A aceleração diferencial é máxima para  $\theta = 0$ , com direção e sentido para Lua, havendo então uma diminuição de  $\vec{g}_e$  no ponto sub-lunar (em que nosso satélite está no zênite). Quando  $\theta = \pi/2$  (na direção perpendicular à da Lua), a aceleração diferencial é

mínima e aponta para o centro da Terra; a aceleração total é máxima. Entre esses dois pontos,  $\vec{g}_e$  não tem a direção do centro da Terra; como a água não suporta forças tangenciais, o envelope aquoso se distorce de modo tal que  $\vec{g}_e$  seja normal à superfície da água. A massa oceânica tende então a se deslocar para as regiões da Terra situadas ao longo da reta que une os centros da Terra e da Lua, em ambos os lados da Terra.

## Bibliografia

- D.L. Boulet, *Methods of Orbit Determinations for the Microcomputer* Willmann-Bell inc., Richmond, Virginia, 1991.
- E.M. Rogers, *Physics for the Inquiring Mind* - Princeton University Press, Princeton, N.J. 1960.
- K.R. Simon, *Mechanics* 2<sup>nd</sup> Ed. - Addison Wesley Publishing Co., 1960.