A Crônica do Cálculo: Va. Após Newton e Leibniz - Século XIX*

José Maria Filardo Bassalo
Departamento de Física da UFPA,
66075-900 - Belém, Pará
e-mail:http://www.amazon.com.br/bassalo

Trabalho recebido em 24 de abril de 1996

Esta **Crônica** mostra como se desenvolveu, no Século XIX, o que hoje conhecemos como **Cálculo Diferencial e Integral**. Nela, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo devido aos trabalhos realizados (principalmente por Bolzano, Cauchy, Fourier, Abel, Dirichlet, Riemann, Weierstrass e Cantor) no sentido de consolidar os conceitos sobre a diferenciabilidade, a integrabilidade, e a representação das funções de uma variável real em séries trigonométricas.

This **Chronicle** shows how was developped, in the XIX Century, that today means **Integral and Differential Calculus**. In it, we will study the development of this Calculus due to the work realized (principally by Bolzano, Cauchy, Fourier, Abel, Dirichlet, Riemann, Weierstrass and Cantor) with the intention of consolidating the concepts on the differentiability, the integrability and the representation of the single-valued real functions by trigonometric series.
PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Séries Trigonométricas, Análise Matemática.

Nas quatro primeiras partes da Crônica,[1] vimos como se desenvolveu o **Cálculo Diferencial e Integral** desde a Antiguidade até o Século XVIII. Agora, na quinta Crônica, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo no Século XIX. No entanto, como esse desenvolvimento teve vários desdobramentos dando origem a novas disciplinas da Matemática, vamos então dividir a quinta Crônica do Cálculo, em duas etapas. Na primeira etapa,[2] trataremos dos trabalhos que contribuíram para consolidar os conceitos sobre a diferenciabilidade, a integrabilidade, e a representação em séries trigonométricas das funções de uma variável real. Deixaremos para a segunda etapa, o estudo das funções de uma variável complexa, das equações diferenciais ordinárias e parciais, e do cálculo das variações. Todos esses temas matemáticos, decorrentes do desenvolvimento do Cálculo no Século XIX, fazem parte de um conjunto de disciplinas conhecido como **Análise Matemática**.

Segundo vimos na Crônica anterior,[3] o Cálculo newtoniano-lebniziano, desenvolvido no final do Século XVII e começo do Século XVIII, foi muito criticado porque o mesmo consistia, apenas, de um conjunto de regras especiais aplicadas aos "fluxões newtonianos" ou aos "infinitesimais leibnizianos", e que resultaram em certas técnicas de diferenciação e integração. Por outro lado, no decorrer do Século XVIII, problemas especiais tratados por esse Cálculo haviam-se desenvolvido em novas especialidades dentro da Matemática: Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Parciais, Integrais Elípticas, Geometria Diferencial e o Cálculo das Variações. Em vista disso, era necessário uma transformação fundamental naquelas regras e técnicas e, portanto, dotá-las de uma base conceitual rigorosa.

Foi o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783) quem conferiu uma base conceitual rigorosa para o Cálculo newtoniano-leibniziano, apresentando as primeiras idéias sobre os conceitos de **função**

*Este artigo é em homenagem ao meu amigo MANOEL VIEGAS CAMPBELL MOUTINHO, professor aposentado do Departamento de Matemática da UFPA, que me ensinou a dar os primeiros passos na Análise Matemática.

e de **limite**, idéias importantes para transformar esse Cálculo numa teoria de funções e suas derivadas, ou seja: a **Análise Matemática**. Para essa transformação (ocorrida no Século XVIII, conforme vimos na Crônica anterior[4]), contribuíram muitos matemáticos, (além, é claro, de Euler), dentre os quais se destacaram os franceses Alexis Claude Clairaut (1713-1765), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Apesar dos trabalhos realizados pelos matemáticos do Século XVIII (alguns deles, referidos acima) no sentido de fundamentar o Cálculo numa base rigorosa, no final desse mesmo século, observou-se existir uma série de dificuldades com essa base. Por exemplo, os conceitos de função e de limite não estavam claros; o uso de séries sem o estudo dos critérios de convergência produzia paradoxos; a representação de funções por séries trigonométricas era controversa; e não havia uma definição precisa para derivada e integral. Tais dificuldades foram contornadas no Século XIX, principalmente com os trabalhos dos matemáticos, o tcheco Bernhard Bolzano (1781-1848), os franceses Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Jules Henri Poincaré (1854-1912) e Emile Borel (1871-1956), o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), e os alemães Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), Heinrich Eduard Heine (1821-1881), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918), conforme veremos a seguir.

No Século XIX, Bolzano foi um dos primeiros matemáticos a propor nova fundamentação para o Cálculo. Com efeito, no livro intitulado *Rein analytischer Beweis*[5], publicado em 1817, os resultados dessa fundamentação (definições de alguns conceitos matemáticos (variável, continuidade, limite, convergência, derivada, etc.) e demonstrações de alguns teoremas) são apresentados por Bolzano sob uma "óptica aritmética", razão pela qual ele foi chamado o "pai da aritmetização do cálculo".[6]

Assim, nesse livro, Bolzano demonstrou teoremas importantes, tais como: - "Se f(x) é negativo para x = a e positivo para x = b, então f(x) tem um zero entre **a** e **b**";[7] - "Dada uma seqüência de funções (para **x** fixo): F_1(x), F_2(x), F_3(x), ... , F_n(x), ... , F_{n+r}(x), de tal modo que para **n** bastante grande a diferença F_{n+r}(x) - F_n(x) permanece menor do que qualquer quantidade, não importando tão grande seja **r**, então existe uma quantidade fixa **X** tal que a seqüência tende para essa quantidade".

