O (recalcitrante) Operador de Fase

B. Baseia*
Instituto de Física, Universidade de São Paulo
Caixa Postal 66318, CEP 05389-970, São Paulo (SP), Brasil

Trabalho recebido em 10 de agosto de 1996

Ao contrário dos demais observáveis da Mecânica Quântica, a introdução de um operador Hermitiano associado à fase não foi tarefa fácil. No presente artigo apresentamos linhas gerais dessa dificuldade, as várias tentativas de solução, apenas recentemente bem sucedida.

I. Introdução

Um dos postulados da Mecânica Quântica diz que a cada observável do mundo físico podemos associar um operador Hermitiano. Baseado nisso, foram introduzidos os operadores $\widehat{x}, \widehat{p}, \widehat{H}, \widehat{V}(x), \widehat{L}_z, \widehat{S}_z, \widehat{n}$, etc., representando respectivamente a posição, o momento cinético, a energia, a energia potencial, o momento angular (na direção z), o momento angular intrínseco (spin na direção z) e o número de partículas (de certo tipo). Até mesmo (úteis) operadores não Hermitianos foram introduzidos, os quais não estão relacionados a observáveis. Como exemplo destes citamos os operadores $\widehat{a}^\dagger$ e $\widehat{a}$, de criação e aniquilação de partículas, ou os operadores σ^+ e σ^-, que elevam ou abaixam a excitação atômica de uma unidade - entre outros.

Uma questão que surgia nesse cenário era: por que não introduzir também um operador associado à fase, seja a fase relacionada ao momento angular $\widehat{L}_z$, formando o par canonicamente conjugado $\{\widehat{L}_z, \widehat{\phi}\}$, ou a fase relacionada ao número de fótons no campo de radiação luminoso $\widehat{n}$, formando o par canonicamente conjugado $\{\widehat{n}, \widehat{\phi}\}$?

A primeira tentativa nessa direção ocorreu com Dirac[1], em 1927, quando ele propôs a relação de comutação para o par $\widehat{L}_z$ e $\widehat{\phi}$:

$$[\widehat{L}_z, \widehat{\phi}] = \widehat{L}_z\widehat{\phi} - \widehat{\phi}\widehat{L}_z = i \tag{1}$$

a qual acarretava a relação de incerteza

$$\Delta\widehat{L}_z\Delta\widehat{\phi} \geq 1/2 \tag{2}$$

obtida da Eq.(1) mais o resultado geral

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = i\widehat{C} \Rightarrow \Delta\widehat{A}\Delta\widehat{B} \geq 1/2|\langle\widehat{C}\rangle| \tag{3}$$

em que $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são operadores genéricos, pela identificação $\widehat{A} = \widehat{L}_z$, $\widehat{B} = \widehat{\phi}$ e $\widehat{C} = \widehat{1}$.

Em 1963 Judge e Lewis[2], mostraram que a relação de incerteza envolvendo $\widehat{L}_z$ e $\widehat{\phi}$ devia ser corrigida para

$$\Delta\widehat{L}_z \frac{\Delta\widehat{\phi}}{1 - 3(\frac{\Delta\widehat{\phi}}{\pi})^2} \geq 0.3/2 \tag{4}$$

e mostraram também que $\widehat{L}_z$ era Hermitiano somente no sub-espaço das funções periódicas: $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$, sendo esta a principal dificuldade com o operador de fase, na Mecânica Quântica.

Na Ótica Quântica o par de operadores canonicamente conjugados $\widehat{L}_z, \widehat{\phi}$ foi substituido pelo par de operadores canonicamente conjugados $\widehat{n}, \widehat{\phi}$, em que $\widehat{n}$ é o operador de número (de fótons) e $\widehat{\phi}$ é o operador de fase, do campo luminoso. Mesmo na Mecânica Quântica operadores análogos, $\widehat{n}$ e $\widehat{\phi}$, aparecem no caso do oscilador harmônico. Na Ótica Quântica, o objetivo era quantizar a fase ϕ na expressão do campo luminoso

$$\widehat{E}(x,t) = E_0\{\widehat{a}\exp^{i(kx-\omega t+\phi)} + \widehat{a}^\dagger\exp^{-i(kx-\omega t+\phi)}\} \tag{5}$$

onde $E_0 = (\hbar\omega V/2\varepsilon)^{1/2}$, $\widehat{a}(\widehat{a}\dagger)$ é o operador de aniquilação (criação) de fótons no campo luminoso.

