Estabilidade das Soluções de Equilíbrio Relativo de um Problema Restrito de Quatro Corpos

(Stability of Equilibrium Solutions in a Restricted Four-Body Problem)

Dante Leal Maranhão
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Alagoas
Campus A.C. Simões, 57072-970, Maceió, Alagoas, Brasil
e-mail dante@fapeal.br

Trabalho recebido em 12 de setembro de 1997

Estudaremos o movimento de uma massa infinitesimal submetida à ação gravitacional newtoniana de três outras massas μ, $1-2\mu$ e μ, as quais descrevem uma das configurações centrais encontrada por Eulor em 1767. De fato, o corpo de massa $1-\mu$ está localizado no centro de massa e os dois outros estão situados em posições simétricas com relação ao centro de massa. O presente trabalho está destinado a calcular as seis soluções de equilíbrio relativo deste Problema Restrito de Quatro Corpos e estudar a estabilidade destas soluções.

We study the motion of an infinitessimal mass point under the gravitational action of three mass points of masses μ, $1-2\mu$ and μ moving under the Newton's law of gravitational attraction in circular periodic orbits around their center of masses forming at any time a collinear central configuration. The body of mass $1-2\mu$ is located at the center of mass. The paper proves the existence of six equilibrium point $L_i, i = 1, ..., 6$, and we study the stability this solution.

1. Introdução

A Mecânica Celeste é definida como o campo de conhecimento científico que estuda as conseqüências da segunda lei da dinâmica, *a qual diz que a força F que atua sobre uma partícula de massa m é dada por $F = \frac{d}{dt}(m \cdot v)$, onde v denota a velocidade,* e da lei de gravitação universal. O problema central da mecânica celeste é o problema de n corpos, que consiste em descrever o movimento de n partículas materiais submetidas unicamente às forças de atrações mútuas, de acordo com a lei da gravitação universal. A descrição completa desse problema consiste em resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias, o qual só pode ser resolvido, explicitamente, para o caso $n = 2$ (problema de Kepler).

Ainda que as soluções deste problema sejam conhecidas no caso $n = 2$, sabe-se muito pouco sobre elas para o caso $n \geq 3$. E por isso que o problema de três corpos é objeto de grande número de simplificações. Entre estas simplificações, merece um destaque especial o problema restrito de três corpos, isto é, o problema de três corpos em que uma das massas é infinitesimal, de maneira que sua influência sobre os outros dois sendo desprezível, o movimento destes é o de um problema de dois corpos; o problema restrito de três corpos consiste em descrever o movimento do corpo de massa infinitesimal.

O problema de três corpos se coloca como um desafio para os matemáticos e físicos que testam suas teorias no intuito de resolvê-lo. Após a comprovação de que este problema não é integrável, passou-se a procurar informações qualitativas a seu respeito, motivando assim o surgimento de diversas áreas em matemática. Como conseqüência deste estudo, no final do século XIX e começo do século XX, surgiu a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, onde destacam-se os trabalhos de Poincaré e Liapunov, dando origem à teoria dos sistemas dinâmicos, que representa uma das principais áreas da matemática contemporânea.

Um *movimento periódico* dos n corpos é dado por uma solução do problema de n corpos, onde todas as coordenadas dos vetores-posição são funções periódicas de t, com o mesmo período.

O movimento periódico mais simples é aquele em que as coordenadas não variam com o tempo: os corpos estão parados e a uma tal solução chamamos de *solução de equilíbrio*. O problema de três corpos não admite este tipo de solução.

Em seguida, um movimento periódico também simples é aquele em que os n corpos movem-se em um mesmo plano em órbitas circulares em volta do centro de massa, todos com a mesma velocidade angular. Esta não é uma solução de equilíbrio, no entanto, relativamente a um sistema baricêntrico girando com a mesma velocidade angular, os n corpos estão parados; portanto, nós a chamaremos de *solução de equilíbrio relativo*.

Para o problema de três corpos, estas soluções de fato existem e foram obtidas por Euler em 1767, no caso colinear, e por Lagrange, em 1772, que re-obteve as soluções de Euler e mais duas outras, não colineares.

