

Estudo de um Fenômeno Quântico através da Mecânica Semi-Clássica não Relativística

(Study of quantum phenomenon by non relativistic Semi-Classical Mechanics)

G. A. Santarine, A. C. M. Stein-Barana

Departamento de Física, IGCE-Unesp

Caixa Postal 178 - CEP: 13500-970 Rio Claro, São Paulo, Brasil

Trabalho recebido em 11 de julho de 1996

Com auxílio de um tópico fundamental da Física (Leis de Conservação da Energia e Momentum) normalmente ensinado no segundo grau, o presente trabalho tem o objetivo de estimular e estabelecer um contato inicial dos estudantes secundaristas com a Física Moderna, através de outro conceito também fundamental ditado pelo caráter dualístico onda-partícula. A interação da radiação eletromagnética com a matéria é examinada do ponto de vista semi-clássico não relativístico.

Abstract

With support of a fundamental physics theme (conservation laws of energy and momentum) usually teaching in the high school, the present works pretend stimulate and establish a first contact of the students with a Modern Physics through by other fundamental idea saying by the dual character wave-particle. The interaction of electromagnetic radiation with a matter is investigate by the semi-classical non relativistic point of view.

Introdução

Este trabalho tem o propósito de estimular a curiosidade de estudantes do 2^o grau bem como alunos iniciantes ao estudo da Física, sobre o comportamento de sistemas quânticos e seu caráter dualístico. O problema ora proposto refere-se as previsões teóricas relativas ao espalhamento elástico de fótons por elétrons livres (uma das três possibilidades de interação da radiação eletromagnética com a matéria denominado espalhamento Compton). O tratamento apresentado é feito em termos da Mecânica Clássica, contrariamente ao encontrado nos livros textos convencionais, onde um conhecimento prévio da Teoria da Relatividade se faz necessário ao entendimento do fenômeno. Em nosso caso, a colisão do quantum de luz (fóton) com o elétron é tratada pelo quadro clássico do choque entre duas esferas rígidas, e desta forma com grande simplicidade conceitual evidencia-se que uma fração da energia do fóton incidente é absorvida pelo elétron em repouso enquanto parte é espalhada, ambos se comportando como

se possuíssem natureza corpuscular. Numa primeira aproximação um fato de destaque é que este tratamento ao ser aplicado à faixa de radiações incidentes de baixas energias sugere que o deslocamento Compton $\Delta\lambda$ converge para mesma expressão que é encontrada quando do tratamento relativístico. Como objeto central deste artigo, coloca-se a questão do limite de validade desta aproximação para o caso de energias intermediárias ou altas do fóton incidente, quando comparada aos resultados experimentais. Inicialmente na seção I o espalhamento Compton é estabelecido em termos das informações que devem ser fornecidas e das quantidades ou grandezas a serem calculadas. A solução deste problema proveniente do tratamento supondo o elétron espalhado classicamente é apresentado logo a seguir. Cálculos analíticos juntamente com gráficos de três variáveis evidenciando o intervalo de validade desta aproximação são ilustrados na seção II. É interessante sugerir aos estudantes a utilização de 'personal computers' uma vez que podem ser de grande va-

lia em simulações mais detalhadas para diferentes energias de fótons incidentes, e seus consequentes efeitos sob o fóton espalhado. Softwares tais como “Mathematica” para solução analítica e “Surfer” para elaboração de gráficos ficam como sugestões aos leitores.

I. O efeito Compton

O problema fundamental neste efeito consiste em se estimar o comprimento de onda λ' do fóton espalhado por um elétron livre em alvos de elementos leves. Para este caso, consideramos que:

- i. o elétron é livre porque sua energia de ligação ao núcleo é muito menor que a energia $E = h\nu$ do fóton incidente.
- ii. o elétron está em repouso, uma vez que sua velocidade inicial é pequena em comparação com sua velocidade de recuo.

Como consequência natural do efeito Compton observa-se que o fóton pode ser espalhado em diversos ângulos ϕ o comprimento de onda espalhado λ' é sempre maior que o comprimento de onda incidente λ , crescendo com o ângulo de espalhamento.

O tratamento tradicional deste fenômeno está baseado nas leis de conservação da energia e momentum na colisão elétron-fóton (Fig. 1) usando-se da dinâmica relativística. A energia de repouso do elétron é m_0c^2 e a energia de recuo $mc^2(m = m_0/(1 - v^2/c^2)^{1/2})$. O deslocamento do comprimento de onda assim obtido a partir destas leis de conservação é expresso por:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\phi) \quad (1)$$

onde

c = velocidade da luz

h = constante de Planck

m_0 = massa de repouso do elétron

resultados estes originalmente obtidos por Compton. Este comportamento gerado a partir da equação (1) pode ser ilustrado pela superfície plana (Fig. 2) onde os eixos correspondentes a valores para comprimento de onda do fóton incidente, ângulos de espalhamento e comprimento de onda do fóton espalhado estão correlacionados.