A tentativa inicial de Dirac[1], para o caso do campo luminoso, ou do oscilador harmônico, foi assumir que

$$[\widehat{n}, \widehat{\phi}] = \widehat{n}\widehat{\phi} - \widehat{\phi}\widehat{n} = i \tag{6}$$

o que acarretava

$$\Delta\widehat{n}\Delta\widehat{\phi} \geq 1/2. \tag{7}$$

onde notamos que para $\Delta\widehat{n} \ll 1 \Rightarrow \Delta\phi > 2\pi$, que é um resultado sem sentido.

Em 1963, Louisell [3] mostrou que a relação de comutação (6) levava a uma indeterminação. Calculando os elementos de matriz na base de número, $\langle n|[\widehat{n},\widehat{\phi}]|n'\rangle$, ele obteve facilmente que

$$(n-n')\langle n|\widehat{\phi}|n'\rangle = i\delta_{n,n'} \tag{8}$$

que deixa $\langle n|\widehat{\phi}|n'\rangle$ indeterminado, pois quando $n \neq n'$ o segundo membro se anula, enquanto que para $n = n'$ o primeiro membro se anula. Dirac[4] havia tentado contornar essa dificuldade, fazendo a decomposição do operador de aniquilação $\widehat{a}$, em termos da amplitude $\sqrt{\widehat{n}}$ e da fase, na forma $e^{i\widehat{\phi}}$, assim:

$$\widehat{a} = \sqrt{\widehat{n}}e^{i\widehat{\phi}} \tag{9}$$

e então,

$$\widehat{a}^{\dagger} = e^{-i\widehat{\phi}}\sqrt{\widehat{n}}. \tag{10}$$

Novamente, porém, outros problemas foram levantados, por Brunet[5] e Harms et al[6]. Louisell[3] havia tentado uma alternativa salvadora, trocando o operador de fase na forma $\widehat{\phi}$, pela forma $\sin\widehat{\phi}$ (ou $\cos\widehat{\phi}$). Nesse caso ele assumia a nova relação de comutação

$$[\widehat{n}, \sin\widehat{\phi}] = -i\cos\widehat{\phi} \tag{11}$$

ou, alternativamente,

$$[\widehat{n}, \cos\widehat{\phi}] = i\sin\widehat{\phi}. \tag{12}$$

Essa tentativa melhorava as coisas, mas não resolvia todas as dificuldades, conforme apontado por Susskind e Glogower **(SG)**[7], em 1964, os quais retomaram a decomposição de Dirac [Eqs.(9)-(10)] introduzindo o operador de fase na forma

$$e^{i\widehat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{\widehat{n}}}\widehat{a} \tag{13}$$

donde,

$$e^{-i\widehat{\phi}} = \widehat{a}^{\dagger}\frac{1}{\sqrt{\widehat{n}}}. \tag{14}$$

Nesse caso, a representação de $e^{i\widehat{\phi}}$ na base de número dá

$$\begin{aligned} e^{i\widehat{\phi}} &= \widehat{1}\ \ e^{i\widehat{\phi}}\ \ \widehat{1} \\ &= (\sum_{0}^{\infty}|n\rangle\langle n|)\ \ e^{i\widehat{\phi}}\ \ (\sum_{0}^{\infty}|n'\rangle\langle n'|) = \sum_{n,n'=0}^{\infty}\langle n|e^{i\widehat{\phi}}|n'\rangle|n\rangle\langle n'| \\ &= \sum_{n,n'=0}^{\infty}\langle n|\frac{1}{\sqrt{\widehat{n}}}\widehat{a}|n'\rangle|n\rangle\langle n'| = \sum_{n,n'=0}^{\infty}\langle n|n'-1\rangle|n\rangle\langle n'| = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+1| \end{aligned} \tag{15}$$

e, similarmente,

$$e^{-i\widehat{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty}|n+1\rangle\langle n|. \tag{16}$$

Note então que $e^{\pm i\widehat{\phi}}$ são operadores tipo-escada: enquanto $e^{i\widehat{\phi}}$ faz a excitação descer de 1 nível , $e^{-i\widehat{\phi}}$ fá-la subir de 1 nível, isto é,

$$e^{\pm i\widehat{\phi}}|n\rangle = |n \mp 1\rangle. \tag{17}$$

Os estados do tipo

$$|\phi_{\pm}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}e^{\pm in\phi}|n\rangle \tag{18}$$

são auto-estados dos operadores $e^{\pm i\widehat{\phi}}$, com autovalores $e^{\pm i\phi}$, respectivamente. Para mostrar isso, basta aplicar as formas (15) e (16).