No presente trabalho, consideramos três corpos que denominaremos de *primários* e os quais denotaremos por P_0, P_1, P_2, com massas m_0, m_1, m_2, respectivamente, movendo-se segundo a lei de gravitação de Newton, em uma solução de equilíbrio colinear do problema de três corpos. Além disso, tomaremos $m_1 = m_2$ e a massa m_0 situada entre m_1 e m_2. Consideraremos um quarto corpo, de massa m_3, que se move no plano definido pelas trajetórias dos outros três, atraído por eles, porém, sem influenciá-los (na prática pode-se considerar que sua massa é desprezível com relação à massa dos demais). Nosso *problema restrito plano e circular de quatro corpos* consiste em descrever o movimento do quarto corpo, isto é, do corpo de massa infinitesimal m_3. Este problema foi introduzido por Moulton em 1900 [4].

Conforme estudo feito em [3], são exatamente seis as soluções de equilíbrio relativos deste problema restrito distribuídas da seguinte maneira: duas soluções triangulares (denotadas por L_5 e L_6), isto é, formando triângulos isósceles com dois dos primários, ficando o terceiro situado sobre o segmento de reta que determina a base do referido triângulo, e quatro colineares (denotadas por L_1, L_2, L_3 e L_4), onde o corpo de massa infinitesimal fica situado na reta determinada pelos primários (ver figura 1.2).

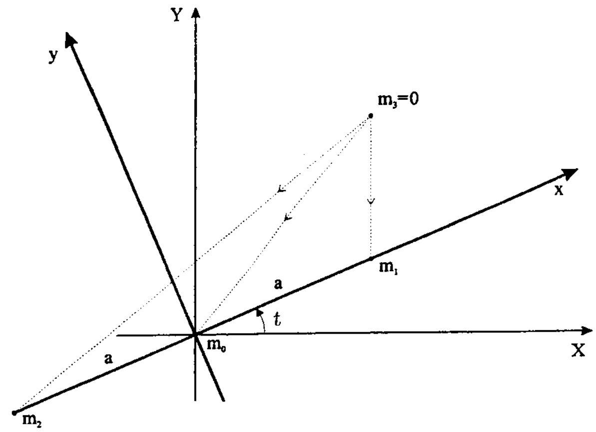

Figura 1.1. Coordenadas siderais (x,y) e coordenadas sinódicas $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

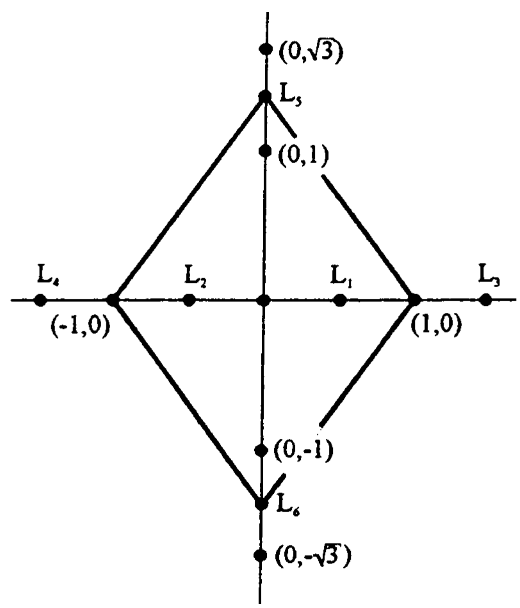

Figura 1.2. Soluçõs de equilíbrio relativo.

No ponto de vista dinâmico do problema, isto significa dizer que colocando-se a massa infinitesimal m_3 no ponto de equilíbrio relativo com velocidade relativa nula, ela permanecerá sempre neste ponto. Uma questão da mais alta importância é saber se ao tentarmos colocar o corpo de massa infinitesimal no ponto de equilíbrio e não conseguirmos em virtude de uma pequena velocidade inicial ou de um pequeno desvio do ponto, será que o movimento resultante da massa m_3 permanecerá próximo do ponto de equilíbrio para todo o tempo. Em caso afirmativo, diremos que a posição de equilíbrio relativo é estável. Neste trabalho, estudaremos a natureza das solução de equilíbrio colineares e triangulares.