Para demonstrar esses teoremas, Bolzano usou a seguinte definição para continuidade de uma curva ou função: - "Uma função (f(x)) é **contínua** em um dado intervalo se, para qualquer **x** pertencente a esse intervalo, então a diferença f(x + Δx) - f(x) pode ser feita tão pequena quanto se queira, bastando para isso tomar Δx suficientemente pequeno", e o lema: -"Se uma propriedade **M** não se conserva para todos os valores de uma variável **x**, e sim, para todos os valores de **x** menores do que um certo **u**, então, existe uma quantidade **U** que é o maior valor que **M** assume para todo x $<$ u". Na demonstração desse lema, Bolzano dividiu um intervalo fechado em duas partes e selecionou uma parte particular contendo um número infinito de seus membros. Ele, então, repetiu o processo até se aproximar de um número que representava o maior valor de um dado conjunto de números.

As demonstrações desses teoremas (inclusive a do lema) feitas por Bolzano no *Rein* eram incompletas pois, para as mesmas, havia a necessidade de um melhor conhecimento do conceito de **número real**, para servir de base ao entendimento de uma função real. Desse modo, em trabalhos realizados entre 1831 e 1835, principalmente o intitulado *Functionenlehre*, escrito em 1834,[8] Bolzano procurou melhorar e completar o que havia feito em 1817.

Na primeira parte do *Functionenlehre*, Bolzano voltou ao problema da continuidade de funções,[9] demonstrando novos resultados, tais como: - "Se uma função f(x) é ilimitada em um intervalo fechado [a,b], ela não pode ser contínua nesse intervalo";[10] - "Se uma função é contínua num intervalo fechado [a,b], então ela possui no mesmo um valor máximo e um valor mínimo";[11] - "Se uma função f(x) é contínua num intervalo aberto (a,b), isso não significa dizer que existe um número **e**, independente de **x** e pertencente ao intervalo (a,b), de modo que não possamos escolher Δx $<$ **e**, para que f(x) seja contínua em (a,b)".[12]

Na segunda parte do *Functionenlehre*, Bolzano tratou das derivadas. Assim, definiu (pela primeira vez e sem envolver os infinitesimais) a derivada de uma função f(x) - f'(x) - como sendo a relação $\frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$, de tal modo que o numerador se aproxima de zero na medida em que Δx também se aproxima de zero. No entanto, Bolzano enfatizou que essa derivada não representava um quociente de zeros, no sentido leibniziano, e nem uma razão entre quantidades evanescentes, no sentido newtoniano, e sim, um número.

Um dos resultados mais importantes obtidos por Bolzano na segunda parte do *Functionenlehre* foi a distinção entre continuidade e diferenciabilidade. Assim, construiu uma função contínua como um limite de uma seqüência de funções contínuas num intervalo fechado [0,1], e que, contudo, não era diferenciável num subconjunto denso de [0,1].[13]

Embora a segunda parte do *Functionenlehre* apresente muitos resultados interessantes, ela contém muitos erros, como, por exemplo, o de que o limite de uma seqüência de funções contínuas é uma função contínua, e que se $F^{n+r}(a) = 0$ para $r > 0$, então essa função admite um desenvolvimento de Taylor.[14]

Novos resultados sobre a teoria dos números reais[15] foram encontrados por Bolzano por volta de 1840, ocasião em que apresentou as primeiras idéias sobre a densidade de conjuntos ao perceber ser o infinito dos números reais diferente do infinito dos números inteiros, pois, enquanto este é numerável, aquele é não-enumerável. Essas idéias foram desenvolvidas por Bolzano no livro *Paradoxien des Unendlichen* (*Paradóxos dos Infinitos*), publicado em 1851, após sua morte. Nesse livro, Bolzano defendeu a idéia de conjuntos infinitos, sugeriu a noção de correspondência um-a-um de dois conjuntos, assim como apresentou outros resultados que constituem interessantes fragmentos da Teoria Geral dos Conjuntos. No entanto, o trabalho de Bolzano sobre conjuntos infinitos era mais filosófico do que matemático, pois ele não foi capaz de desenvolver conceitos importantes para esses conjuntos, como, por exemplo, o de potência ou número cardinal, o que só aconteceu com os trabalhos de Dedekind e de Cantor.[16] Por viver isolado em Praga, as idéias de Bolzano não tiveram muita repercussão, pois muitos de seus trabalhos permaneceram apenas em manuscritos,[17] razão pela qual seus resultados foram redescobertos por outros matemáticos, principalmente Cauchy, conforme veremos a seguir.

Com efeito, nos livros *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (*Curso de análise da Escola Real Politécnica*), de 1821, *Résumé des leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal* (*Resumo das aulas dadas na Escola Real Politécnica sobre o cálculo infinitesimal*), de 1823, e *Leçons sur le calcul différentiel* (*Lições sobre o cálculo diferencial*), de 1829, Cauchy apresentou uma fundamentação completa dos conceitos do Cálculo (variável, limite, continuidade, derivada, integral), incluindo muitos exemplos de um novo tipo de raciocínio, especialmente em relação a problemas de convergência de seqüências e séries, e sobre o famoso Teorema Fundamental do Cálculo.