Porém, há também problemas com esse operador de fase ($e^{\pm i\widehat{\phi}}$), pois ele não é unitário[8] e, como consequência, $\widehat{\phi}$ não é Hermitiano. De fato resulta,

$$e^{i\widehat{\phi}}e^{-i\widehat{\phi}} = 1 \tag{19}$$

enquanto que

$$e^{-i\widehat{\phi}}e^{i\widehat{\phi}} = 1 - |0\rangle\langle 0|. \tag{20}$$

A essa altura as coisas estavam tão complicadas para o lado do operador de fase que chegou-se a pensar, seriamente, que um tal operador de fase Hermitiano não existiria. Mais que isso, Levy-Leblond[9] saiu em defesa do operador de fase não-Hermitiano, num artigo intitulado: "Who is afraid of a non-Hermitean operator?", abrindo mão daquele postulado da Mecânica Quântica citado no início desse artigo, que exige a hermiticidade dos observáveis. Note na Eq.(20) que "faltava pouco" para $e^{i\widehat{\phi}}$ ser um operador unitário: apenas a componente do vácuo $|0\rangle\langle 0|$ atrapalhava essa propriedade, fazendo diferir $e^{i\widehat{\phi}}e^{-i\widehat{\phi}}$ de $e^{-i\widehat{\phi}}e^{i\widehat{\phi}}$.

Em 1968, Carruthers e Nieto[10] escreveram um longo artigo de revisão apontando as várias tentativas e dificuldades na definição de um bom operador de fase. Eles conseguiram introduzir um operador de fase aproximadamente unitário, porém, apenas no limite de altas excitações. Para um campo com poucos fótons, o procedimento falhava novamente. Em 1986, Barnett e Pegg[11] tentaram de novo um operador de fase unitário, porém o mesmo devia atuar num espaço de funções estendido, incluindo estados de número negativos (estados não-físicos).

II. Operador de Fase de Pegg-Barnett

Em 1988, finalmente(como parece) Pegg e Barnett **(PB)**[12, 15] foram felizes numa segunda tentativa de introduzir um operador exponencial de fase, unitário. Eles definiram o seguinte operador de fase

$$\widehat{\phi} = \sum_{m=0}^{M} \theta_m |\theta_m\rangle\langle\theta_m| \tag{21}$$

onde $|\theta_m\rangle$ é o estado de fase[14] (representado na base de número)

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \sum_{n=0}^{M} e^{in\theta_m}|n\rangle \tag{22}$$

onde a fase θ_m é dada por

$$\theta_m = \theta_0 + (\frac{2\pi}{M+1})m, \quad m = 0, 1, 2, ...M \tag{23}$$

e θ_0 é uma fase de referência, definida no particular estado de fase

$$|\theta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \sum_{n=0}^{M} e^{in\theta_0}|n\rangle, \tag{24}$$

obtida de (22) para $m = 0$. A escolha (23) garante a ortonormalização dos estados de fase, isto é,

$$\langle\theta_m|\theta_{m'}\rangle = \frac{1}{M+1}\left\{\sum_{n=0}^{M} e^{i(\theta_{m'}-\theta_m)n}\right\}$$

$$= \frac{1}{M+1} \left\{\frac{e^{i\xi(M+1)}-1}{e^{i\xi}-1}\right\} = \delta_{m,m'} \tag{25}$$

onde $\xi = [2\pi/(M+1)](m-m')$.

O novo operador de fase [11]-[13] definido em (21) e o novo estado de fase, definido em (22) [mais a condição suplementar (23)] são assim construídos num espaço de Hilbert de dimensão finita M. O truque utilizado por **PB**[12] consiste em fazer as contas usando esses dois ingredientes num espaço de dimensão finita M e fazer o limite $M \to \infty$ no final das operações. Esse procedimento lembra aquele usado em estudos de fenômenos críticos, onde também se faz o limite termodinâmico $(M \to \infty, V \to \infty)$ ao final das operações. Lembra também o tratamento da partícula livre, em Mecânica Quântica, supondo-a numa caixa de comprimento l, fazendo o limite $l \to \infty$ no final das operações.