2. As equações do movimento em coordenadas siderais e sinódicas

Consideraremos um sistema de referência inercial com origem no centro de massa 0, e denotaremos por (X, Y) as coordenadas do corpo de massa infinitesimal. Este sistema será denominado sideral e nele os primários, de massas m_1 e m_2, descrevem uma mesma órbita circular de raio a em volta da origem com velocidade angular ω.

Utilizando variáveis complexas, as posições dos corpos P_0, P_1 e P_2 serão dadas, respectivamente, por (ver figura 1.1)

$$Z_0 = 0,$$

$$Z_1 = a\exp(i\omega t^*)$$

e

$$Z_2 = a\ \exp[i(\omega t^* + \pi)],$$

onde t^* é o tempo.

A posição do corpo de massa infinitesimal m_3 será $Z = X + iY$. Portanto, a força gravitacional que as massas m_0, m_1 e m_2, exercem sobre a massa infinitesimal m_3 dará a equação

$$Z\text{''} = -k^2\left(\frac{m_0 Z}{|Z|^3} + \frac{m_1[Z - a\exp(i\omega t^*)]}{|Z - a\exp(i\omega t^*)|^3} + \frac{m_2[Z - a\exp[i(\omega t^* + \pi)]]}{|Z - a\exp[i(\omega t^* + \pi)]|^3}\right). \tag{2.1}$$

onde ' denota derivada com relação a t^*, e k^2 é a constante de gravitação Newtoniana.

Introduziremos agora um novo sistema de referência denominado sinódico. Neste sistema os eixos de coordenadas giram em mesmo sentido e com a mesma velocidade angular que os primários, os quais, conseqüentemente, ficam fixos relativamente a este sistema. O novo sistema tem a grande vantagem de permitir uma descrição do problema, a qual não depende do tempo. Denotaremos por $(\tilde{x}, \tilde{y})$ as coordenadas sinódicas do corpo de massa infinitesimal e consideraremos os eixos de coordenadas de maneira que a origem esteja no centro de massa, os primários estejam sobre o eixo x e o sentido de crescimento neste eixo seja de m_2 para m_1. Estas novas coordenadas se relacionam com as coordenadas siderais através da seguinte transformação (ver figura 1.1):

$$Z = \tilde{z}\exp(i\omega t^*) \quad \text{onde} \quad \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}.$$

Uma fácil verificação mostra que

$$Z'' = (\tilde{z}\,'' + 2i\omega\tilde{z}\,' - \omega^2\tilde{z})\exp(i\omega t^*). \tag{2.2}$$

O equilíbrio entre a força de atração gravitacional e a força centrífuga sobre a massa m_1 requer que

$$k^2(m_2 + 4m_0) = 4a^3\omega^2. \tag{2.3}$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1) obtem-se as equações diferenciais que regem o movimento e em seguida fazendo uma transformação de coordenadas, uma mudança de escala no tempo e normalizando as massas, escreve-se as equações do movimento na seguinte forma (análogas às obtidas por Poincaré para o problema restrito de três corpos)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} - 2\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde

$$\Omega = \Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - 2\mu}{P} + 8\mu\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}\right),$$

com

$$\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$P^2 = x^2 + y^2, \quad P_1^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad P_2^2 = (x+1) + y^2,$$

e ponto denota derivada com relação ao tempo.

Observe que fazendo $\mu = 0$ (ou respectivamente $\mu = 1/2$) obtem-se o problema Kepler (ou respectivamente) o problema restrito de três corpos com massas dos primarios iguais (ver [3]).