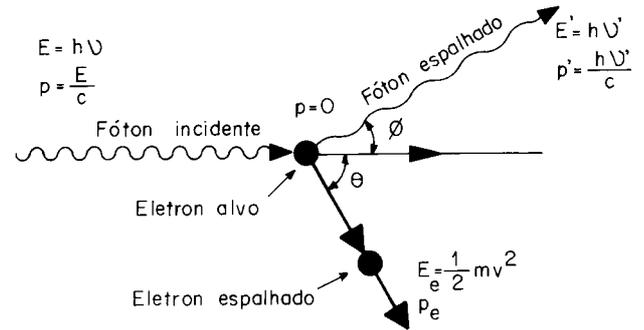


Figura 1. Efeito Compton. O fóton incide da esquerda para a direita e o elétron encontra-se em repouso. O fóton é espalhado segundo o ângulo ϕ .

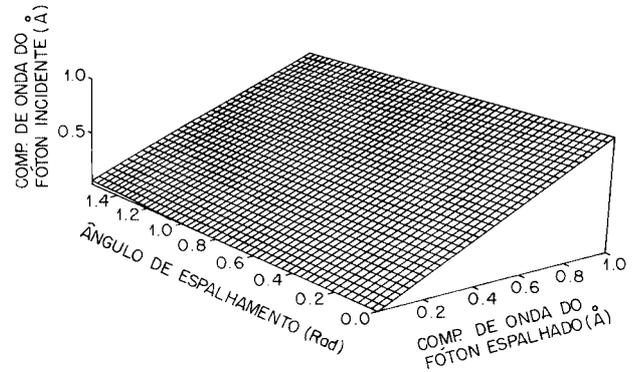


Figura 2. Solução gráfica do Efeito Compton usando o tratamento relativístico convencional para o elétron de recuo.

II. Cálculo analítico para elétron espalhado classicamente e discussões

O tratamento aqui apresentado difere dos textos convencionais sobre o assunto uma vez que a energia cinética do elétron de recuo será tratada do ponto de vista clássico e não relativístico como costumeiramente encontrado.

Aplicando-se as leis de conservação de energia e momentum para a colisão elástica entre o fóton e o elétron, temos de acordo com a Fig. 1:

$$E = E' + E_e \quad (2)$$

e

$$\begin{cases} p = p_e \cos\theta + p' \cos\phi \\ 0 = p_e \sin\theta - p' \sin\phi \end{cases} \quad (3)$$

onde

E = energia do fóton incidente

E' = energia do fóton espalhado

E_e = energia de recuo do elétron

θ = ângulo entre a direção do fóton incidente e a direção do elétron espalhado

ϕ = ângulo entre a direção de incidência e espalhamento do fóton

p' = momentum do fóton espalhado

p_e = momentum do elétron espalhado

p = momentum do fóton incidente

Explicitando o valor de $\cos\theta$ na primeira das expressões (3), o valor de $\sin\theta$ na segunda das expressões (3) e aplicando a relação trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obtemos:

$$p_e^2 = p'^2 + p^2 - 2pp'\cos\phi \quad (4)$$

Considerando-se a energia cinética do elétron espalhado como sendo clássica podemos escrever que:

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m} \quad (5)$$

onde m é a massa do elétron.

Substituindo-se (4) em (5) obtemos:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{2mc} \frac{(\lambda' - \lambda)^2}{\lambda\lambda'} + \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \quad (6)$$

onde:

λ = comprimento de onda do fóton incidente = c/ν

λ' = comprimento de onda do fóton espalhado = c/ν'

c = velocidade da luz

h = constante de Planck

A expressão (6) assim obtida, pode ser analisada de duas formas distintas conforme se segue:

Em primeiro lugar a teoria que gera a expressão (1) (a fórmula de Compton) é mais geral que a teoria que gera a fórmula (6) posto que a admissão da energia de recuo do elétron (energia cinética clássica) é menos geral que a admissão da energia de recuo do elétron segundo a fórmula relativística. No entanto, e muito estranhamente, a fórmula (1) parece ser menos geral que a fórmula (6) na medida em que a segunda contém

um termo adicional não contido na primeira. Deste modo, obtém-se, a partir de uma teoria menos geral, uma expressão mais geral, o que é difícil de ser conciliado à luz do *Princípio da Correspondência* o qual explica a teoria menos geral como um caso particular e/ou como um caso limite da teoria mais geral. Observa-se que esta equação é idêntica à expressão (1), elaborada por Compton, a menos da quantidade $\frac{h}{2mc} \left(\frac{(\lambda' - \lambda)^2}{\lambda'\lambda} \right)$, a qual assume valores pequenos comparativamente ao segundo termo do segundo membro de (6) e assim, neste regime, a ‘aproximação’ é válida de um ponto de vista meramente prático. Isto equivale dizer que a energia do fóton incidente é relativamente baixa, ou seja elétrons de recuo espalhados com energia cinética tratada de forma clássica ou relativística revelam o mesmo comportamento. Poderia este exemplo possibilitar a discussão de uma questão interessante como um *Princípio da Correspondência Inverso*? O que nos parece que esta abordagem revela é que uma expressão ‘mais geral’ no sentido estrito de conter mais termos não é necessariamente mais geral que uma outra contendo menos termos. Este fato discutido a seguir ilustra que a expressão reportada por Compton (1) se ajusta melhor aos dados experimentais não fazendo portanto quaisquer restrições quanto à faixa de energia que o elétron de recuo possa apresentar em detrimento ao modelo ora sugerido.