Inicialmente no *Cours* e, posteriormente, no *Résumé*, Cauchy escreveu o seguinte: - "Chamamos quantidade **variável** aquela que consideramos ser capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade **constante** aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o **limite** de todos os outros. Assim, por exemplo, a área do círculo é o limite para o qual convergem as áreas de todos os polígonos regulares inscritos, se o número de seus lados aumentar cada vez mais. ... Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável pela abreviação "lim" escrita antes da variável em questão. ... Quando os **valores numéricos** sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores que qualquer número dado, dizemos que a variável se torna "infinitamente pequena" ou uma quantidade infinitamente pequena. O limite de tal variável é zero.[18] ... Dizemos que uma quantidade variável torna-se infinitamente grande quando seu valor númerico aumenta indefinidamente de tal modo que convirja ao limite ∞".[19]

Após essas definições, Cauchy passou a conceituar **continuidade** e **derivada** de uma função. Assim, tanto no *Cours*, quanto no *Résumé*, afirmou: - "Suponhamos que a função f(x) seja equivalente e finita para todos os valores de **x** entre dois limites dados; então, se a diferença f(x + i) - f(x) for sempre infinitamente pequena **entre esses limites**, dizemos que f(x) é uma **função contínua** da variável **x** entre os limites em questão".[20] Agora, usando essa interpretação do termo "infinitamente pequeno", Cauchy apresentou sua definição de função derivada.

Portanto, no *Résumé*, Cauchy escreveu: - "Se a função for contínua entre dois limites dados da variável **x**, então, para qualquer valor de **x** dentro dos limites, um aumento infinitamente pequeno da variável produzirá um aumento infinitamente pequeno da própria função. Portanto, se dissermos que $\Delta x = i$, os dois termos da **razão das diferenças** - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ - serão quantidades infinitamente pequenas. Mas, enquanto que esses dois termos aproximar-se-ão indefinidamente de zero, sua razão pode convergir para algum outro limite positivo ou negativo. Esse limite, quando existe, tem um valor definido para cada valor específico de **x**, mas varia com **x**. Portanto, se, por exemplo, tomarmos f(x) = x^m, onde **m** é um número inteiro, a razão entre as diferenças infinitamente pequenas será: $\frac{(x + i)^m - i^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}i + ... + i^{m-1}$, e seu limite será a quantidade mx^{m-1}, que é uma nova função da variável **x**. Isso será verdadeiro em geral, mas a forma da nova função que serve como limite da razão $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dependerá da forma da função inicial y = f(x). Indicamos essa dependência nomeando a nova função de "função derivada", designando-a pelo uso de um apóstrofo na notação: y' ou f'(x)".

Depois de apresentar a derivada rigorosamente sem recorrer a diferencial, Cauchy passou então a conceituá-la. Ainda no *Résumé*, lê-se: - "Seja y = f(x) novamente uma função da variável independente **x**. Seja **i** uma quantidade infinitamente pequena e **h** uma quantidade finita. Se dissermos que i = αh, α será, de novo, uma quantidade infinitamente pequena, e teremos a identidade: $\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha h}$, da qual deduzimos que $\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$h (1). O limite para o qual converge o lado esquerdo da equação (1) à medida que α se aproxima indefinidamente de zero e **h** permanece constante, é chamado "diferencial" da função y = f(x). A diferencial é indicada pelo **d** característico: dy ou df(x). Seu valor pode ser facilmente determinado se soubermos o valor da função derivada y' ou f'(x). De fato, se tomarmos os limites de ambos os lados da equação (1), acharemos o resultado geral: df(x) = hf'(x) (2). No caso especial quando f(x) = x, a equação (2) reduz-se a: dx = h (3). Assim, a diferencial da variável independente é precisamente a constante finita **h**. Dado isso, a equação (2) torna-se: df(x) = f'(x)dx (4), ou, equivalentemente, dy = y'dx (5). Essas duas últimas equações mostram que a derivada y' = f'(x) de qualquer função y = f(x) é precisamente igual a $\frac{dy}{dx}$, isto é, à razão entre a diferencial da função e a diferencial da variável ou, se quisermos, ao coeficiente pelo qual devemos multiplicar a segunda diferencial a fim de obtermos a primeira. É por isso que a derivada é chamada, às vezes, de 'coeficiente diferencial'".[21]