3. Natureza das soluções de equilíbrio

Nesta seção, escreveremos as equações do movimento na forma hamiltoniana, calcularemos e estudaremos a natureza das soluções de equilíbrio do sistema obtido. A transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= y, \\ y_1 &= \dot{x} - y, \\ y_2 &= \dot{y} + x, \end{aligned} \tag{3.1}$$

converte o sistema (2.4) no sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= H_{y_1}, \\ \dot{x}_2 &= H_{y_2}, \\ \dot{y}_1 &= -H_{x_1}, \\ \dot{y}_2 &= -H_{x_2}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde

$$H = \frac{(y_1 + x_2)^2}{2} + \frac{(y_2 + x_1)^2}{2} - \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{2} - U(x_1, x_2).$$

A função diferenciável $H : E \to \mathcal{R}^2$ induz o campo vetorial $X_H = (H_{y_1}, H_{y_2}, -H_{x_1}, -H_{x_2})$. Observe que a relação entre o hamiltoniano e a integral de Jacobi é dada por $H = -C/2$.

Um ponto $p \in E$ é dito um ponto de equilíbrio do sistema hamiltoniano (3.2) quando $X_H(p) = 0$.

Da expressão de H e de (3.2) segue-se que os pontos de equilíbrio, (x_1, x_2, y_1, y_2) de (3.2) são dados por $(x_1, x_2, -x_2, x_1)$, onde x_1 e x_2 satisfazem as equações

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1}(x_1, x_2) &= 0, \\ \Omega_{x_2}(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, cada um dos seis pontos críticos de Ω nos dá uma solução de equilíbrio do sistema hamiltoniano (3.2).

A matriz da parte linear do sistema hamiltoniano (3.2), é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 + \Omega_{x_1x_1} & \Omega_{x_1x_2} & 0 & 1 \\ \Omega_{x_2x_1} & -1 + \Omega_{x_2x_2} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, seu polinômio característico é

$$P_c(t) = t^4 + (4 - \Omega_{x_1x_1} - \Omega_{x_2x_2})t^2 + \Omega_{x_1x_1} \cdot \Omega_{x_2x_2} - (\Omega_{x_1x_2})^2. \tag{3.3}$$

Quando $\mu = 0$, verifica-se que nos pontos de equilíbrio colineares $L_i, i = 1, ..., 6$ vale (ver [3])

$$\begin{aligned} A &= \Omega_{x_1x_1}(L_i) = 3, \\ B &= \Omega_{x_1x_2}(L_i) = 0, \end{aligned}$$

e

$$C = \Omega_{x_2x_2}(L_i) = 0,$$

consequentememte as raízes características de (3.3) são $t_{1,2} = 0$, $t_3 = i$ e $t_4 = -i$. Portanto, os pontos de equilíbrio colineares correspondem a centro parabólica do sistema hamiltoniano (3.2) quando $\mu = 0$ (ver figura 3.1).

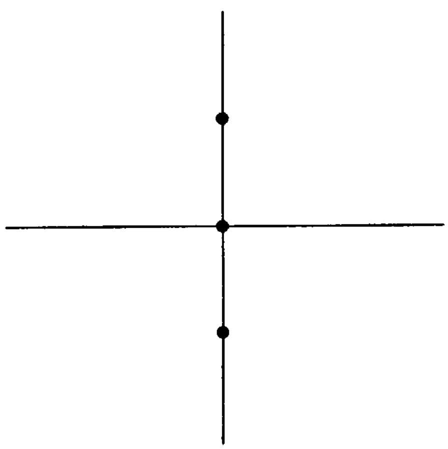

Figura 3.1. Centro parabólico.

Para $\mu \in (0, 1/2]$, sabemos que nos pontos de equilíbrio colineares verificam-se as seguintes relações (ver [3])

$$A = \Omega_{x_1x_1}(L_i) > 0,$$

$$B\Omega_{x_1x_2}(L_i) = 0,$$

e

$$C = \Omega_{x_2x_2}(L_i) < 0.$$

Então as raízes da equação característica (3.3) são duas reais, t_1, t_2 e duas imaginárias, t_3, t_4 (ver figura 3.2). Portanto, os pontos de equilíbrio colineares correspondem a sela centro do sistema hamiltoniano (3.2).