A definição de operador de fase de **PB** em (21) corresponde a tomar o operador exponencial de fase $e^{i\widehat{\phi}}$ de **SG** na forma

$$e^{i\widehat{\phi}} = \sum_{n=0}^{M} |n\rangle\langle n+1| \;+\; e^{i(M+1)\theta_0}|M\rangle\langle 0| \tag{26}$$

ou

$$e^{-i\widehat{\phi}} = \sum_{n=0}^{M} |n+1\rangle\langle n| \;+\; e^{-i(M+1)\theta_0}|0\rangle\langle M| \tag{27}$$

que difere do operador exponencial de fase de **SG** (ver Eqs.(15), (16)) pela inclusão do último termo na (26), além do truncamento do espaço: $\sum_n^\infty \to \sum_n^M$. O limite $M \to \infty$ é tomado ao final das operações algébricas. Com esta modificação o operador de fase fica sendo unitário[12]. Note que a inclusão do termo mencionado leva o operador exponencial de fase de **SG**, que era um operador tipo escada [ver Eqs.(15),(16)], para um operador cíclico. A prova da correspondência

$$\widehat{\phi} = \sum_{n=0}^{M} \theta_m|\theta_m\rangle\langle\theta_m| \Leftrightarrow e^{i\widehat{\phi}} = \sum_{n=0}^{M} |n\rangle\langle n+1| + e^{i(M+1)\theta}|M\rangle\langle 0| \tag{28}$$

se faz passando a Eq.(21) da representação de fase para a representação de número.

A relação de comutação entre os operadores (Hermitianos) $\widehat{n}$ e $\widehat{\phi}$, antes assumida como na Eq.(6), acarretando a indeterminação (8), agora tem a seguinte forma[13]

$$[\widehat{n}, \widehat{\phi}] = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{n \neq n'}^{M} \frac{(n-n') \exp\left[i(n-n')\theta_0\right] |n'\rangle\langle n|}{\exp\left[i(n-n')2\pi/(n+1)\right] - 1} \tag{29}$$

acarretando, no limite $M \to \infty$,

$$\langle n|\widehat{n}, \widehat{\phi}|n'\rangle = (n-n')\langle n|\widehat{\phi}|n'\rangle = -i(1-\delta_{n,n'})e^{i(n'-n)\theta_0} \tag{30}$$

resultado que pode ser obtido diretamente das Eqs.(21),(23), e que remove a indeterminação na Eq.(8).

III. Propriedades

A partir da Eq.(23) podemos calcular a probabilidade p_n de encontrar n fótons, num campo luminoso no estado de fase $|\theta_m\rangle$ [Eq.(21)],

$$p_n = |\langle n|\theta_m\rangle|^2 = \frac{1}{M+1} \tag{31}$$

mostrando que a probabilidade p_n não depende de n, sendo uniforme em n. Inversamente, se o campo luminoso estivesse num estado de número $|n\rangle$, a probabilidade p_{θ_m} de encontrá-lo com a fase θ_m, seria[15]

$$p_{\theta_m} = |\langle n|\theta_m\rangle|^2 = \frac{1}{M+1} \tag{32}$$

que é independente de θ_m.

Esses dois resultados, (31) e (32), são decorrência da relação de incerteza, segundo a qual a **determinação** de um observável acarreta a **indeterminação** do observável canonicamente conjugado. Assim, a fase é uma variável aleatória no estado de número, enquanto o número é uma variável aleatória no estado de fase.