Ainda no *Résumé*, Cauchy apresentou suas contribuições ao desenvolvimento do Cálculo Integral. Conforme vimos em Crônicas anteriores,[22] Newton e os Bernoulli, por exemplo, consideravam o cálculo de áreas (integração) como o inverso de uma diferenciação. Por outro lado, já Leibniz considerava a área ou volume como uma "soma" de pequenos elementos, tais como retângulos ou cilindros. Cauchy aproximou-se mais de Leibniz do que de Newton, ao definir a integral como o limite de uma soma. Com efeito, em *Résumé*, escreveu: - "Suponhamos que a função y = f(x) seja contínua com relação à variável **x** entre os limite finitos x = x_o e x = X. Marquemos por x_1, x_2, ... , x_{n-1} novos valores de **x** entre esses limites, valores esses que supomos variar do primeiro limite ao segundo. Podemos usar esses valores para dividir a diferença X - x_o em elementos: x_1 - x_o, x_2 - x_o, ... , X - x_{n-1}, que terão sempre o mesmo sinal. Consideremos agora o efeito de multiplicarmos cada um desses elementos pelo valor de f(x) correspondente à **origem** do mesmo elemento: assim, multiplicamos o elemento x_1 - x_o por f(x_o), o elemento x_2 - x_1 por f(x_1), ... , e, finalmente, o elemento X - x_{n-1} por f(x_{n-1}). Seja S = (x_1 $- x_o$)f(x_o) + (x_2 $- x_1$)f(x_1) + ... + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}), a soma dos produtos obtidos dessa maneira. A quantidade S claramente dependerá: 1) de **n**, o número de elementos nos quais a diferença X - x_o foi dividida; e 2) dos valores reais desses elementos e, portanto, da maneira como foi feita a divisão. Deve ser observado agora que, se os valores numéricos dos elementos se tornarem muito pequenos e se o número **n** tornar-se muito grande, a maneira de divisão terá apenas um efeito desprezível sobre o valor de S. Assim, quando elementos da diferença X - x_o tornarem-se infinitamente pequenos, o modo de divisão terá apenas um efeito desprezível sobre o valor de S e, se diminuirmos os valores numéricos desses elementos, indefinidamente, enquanto aumentamos o seu número, o valor de S tornar-se-à, finalmente, uma constante; ou, em outras palavras, o valor de S alcançará um certo limite, que dependerá somente da função f(x) e dos valores extremos x*o* e X da variável **x**. Esse limite é chamado integral definida". Na linguagem atual, essa definição de Cauchy é traduzida por:

$$\int_{x_o}^{X} \mathrm{f(x)\ dx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}),$$

onde ξ_i é qualquer valor de **x** no intervalo [x_{i-1}, x_i].[23]

Como Cauchy havia considerado que a integração não era mais definida como o inverso da diferenciação, então, o hoje conhecido Teorema Fundamental do Cálculo não seria mais um simples corolário da definição de integração (como ocorre no cálculo newtoniano-leibniziano) e, portanto, deveria ser demonstrado. Assim, para demonstrá-lo, inicialmente, Cauchy definiu F(x) = $\int_{x_o}^{X}$ f(x) dx e, em seguida, considerou a expressão $\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h}$ f(x) dx. Então, usando o teorema do valor médio para as integrais,[24] Cauchy demonstrou ser F'(x) = f(x), que é o famoso Teorema Fundamental do Cálculo.

Na continuação de seu estudo sobre o Cálculo Integral, ainda no *Résumé*, após demonstrar que todas as primitivas de uma dada f(x) diferem por uma constante

C, Cauchy definiu **integral indefinida** como: $\int$ f(x) dx = $\int_a^x$ f(x) dx + C, assim como escreveu que: $\int_a^b$ f'(x) = f(b) - f(a), desde que f'(x) seja contínua no intervalo [a, b]. Ainda nesse estudo sobre integrais, Cauchy tratou do caso em que o integrando torna-se infinito em algum valor de **x** no intervalo de integração ou quando esse intervalo se estende até o ∞. Assim, para o caso em que f(x) tem uma descontinuidade em x = c, Cauchy apresentou a seguinte definição:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)\,dx,$$

quando esses limites existem. Por outro lado, quando $\epsilon_1 = \epsilon_2$, obtém-se o que Cauchy chamou de **valor principal de uma integral**.

Segundo vimos acima, Cauchy provou a existência de uma integral para qualquer integrando contínuo, bem como definiu a integral quando o integrando apresentava descontinuidades finitas e infinitas. No entanto, com o desenvolvimento da Análise, novas irregularidades do integrando tornaram-se manifestas e, portanto, havia necessidade de uma teoria completa da integrabilidade de uma função. As dificuldades com os integrandos foram surgindo na medida em que os matemáticos procuravam estudar as séries infinitas e, portanto, uma teoria da integração foi sendo construída em diversos trabalhos, até Riemann apresentar sua famosa **integral de Riemann**, em 1854, conforme veremos a seguir.

Nas Crônicas anteriores,[25] vimos que os matemáticos do século XVIII tentaram estudar as séries infinitas, principalmente o problema relacionado à convergência das mesmas. Contudo, no final daquele século resultados dúbios ou mesmo absurdos surgiram no tratamento dessas séries. Em vista disso, nas primeiras décadas do século XIX, Gauss, Bolzano, Cauchy, Fourier, Abel e Dirichlet começaram a estudá-las com mais rigor. Assim, o primeiro estudo rigoroso sobre a convergência das séries infinitas foi feito por Gauss, em 1812, num trabalho intitulado *Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam* (*Investigações Gerais sobre Séries Infinitas*), no qual estudou as séries hipergeométricas.[26] Mais tarde, em seu *Rein analytischer Beweis* de 1817, Bolzano apresentou a noção correta para a convergência de seqüências e de séries. Contudo, como esse trabalho não teve muita repercussão, conforme já falamos, e considerando que o trabalho de Gauss relacionava-se apenas com séries particulares, foi Cauchy quem recebeu o mérito de haver resolvido o problema da convergências das séries, já que tratou do mesmo em seu *Cours d'analyse*, de 1821.

Com efeito, no *Cours*, Cauchy escreveu: -"Seja $s_n = u_o + u_1 + ... + u_{n-1}$ a soma dos **n** primeiros termos da série infinita acima, com **n** designando um número natural. Se, para valores constantemente crescentes de **n**, a soma $\mathbf{s}_n$ aproxima-se indefinidamente de um certo limite **s**, a série em questão será chamada **convergente**, e o limite em questão será chamada a **soma** da série. Ao contrário, se **n** cresce indefinidamente e a soma $\mathbf{s}_n$ não se aproxima de um limite fixo, então a série será chamada **divergente** e não apresentará soma".