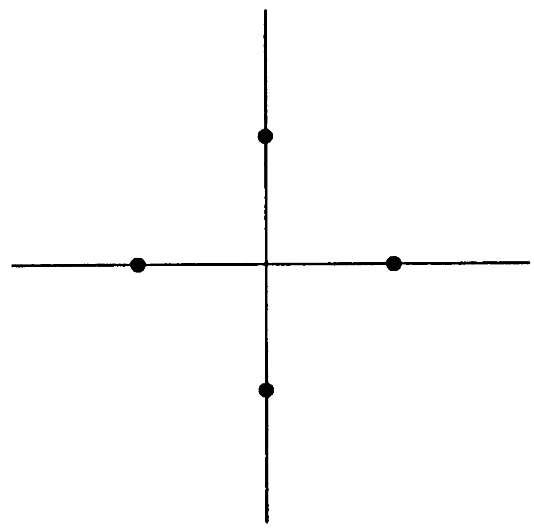

Figura 3.2. Sela complexa.

Para os pontos de equilíbrio triangulares $L_i, i = 5, 6$, verifica-se que (ver [3])

$$B = \Omega_{x_1x_2}(L_i) = 0,$$

e

$$4 - \Omega_{x_1x_1}(L_i) - \Omega_{x_2x_2}(L_i) = 1,$$

Portanto, o polinômio característico (3.3) adquire a seguinte forma

$$P_c(T) = t^4 + t^2 + \beta,$$

onde

$$\beta = A \cdot C = \Omega_{x_1x_1} \cdot \Omega_{x_2x_2} > 0. \tag{3.5}$$

Quando $\mu = 0$, verifica-se que $A = \Omega_{x_1x_1} = 0$ (ver [3]) e, portanto, $\beta = 0$, consequentemente temos que $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = i$ e $t_4 = -i$, isto é, os pontos de equilíbrio triangulares são centros parabólicos (ver figura 3.1).

Para $\mu \in (0, 1/2]$, conforme estudo feito em [3] existe $\mu_0 > 0$ tal que para $0 < \mu < \mu_0$, as raizes características de (3.3) são $t_1 = -t_2$ e $t_3 = -t_4$ são imaginários puros (ver figura 3.3). Consequentemente os pontos de equilíbrio triangulares são centros genéricos.

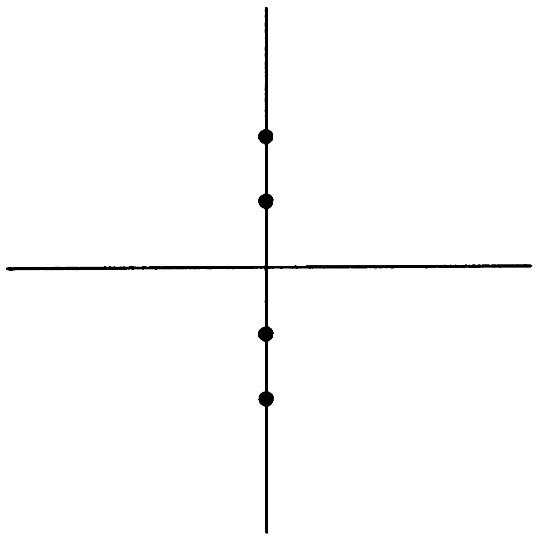

Figura 3.3. Centro genérico.

Quando $\mu = \mu_0$, verifica-se que $t_1 = t_3 = i\sqrt{2/2}$, $t_2 = T_4 = -i\sqrt{2/2}$. Portanto os pontos de equilíbrio triangulares são centros degenerados (ver figura 3.4).

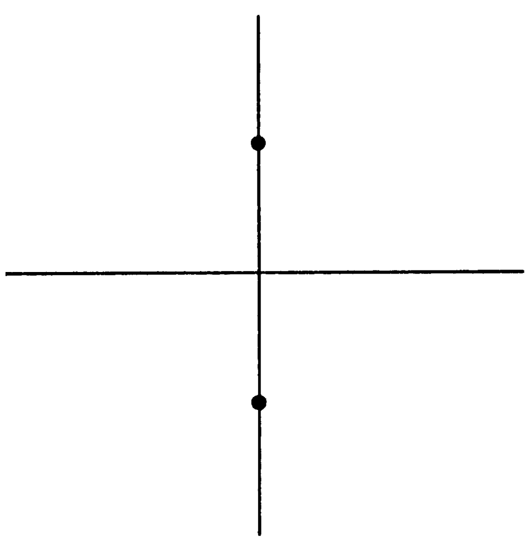

Figura 3.4. Centro degenerado.