Utilizando a Eq.(21) obtemos

$$\langle n|\widehat{\phi}|n\rangle = \sum_{m=0}^{M} \theta_m |\langle\theta_m|n\rangle|^2 = \theta_0 + \pi\frac{M}{M+1} \tag{33}$$

e

$$\langle n|\widehat{\phi}^2|n\rangle = \sum_{m=0}^{M} {\theta_m}^2 |\langle\theta_m|n\rangle|^2 = {\theta_0}^2 + 2\pi\theta_0 + \frac{4\pi^2 M(M+1/2)}{3(M+1)^2}. \tag{34}$$

No limite $M \to \infty$ temos,

$$\langle n|\widehat{\phi}|n\rangle = \theta_0 + \pi \tag{35}$$

$$\langle n|\widehat{\phi}^2|n\rangle = {\theta_0}^2 + 2\pi\theta_0 + \frac{4\pi^2}{3}. \tag{36}$$

e então a variância (ruído) na fase

$$\Delta\widehat{\phi} = (\langle\widehat{\phi}^2\rangle - \langle\widehat{\phi}\rangle^2)^{1/2}$$

resulta

$$\Delta\widehat{\phi} = \pi/\sqrt{3} \tag{37}$$

onde notamos que $\Delta\widehat{\phi} \neq 2\pi$, ao contrário do resultado intuitivo $\Delta\widehat{\phi} = 2\pi$ (num estado de número esperava-se que a incerteza na fase seria a maior possível, isto é, $\Delta\widehat{\phi} = 2\pi$).

Por outro lado, é fácil obter que $\Delta\widehat{\phi}$ num estado de fase é zero: $\Delta\widehat{\phi}_{|\theta_m\rangle} = 0$, enquanto que, sendo

$$\langle\theta_m|\widehat{n}|\theta_m\rangle = \frac{1}{M+1}\left\{\sum_{n,n'=0}^{M} n e^{i(n-n')\theta_m}\delta_{n,n'}\right\} = \frac{1}{M+1}\left\{\frac{(M+1)M}{2}\right\} = \frac{M}{2}, \tag{38}$$

e

$$\langle\theta_m|\widehat{n}^2|\theta_m\rangle = \frac{1}{M+1}\left\{\sum_{n,n'=0}^{M} n^2 e^{i(n-n')\theta_m}\delta_{n,n'}\right\}$$

$$= \frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M} n^2 = \frac{1}{M+1}\left\{\frac{M(M+1(2M+1))}{6}\right\} \tag{39}$$

obtemos a variança do operador de número $\widehat{n}$ no estado de fase $|\theta_m\rangle$

$$\Delta n^2 = \langle\widehat{n}^2\rangle - \langle\widehat{n}\rangle^2 \propto \frac{M^2}{12} \to \infty \tag{40}$$

no limite $M \to \infty$.

O resultado (37) pode ser comparado com aquele obtido num campo clássico, de fase aleatória[15]:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \phi d\phi = \theta_0 + \pi \tag{41}$$

donde,

$$\Delta\phi = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}(\phi-\bar{\phi})^2 d\phi\right\}^{1/2} = \pi/\sqrt{3}. \tag{42}$$

Em resumo, se o campo luminoso está num estado de fase $|\theta_m\rangle$, então $\Delta\widehat{n} = \infty$ e $\Delta\widehat{\phi} = 0$, enquanto que $\Delta\widehat{n} = 0$ e $\Delta\widehat{\phi} = \pi/\sqrt{3}$ num estado de número $|n\rangle$.

Que ocorre com $\Delta\widehat{n}$ e $\Delta\widehat{\phi}$ num estado coerente $|\alpha\rangle$? O estado coerente é aquele definido como auto-vetor do operador de aniquilação $\widehat{a}$:

$$\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{43}$$

resultando[16]

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{44}$$

Nesse estado obtemos[15]

$$\Delta\widehat{n} = \sqrt{\bar{n}}\ , \tag{45}$$

$$\Delta\widehat{\phi} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}\ , \tag{46}$$

de modo que

$$\Delta\widehat{n}\Delta\widehat{\phi} = \frac{1}{2}\ , \tag{47}$$

o estado coerente sendo um estado intermediário, entre os estados de número $|n\rangle$ e de fase $|\theta_m\rangle$: ele exibe incertezas finitas, diferentes de zero, tanto no número quanto na fase. A condição de validade da relação de incerteza $\Delta\widehat{n}\cdot\Delta\widehat{\phi} \geq 1/2$, foi investigada recentemente[17]. Foi mostrado que ela vale para estados onde $\Delta\widehat{\phi} < \pi/\sqrt{3}$.