Após definir convergência e divergência, Cauchy apresentou o que hoje se conhece como **critério de convergência de Cauchy**: - "Uma seqüência $\{S_n\}$ converge para um limite **S** se e somente se a diferença $S_{n+r} - S_n$ puder ser feita menor (em valor absoluto) do que qualquer quantidade atribuída a todo **r** e suficientemente maior do que **n**". Para chegar a esse critério, Cauchy demonstrou apenas a condição necessária, já que lhe faltava o conhecimento das propriedades dos números reais para completar sua demonstração, isto é, encontrar a condição suficiente.

Ainda no *Cours*, Cauchy afirmou e provou alguns testes de convergência de séries de termos positivos. Por exemplo, um deles, referia-se ao cálculo do limite k = $\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}}$, onde **k** é o maior valor desse limite. Então, para Cauchy, a série seria convergente se $\mathbf{k} < 1$, e divergente se $\mathbf{k} > 1$. Num outro teste, Cauchy usou o limite de uma razão: $\lim_{n\to\infty} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$; assim, se esse limite fosse menor do que um a série convergia e divergia se fosse maior do que um. No caso de esse limite ser igual a um, Cauchy aplicava testes especiais. Provou ainda que a soma (ou produto) de séries convergentes, converge para a soma (ou produto) de cada série. Para séries com termos negativos, Cauchy demonstrou que a mesma convergia desde que a série correspondente de valores absolutos também convergisse; com isso, deduziu o teste de Leibniz para as séries alternantes.

O critério de convergência para séries de termos constantes, visto acima, também foi aplicado por Cauchy para estudar a série de funções reais e contínuas do tipo: $\sum u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$. Neste caso, ele aplicava o seu critério para um determinado intervalo da variável **x**.

No *Résumé* de 1823, Cauchy analisou o estudo de convergência que Lagrange, em seu *Théorie des fonctions analytiques* (*Teoria das funções analíticas*) de 1797, havia apresentado para a série de Taylor (em notação moderna):

$$f(x + a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{x^n}{n!} + R_n,$$

onde $R_n = f^{(n+1)}(x + \theta h)\,\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$, com θ entre 0 e 1, expressão essa conhecida como **resto de Lagrange**. Nesse livro, Lagrange afirmou que se f(x) apresenta todas as derivadas em $\mathbf{x}_o$, então ela pode ser expressa como uma série de Taylor em torno desse ponto. Contudo, no *Résumé*, Cauchy mostrou que a função $e^{-\frac{1}{x^2}}$ contradiz a afirmação de Lagrange, uma vez que a mesma tem derivadas em x = 0, porém não admite um desenvolvimento de Taylor em torno de x = 0. Em vista disso, Cauchy apresentou uma forma alternativa para o resto de uma série de Taylor, no livro *Exercices de mathématiques 1* (*Exercícios de matemáticas 1*), escrito em 1826.

O trabalho de Cauchy, principalmente sobre séries,[27] foi analisado por Abel. Por exemplo, em 1826,[28] ele corrigiu um erro de Cauchy sobre a continuidade de séries de funções contínuas, ao mostrar que a série sen x - $\frac{sen\ 2x}{2} + \frac{sen\ 3x}{3} + \ldots$ é descontínua para $x = (2n + 1)\pi$, com **n** inteiro, embora os termos individuais sejam contínuos. Assim, usando uma primeira noção de convergência uniforme, Abel demonstrou que a soma de uma série de funções contínuas é contínua no interior do intervalo de convergência.[29] Ainda nesse trabalho, Abel tratou da convergência das séries de potência, principalmente das séries binominais, uma vez que até aquele momento ninguém havia mostrado como obter sua soma, conforme Abel surpreendentemente notara.[30] Assim, ele provou que se a série $f(\alpha) = v_o + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \ldots$, onde os $\mathbf{v}_i$ são constantes e α é real, converge para um dado valor δ de α, então ela convergirá para os menores valores de α. Ainda em 1826, Abel preparou um famoso trabalho sobre integrais elípticas, do qual falaremos na próxima crônica quando tratarmos das funções de variáveis complexas.

A questão da convergência uniforme foi retomada por Dirichlet em trabalho escrito em 1837,[31] no qual demonstrou que numa série absolutamente convergente os seus termos podem ser reagrupados sem alterar o valor da soma. No entanto, ele também apresentou exemplos de séries condicionalmente convergentes cuja arrumação de seus termos provoca alteração no valor da soma. Por sua vez, em 1842, Weierstrass usou a noção de convergência uniforme para obter as condições para a integração termo a termo de séries e, também, para a diferenciação de integrais.[32] Por fim, trabalhos complementares sobre a convergência uniforme foram realizados por Heine, em 1870,[33] e por Weierstrass, em 1885.[34]

Outro tema importante para o desenvolvimento do Cálculo no século XIX, foi o referente às **séries trigonométricas**. Em 1807, Fourier apresentou à Academia Francesa de Ciências um trabalho sobre a difusão do calor em corpos de formas especiais (retângulo, anel, esfera, cilindro e prisma), baseado na equação de difusão (na atual notação):

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial z^2} = k^2\ \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\ .$$

Os examinadores desse trabalho designado pela Academia para estudar sua publicação, foram os matemáticos franceses Gaspard Monge (1746-1818), Sylvestre François Lacroix (1765-1843), Laplace e Lagrange; os três primeiros foram favoráveis à sua publicação, porém, Lagrange foi contra. Este matemático simplesmente rejeitou a função apresentada por Fourier para expressar a condição inicial da temperatura (a hoje famosa **série de Fourier**):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\cos rx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos rt\, dt \; + \; \mathrm{sen}\, rx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{sen}\, rt\, dt\right],$$

por não acreditar que as funções pudessem ser representadas por séries trigonométricas. Lagrange mantinha essa opinião desde a década de 1750, quando trabalhou no problema da corda vibrante.