Uma outra abordagem mais completa para a equação (6) consiste em se resolvê-la analiticamente tal como se apresenta. Como se trata de uma equação quadrática, podemos identificar duas soluções matematicamente possíveis para $f(\lambda) = (0, \lambda)$.

Desta forma a solução fisicamente correta é expressa por:

$$\lambda' = \left(-(\lambda(-1 - \cos\phi - (\lambda\cos\phi)/(A - \lambda))) - (\lambda[-3A^2 + 2A\lambda + \lambda^2 + 2A^2\cos\phi - 2A\lambda\cos\phi + A^2\cos^2\phi]^{1/2})/(A - \lambda) \right)/2 \quad (7)$$

onde

$$A = \frac{h}{m \cdot c}$$

A Fig. 3 ilustra a superfície gerada pela expressão (7), (solução fisicamente correta da equação 6) para valores arbitrários de comprimentos de onda dos fótons incidentes, e ângulos de espalhamento. Propositamente os intervalos, bem como, valores limite para cada eixo considerado nas Figs. 2 e 3 foram feitos iguais, objeti-

vando a superposição das superfícies representadas por estas figuras. Pode-se observar, por exemplo, que para fótons incidentes de baixas energias tanto o tratamento clássico aqui reportado quanto o relativístico para energia de recuo do elétron se equivalem. Entretanto, com o aumento da energia destes é que as discrepâncias entre

o modelo ora proposto e o originalmente desenvolvido por Compton começam a se tornar sensíveis, conforme aponta o espectro diferença ilustrado através da Fig. 4. Desta forma o limite de validade desta aproximação fica estabelecido para comprimentos de onda do fóton incidente maiores que $0,024\text{\AA}$. Para comprimentos de onda menores esta aproximação não pode ser recomendada uma vez que os efeitos relativísticos sobre o elétron de recuo começam a se fazer sentir, não podendo portanto ser desprezados.

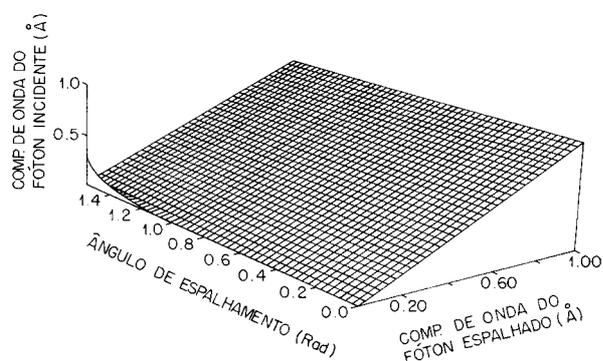


Figura 3. Solução gráfica do Efeito Compton usando o tratamento clássico.

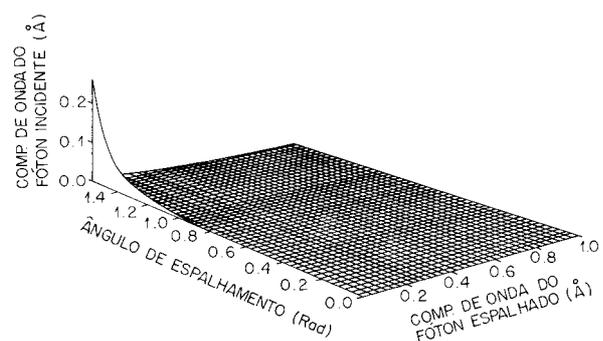


Figura 4. Espectro diferença entre os tratamentos relativísticos e não relativísticos.

III. Conclusões

A conclusão deste trabalho pode ser vista sobre dois aspectos: inicialmente numa conceituação bastante simples, os estudantes podem compreender de maneira fácil o espalhamento fóton-elétron para uma determinada faixa de energia sem a necessidade de quaisquer conhecimentos prévios das Leis da Relatividade. Paradoxalmente este mesmo entendimento deverá induzi-los à necessidade da compreensão da Mecânica Relativística objetivando-se o ajuste do modelo teórico aos dados experimentais, assim que a energia do fóton incidente ultrapassar um certo valor limite pré estabelecido, evidenciado neste texto. Outro aspecto interessante refere-se à uma precoce possibilidade de introdução dos estudantes secundaristas ao universo dos fenômenos quânticos, onde o caráter dualístico onda-partícula exprime máximo domínio tanto para radiação eletromagnética (fóton) quanto para matéria ordinária (elétron).

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Dr. J.R.Campanha pelas discussões.

Referências

1. Uma discussão elementar do Efeito Compton é apresentada em textos de física moderna; veja por exemplo, R.Eisberg and R.Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles* (John Willey & Sons, Inc., 1974), pp.38-45.