IV. Comentários e Conclusão

Diversas tentativas para introduzir um operador de fase na teoria quântica (Mecânica Quântica ou Ótica Quântica), desde 1927, fracassaram. As dificuldades, no caso do campo luminoso (Ótica Quântica) estavam relacionadas à aparente inexistência de um operador de fase Hermitiano. Apenas recentemente, em 1988, Pegg e Barnett conseguiram contornar essa dificuldade da maneira mencionada na Sec.II. O enfoque aqui foi para o campo luminoso quantizado (Ótica Quântica) mas o tratamento se estende naturalmente ao caso do oscilador harmônico quantizado (Mecânica Quântica), devido à analogia entre um oscilador harmônico e um modo do campo luminoso, quantizados. Várias investigações na área da Ótica Quântica, envolvendo esses operadores e estados de fase foram realizadas posteriormente[18]. Dentre elas, mencionamos a proposta para um novo estado intermediário [19], INPS, que interpola entre os estados **complementares** de número $|n\rangle$ e de fase $|\theta_m\rangle$. Também, mencionamos a proposta para medir a variança(ruído) no operador de fase[20], utilizando a experiência de espalhamento de átomos por luz[21].

Agradecimentos

A Milton Ferreira de Souza, pela Ref.21. Ao CNPq pelo suporte parcial desse trabalho.

*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa (PB).

References

[1] P.A.M.Dirac, Proc.R.Soc., London, Ser. **A114**, 243 (1927).

[2] D.Judje e J.T. Lewis, Phys. Lett. **5**, 189 (1963); **5**, 190 (1963).

[3] W.H. Louisell, Phys. Lett. **7**, 60 (1963).

[4] Ver, por exemplo: S.S. Schweber, **Relativity, Group and Topology** (North Holland (1984)), pg. 62.

[5] H.Brunet, Phys. Lett. **10**, 172 (1964).

[6] J. Harms e J. Lorigny, Phys. Lett. **10**, 173 (1964).

[7] L.Susskind e J. Glogower, Physics **1**, 49 (1964).

[8] Diz-se que um operador $\widehat{A}$ é unitário quando $\widehat{A}\widehat{A}^{\dagger} = \widehat{A}^{\dagger}\widehat{A} = \widehat{1}$. Se $\widehat{\phi}$ é Hermitiano, então $e^{i\widehat{\phi}}$ é unitário; e vice-versa.

[9] J.M. Levy-Leblond, Ann. Phys. **101**, 319 (1976).

[10] P. Carruthers e M.M. Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968); ver também: R. Lynch, Phys. Rep. **256**, 367 (1995).

[11] S.M. Barnett e D.T. Pegg, J. Phys. **A49**, 3849 (1986).

[12] D.T. Pegg e S.M. Barnett, Europhys. Lett. **6**, 483 (1988).

[13] D.T. Pegg e S.M. Barnett, Phys. Rev. **A39**, 1665 (1989).

[14] R. Loudon, *Quantum Theory of Light* (Oxford Univ. Press, Oxford(1973)), 1^{st} Ed.

[15] S.M. Barnett e D.T. Pegg, J. Mod. Opt. **36**, 7 (1988).

[16] R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2539 (1963); **131**, 276 (1963); ver também: H.M. Nussenzveig, *Introduction to Quantum Optics* (Gordon and Breach, NY (1973)), Caps. 3 e 4.

[17] A. Lindner et al., Phys. Lett. **A218**, 1 (1996).

[18] A. Royer, Phys. Rev. **A53**, 70 (1996), e referências alí contidas.

[19] B. Baseia, A.F. de Lima e G.C. Marques, Phys. Lett. **A204**, 1 (1995); J. Mod. Opt. **43**, 729 (1996).

[20] B. Baseia, C.M. Dantas, V.S. Bagnato e R. Vyas, Phys. Lett. **A194**, 153 (1994); B. Baseia, G.C. Marques e V.S. Bagnato, Phys. Lett. **A200**, 7 (1995). Sobre medida da fase, ver: S.M. Barnett e D.T. Pegg, Phys. Rev. Lett. **76**, 4148 (1996); Z.B. Birula e I.B. Birula, Appl. Phys. **B60**, 275 (1995).

[21] Os primeiros estudos sobre esse tipo de espalhamento foram propostos por P.L. Kapitza e P.A.M. Dirac, Phyl. Soc. Phys. Sci. **29**, 297 (1933). Os experimentos nessa área, porém, tiveram de esperar pela invenção do laser (1960) e pela construção de cavidades especiais (1980).