Fourier voltou ao problema da representação das funções por séries trigonométricas ao preparar, em 1811, um trabalho para concorrer ao prêmio oferecido pela Academia Francesa, em 1810, a quem resolvesse o problema da condução do calor.[35] Nesse novo trabalho (uma versão revisada do de 1807), Fourier estudou a difusão do calor em corpos infinitos. No entanto, como nesses casos a periodicidade das séries de Fourier não era capaz de representar as condições iniciais do problema, Fourier substituiu-as por uma integral (mais tarde conhecida como **integral de Fourier**):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{o}^{\infty} \cos\, [q(x - t)]\, dq\ .$$

Nesse trabalho, as suas últimas seções foram dedicadas aos aspectos físicos do calor, principalmente ao problema da intensidade de sua radiação, tema esse que dominou o pensamento de Fourier em seus últimos anos de vida. Muito embora a Academia de Ciências haja concedido a Fourier, em 1812, o prêmio acima referido, o juri (talvez por influência de Lagrange) decidiu que o trabalho não seria publicado nas *Mémoires* dessa Academia por falta de "rigor e generalidade".[36] Embora ressentido com a atitude da Academia, Fourier continuou a trabalhar nesse fascinante tema e, em 1822, publicou o famoso e clássico livro intitulado *Théorie analytique de la chaleur* (*Teoria analítica do calor*), no qual desenvolveu com mais detalhes sua técnica de desenvolver funções em séries trigonométricas,[37] aplicando-a na solução de equações em derivadas parciais.

Por exemplo, em uma das passagens desse livro, Fourier usou sua técnica para estudar a condução do calor em um bastão cilíndrico de comprimento ℓ, cujas extremidades são mantidas em temperatura (T) nula, e tendo suas paredes laterais isoladas termicamente. Como, nesse caso, o calor flui apenas em uma direção, Fourier escreveu sua equação na forma (na notação atual):

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \;=\; k^2\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial t},$$

sujeita às seguintes condições: $T(0,t) = T(\ell,t) = 0$ $(t > 0)$ e $T(x,0) = f(x)$ $(0 < x < \ell)$, que representam, respectivamente, as condições de contorno e inicial.

Para resolver essa equação em derivadas parciais, Fourier usou a técnica da separação de variáveis: $T(x,t) = \phi(x)\, \psi(t)$. Desse modo, lançando mão das condições de contorno e inicial, obteve o seguinte resultado:

$$T_\nu(x,t) \;=\; b_\nu e^{-\lambda_\nu^2 t}\, \mathrm{sen}\left(\frac{\nu\pi x}{\ell}\right)\ , \quad (\nu = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\,)$$

onde $\lambda_\nu \;=\; \left(\frac{\nu\pi}{k\ell}\right)^2$ e $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\, \mathrm{sen}\left(\frac{\nu\pi x}{\ell}\right)$. Nessa altura, Fourier deparou-se com a seguinte questão: pode uma função ser desenvolvida em série de funções trigonométricas? Ou, equivalentemente, como calcular b_ν? Depois de uma série de tentativas, Fourier finalmente chegou à célebre expressão:

$$b_\nu \;=\; \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\pi} f(s)\, \mathrm{sen}(\nu s)\, ds\ .$$

Essa expressão não era nova, já que Clairaut e Euler no Século XVIII, haviam expandido algumas funções por intermédio de expressões análogas.[38] Contudo, o grande mérito de Fourier foi o de mostrar que esse tipo de expansão valeria para funções arbitrárias, que poderiam não ser contínuas ou mesmo conhecidas apenas graficamente. Assim, Fourier observou que **qualquer** função f(x) poderia ser representada, no intervalo $(-\pi, \pi)$, pela expressão:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} \;+\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[a_\nu \cos(\nu x) \;+\; b_\nu\, \mathrm{sen}(\nu x)\right],$$

onde os coeficientes (a_ν e b_ν) eram calculados multiplicando-se a expressão acima por, respectivamente, cos (νx) e sen (νx) e integrando-se o resultado entre $-\pi$ e $+\pi$.

Ainda no *Théorie*, Fourier mostrou como resolver muitos tipos de equações em derivadas parciais, usando o que havia tratado em seu trabalho de 1811 (conforme já referimos), e que hoje se conhece como a técnica da **Integral** ou **Transformada de Fourier**. Essa técnica, contudo, não se deve apenas a Fourier, uma vez que Cauchy e Poisson fizeram exposições orais dessa idéia em reuniões da Academia Francesa de Ciências, na mesma época de Fourier e que, no entanto, só foram conhecidas posteriormente. Por exemplo, Cauchy apresentou formalmente essa técnica no trabalho intitulado *Théorie de la propagation des ondes* (*Teoria da propagação das ondas*), com o qual ganhou o prêmio da Academia Francesa de Ciências, para o ano de 1816.[39] Poisson, por sua vez, deduziu a integral de Fourier da mesma maneira como Cauchy, no trabalho intitulado *Mémoire sur la théorie des ondes* (*Memória sobre a teoria das ondas*), ainda em 1816.[40]