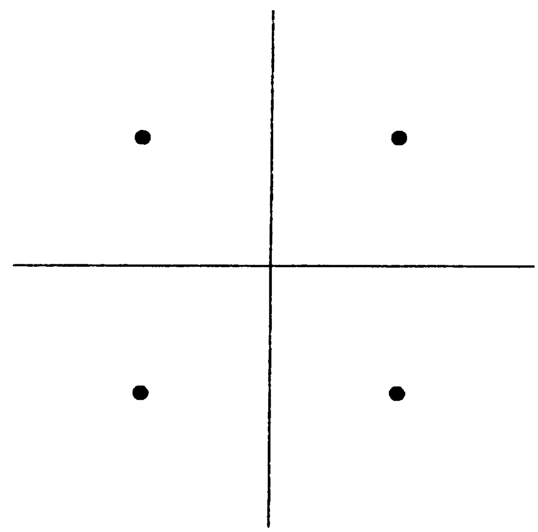

Figura 3.5. Sela complexa.

Quando $\mu_0 < \mu \leq 1/2$, verifica-se que $t_1 = a + bi$, $t_2 = a - bi$, $t_3 = -a - bi$, $t_4 = -a + bi$. (ver figura 3.5) e, portanto, temos sela complexa.

4. Conclusão

Uma questão de grande importância relacionada com o problema é o estudo da estabilidade ou instabilidade das soluções de equilíbrio $L_i, i = 1, ..., 6$.

Se, ao tentar colocar o corpo de massa infinitesimal m_3 com velocidade relativa nula no ponto L_i e não conseguirmos, em virtude de uma pequena velocidade inicial ou de um pequeno desvio do ponto L_i e mesmo assim o movimento resultante da massa infinitesimal m_3 permanece próximo do ponto L_i, para todo o tempo, diremos que esta solução de equilíbrio é estável. Diremos que uma solução de equilíbrio é instável quando não é estável.

Consideremos um sistema de equações diferenciais lineares

$$\dot{X} = AX, \qquad X = (x_1, ..., x_n) \tag{4.1}$$

e suponhamos que a matriz A tenha autovalores distintos $\lambda_1, ...\lambda_n$. Então, uma solução (de equilíbrio de (4.1) é estável se, e somente se, os autovalores $\lambda_1, ...\lambda_n$ são todos imaginários puros (ver [6]).

Conforme estudo feito em [6] verifica-se que a estabilidade da solução de equilíbrio do sistema linearizado não assegura a estabilidade para o sistema não-linear.

Para estudar a estabilidade das soluções de equilíbrio L_i, utilizaremos o seguinte critério estabelecido por Liapunov (ver [6]).

Se uma posição de equilíbrio L_i é estável, então os autovalores da parte linear do sistema são todos imaginários puros. Portanto se existe um autovalor com parte real diferente de zero, a posição de equilíbrio é instável.

Como conseqüência do exposto acima podemos concluir que:

(a) Para $\mu = 0$ todas as soluções de equilíbrio são estáveis;

(b) Para $\mu \in (0, 1/2]$ as soluções de equilíbrio colineares são instáveis para o sistema linear e conseqüentemente instáveis quando vistas como soluções de (3.2).

(c) Para $\mu \in (0, \mu_0]$ temos a estabilidade das soluções de equilíbrio triangulares para o sistema linear.

(d) Quando $\mu_0 \in (\mu_0, 1/2]$ temos que as soluções de equilíbrio triangulares são instáveis, tanto para o sistema linearizado quanto para o sistema original, uma vez que existem autovalores da parte linear do sistema que não são imaginários puros.