A procura da solução das equações em derivadas parciais, levou também ao desenvolvimento do Cálculo no Século XIX. Porém, antes de tratarmos desse assunto, voltemos ao tema das séries trigonométricas. Muito embora Fourier, Cauchy e Poisson hajam trabalhado na representação das funções em séries trigonométricas, havia uma questão não bem resolvida por esses matemáticos, qual seja, a de encontrar as condições necessária e suficiente para que a representação em série de Fourier de uma dada função f(x), convirja para a mesma, num dado intervalo. Uma primeira tentativa de demonstrar a convergência da série de Fourier foi apresentada por Cauchy, em 1823. Contudo, foi Dirichlet quem começou a esclarecer essa questão, depois de interessar-se por esse problema.[41]

Ao examinar a demonstração de Cauchy, Dirichlet registrou algumas deficiências de seus argumentos, como, por exemplo, o fato de que a mesma não se aplicava a séries cuja convergência já era conhecida. Desse modo, no trabalho intitulado *Sur la convergence des séries trigonométriques que servent à représenter une fonction arbitrarie entre deux limites données* (*Sobre a convergência das séries trigonométricas que servem para representar uma função arbitrária entre dois limites dados*), publicado em 1829,[42] Dirichlet demonstrou que (hoje conhecido como as **condições de Dirichlet**):
- " Se f(x) tem período 2π, se no intervalo [- π, π] ela apresenta um número finito de valores máximos e mínimos e um número finito de descontinuidades, e se $\int_{-\pi}^{\pi}$ f(x) dx é finita, então a série de Fourier representativa dessa função converge para f(x) para todos os pontos onde ela é contínua, e nos pontos de descontinuidade, ela converge para a média aritmética entre os limites à direita e à esquerda da função". Na demonstração desse teorema, Dirichlet estudou cuidadosamente os limites das seguintes integrais (hoje, ainda conhecidas como **integrais de Dirichlet**):

$$\lim_{n\to\infty} \int_o^a \frac{sen(nx)}{sen x}\,\mathrm{dx}, \quad a>0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{sen(nx)}{sen x}\,\mathrm{dx}, \quad b>a>0\ .$$

Ainda nesse trabalho de 1829, Dirichlet tentou generalizar a noção de integral a um grande número de funções que fossem representadas por séries de Fourier. Contudo, frustrou-se nessa tentativa ao apresentar a hoje famosa **função de Dirichlet**: f(x) = c, se **x** for racional; e f(x) = d $\neq$ c = 0, se **x** for irracional.

Dirichlet retomou o problema da integração de funções representadas por séries de Fourier, em trabalho publicado em 1837,[43] ocasião em que tentou apresentar uma definição de função contínua, diferente da conhecida até então. Assim, nesse trabalho, Dirichlet afirmou que se uma variável **y** é relacionada a uma variável **x**, então existe uma regra em que para cada valor de **x** está associado apenas um valor de **y**. Ora, como ainda não existia o conceito de **conjunto** (o que só viria com Cantor, em 1874), essa definição de continuidade era ainda intuitiva.

Ainda em 1837, no trabalho intitulado *Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimir des fonctions arbitraires entre des limites données* (*Sobre as séries em que o termo geral depende de dois ângulos e que servem para representar funções arbitrárias entre limites dados*), Dirichlet estudou a convergência da expansão em harmônicos esféricos (funções de Laplace) de funções definidas sobre uma esfera. Esse estudo lhe foi muito útil quando, em 1850, lidou com problemas de Física Teórica, principalmente relacionados à Termodinâmica e à Eletrodinâmica, nos quais tratou da integrabilidade da equação de Laplace (ΔV = 0) em regiões limitadas, e quando se conhecem os valores de V na fronteira dessas regiões. Hoje, esse problema é conhecido como o famoso **problema de Dirichlet**.[44]

Apesar do trabalho brilhante de Dirichlet no sentido de entender a convergência da série de Fourier, restavam ainda algumas dificuldades, principalmente as relacionadas à convergência uniforme, assunto que o próprio Dirichlet havia tratado, no trabalho publicado, também em 1837, conforme já referimos, no qual demonstrou que numa série absolutamente convergente, os seus termos podem ser reagrupados sem alterar o valor da soma. Contudo, seu ex-aluno Riemann, em sua *Habilitationsschrift* tese para a Universidade de Göttingen, apresentada em 1854,[45] demonstrou que um adequado reagrupamento dos termos de uma série poderia fazer com que sua soma assumisse qualquer número. Desse modo, Riemann apresentou as condições necessárias e suficientes que uma função f(x) deve satisfazer para que seja representada por uma série de Fourier, em qualquer ponto do intervalo [- π, π].

Ainda naquela tese, Riemann demonstrou o teorema fundamental de que se uma função f(x) é limitada e integrável no intervalo [- π, π], então os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cos(nx)\ dx\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sen(nx)\ dx\ ,$$

tendem para zero quando **n** tende para o infinito. Por outro lado, ao observar que uma função pode ser integrável em um dado intervalo sem necessariamente ser representada por uma série de Fourier, foi que Riemann chegou ao seu célebre conceito de integral.