Agradecimento: Gostaria de agradecer a José Adonai e a Francisco Vieira Barros, pelas estimulantes conversas que mantivemos a respeito deste trabalho.

Referências

1 M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

2 A. Koestler, *The Sleepwalkers, a History of Man's Changing Vision of the Universe,* Grosset and Dunlap, New York, 1963.

3 D.L. Maranhão, *Estudi del flux d'un problema restringit de quatre cossos*, Tese de Doutorado, Universitat Autònoma de Barcelona, 1995.

4 F.R. Moulton, *On a class of particular solutions of the problem of four bodies*, Amer. J. of Math. **1**, 17 (1900).

5 A.E. Roy, *Orbital motion*, Adam Hilger Ltd, Bristol, 1978.

6 C. L. Siegel e J. K. Moser, *Lecture on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

7 V. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press, New York, 1967.

Notas bibliográficas do autor (falecido após submissão do artigo)

DANTE LEAL MARANHÃO

Dante nasceu em 31 de Maio de 1958 (Vicência, PE), último rebento de uma família numerosa. Concluída a escolaridade de 1º e 2º Graus (em Timbaúba-PE e João Pessoa-PB), cursou a graduação de Matemática em Campina Grande-PB (1980). No ano seguinte, ocorreram dois fatos marcantes: seu ingresso no Mestrado em Matemática (UFPE) e seu casamento com Joluilda.

Em 1983, Dante é aprovado em concurso público do Departamento de Matemática Básica da Universidade Federal de Alagoas - e inicia sua carreira docente, aqui em Maceió. Dois anos depois, sob a orientação de Hildeberto Cabral defende sua Tese de Mestrado (Estabilidade de Órbitas em Torno de um Planeta Oblato), época em que nasceu o primogênito (Luis Henrique) do casal.

Na UFAL, participou intensamente das atividades administrativas e acadêmicas do Departamento, atuando também no Movimento Docente; nessa época, foi Coordenador do Curso de Matemática (1985), Diretor da ADUFAL (1987-99, "Caminho...Caminhando...") e Diretor da CUT-AL (1988-90).

Possuidor de notável coerência política, fruto de uma militância apaixonada pelo Partido dos Trabalhadores, Dante consolidava uma posição de respeito e amizade junto à comunidade universitária buscando a unidade na divergência dos matizes e o avanço nas questões (mais ou menos) consensuais.

Além do domínio técnico-matemático e da autenticidade política, Dante cultivava outra paixão artística: a Música. Nos momentos de descontração, empunhava seu violão e vibrava com as páginas do cancioneiro regional.

Após o nascimento de Gabriela (1989), Dante iniciou os preparativos para realizar seu programa de Doutorado; em 1991, partiu para a Espanha, matriculado na Universidade Autônoma de Barcelona, tendo Jaume Llibre como orientador. Ao tempo em que cuidava de sua Tese de Doutorado, Estudi del Flux d'un Problema Restringit de Quatre Cossos (1995), Dante dinamizou a APEC-Associação dos Pesquisadores e Estudantes em Catalunha (da qual foi presidente) e organizou um quarteto musical - Roendo Unha -, muito bem aceito naquela universidade.

Já de volta ao nosso convívio, Dante retomou, com grande vigor, os trabalhos acadêmicos e políticos: membro do Conselho Científico da FAPEAL, do Conselho Editorial da EDUFAL, Coordenador de Curso de Especialização em Matemática. Em 1996, organizou um Encontro de Equações Diferenciais e Mecânica Celeste, cuja excelente repercussão no meio acadêmico-científico, permitiu vislumbrar projetos qualitativos mais ambiciosos, como parcerias com Departamentos já consolidados.

Infelizmente, os Desígnios do Altíssimo interromperam a trajetória de sua presença. A nós todos, seus amigos e colegas, que tivemos o privilégio de sua convivência, cabe o empenho de resgatar seus compromissos com a Ciência e a Cidadania, na busca da melhoria das condições de vida de todos os trabalhadores.

Antonio Carlos Marques da Silva

Maceió, Outubro de 1997