Com efeito, Riemann generalizou o conceito de integral ao tratar de funções f(x) definidas e limitadas no intervalo [a, b]. Assim, ao dividir esse intervalo em subintervalos (Δx_i), ele demonstrou que $\int_a^b$ f(x) dx nada mais é do que o limite da soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x_i$ quando Δx_i se aproxima de zero. Com essa definição, Riemann dispensou a condição de integrabilidade de uma função num dado intervalo. Essa condição exigia que a mesma fosse contínua ou seccionalmente contínua (neste caso, ela deveria apresentar um conjunto finito de descontinuidades finitas), no intervalo considerado.[46]

A questão da convergência uniforme das séries trigonométricas foi retomada por Heine no trabalho de 1870, referido anteriormente. Nesse trabalho, ele mostrou que uma função contínua em um dado intervalo pode ser representada por uma série de Fourier sem que esta convirja uniformemente. Além do mais, Heine demonstrou ainda que se uma dada função, representada por um série de Fourier, converge uniformemente num dado intervalo, então essa série é única. A unicidade, bem como a convergência das séries de Fourier, foram tratadas por Cantor (após ler o trabalho de Heine), em pesquisas realizadas em 1870, 1871 e 1872,[47] bem como por Du Bois-Reymond entre 1873 e 1883.[48]

Notas e referências bibliográficas

1. BASSALO, J. M. F. 1996a. *A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(2)*: 103-112; —— 1996b. *A Crônica do Cálculo: II. Na época de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(3)*: 181-190; —— 1996c. *A Crônica do Cálculo: III.Contemporâneos de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(4)*: 328-336; —— 1997a. *A Crônica do Cálculo: IV. Após Newton e Leibniz - Século XVIII. Revista Brasileira de Ensino de Física, 19(4)*: .

2. Para escrever este artigo, consultamos os seguintes textos: BARON, M. E. 1985. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*, Unidades 1 e 2; BARON, M. E. e BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidade 3; BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidades 4 e 5, da Open University. Editora da Universidade de Brasília; BOYER, C. B. 1968. *A History of Mathematics.* John Wiley and Sons; KLINE, M. 1974. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press; RONAN, C. A. 1987. *História Ilustrada da Ciência.* Jorge Zahar Editor; SEDGWICK, W. T., TYLER, H. W. e BIGELOW, R. P. 1950. *História da Ciência.* Editora Globo; TRUESDELL, C. A. 1968. *Essays in the History of Mechanics.* Springer-Verlag. Além desses livros, consultamos também alguns verbetes da *Encyclopaedia Britannica* (University of Chicago, 1988) e do *Dictionary of Scientific Biography* (Charles Scribner Sons, 1981).

3. BASSALO (1996a), op. cit.

4. BASSALO (1996a), op. cit.

5. O título completo desse livro é o seguinte: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege.*

6. Essa denominação foi cunhada pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925), em 1895.

7. Esse teorema também apresenta o seguinte enunciado: -"Se para duas funções contínuas **f** e **g**, tivermos f(α) < g(α) e f(β) > g(β), então existirá um **x** entre α e β de modo que: f(x) = g(x)".

8. O trabalho mencionado foi editado e publicado por K. Rychlik, em 1930.

9. No Volume I, ao retomar a sua definição de função contínua, Bolzano fez a distinção entre a continuidade à direita e à esquerda.

10. Registre-se que o método usado por Bolzano para fazer a demonstração desse teorema foi redescoberto por Weiertrass, e apresentado em suas "lectures" ministradas na Universidade de Berlim, em 1861. Esse teorema é hoje conhecido como o famoso **Teorema de Bolzano-Weiertrass**: - "Um conjunto S limitado contendo um número infinito de elementos (pontos ou números), contém pelo menos um ponto limite (ponto de acumulação)".

11. Com esse teorema, Bolzano provou que as funções contínuas assumem todos os valores intermediários entre dois valores dados, porém, a inversa não é verdadeira.

12. Esse teorema relaciona-se com o conceito de **continuidade uniforme**, desenvolvido mais tarde por Heine, em trabalhos realizados em 1870 (*Journal für die Rein und Angewandte Mathematik 71*), e em 1872 (*Journal für die Rein und Angewandte Mathematik 74*), e por Borel, em 1895 (*Annales Scientifiques de l'Ecole Normal Supérieure 12(3)*, e hoje é conhecido como o famoso **Teorema de Heine-Borel**: -"Se um conjunto fechado de pontos sobre uma linha pode ser coberto por um conjunto de intervalos de modo que cada ponto do conjunto é um ponto interior de pelo menos um dos intervalos, então existe um número finito de intervalos com esta propriedade de cobertura". É importante destacar que esse teorema foi estendido ao caso de conjuntos infinitos incontáveis, pelo matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941), em 1898.

13. Esse exemplo mostrou-se não ser verdadeiro, pois, erroneamente, Bolzano acreditou que a função construída por ele era contínua, já que fora obtida como um limite de funções contínuas. (Aliás, o mesmo erro fora cometido por Cauchy, em 1823, e Abel apresentou um contra-exemplo, em 1826.) Um primeiro exemplo de uma função contínua não-derivável foi dado por Riemann, em sua *Habilitationsschrift*, de 1854, escrito para fazer o concurso de **Privatdozent**, na Universidade de Göttingen. Logo depois, em 1860, o matemático suíço Charles Cellérier (1818-1889) apresentou um exemplo de função contínua não-diferenciável (na notação atual): f(x) = $\sum_{n=1}^{n=\infty} a^{-n}\ sen(a^n x)$, onde **a** é um número grande e positivo. No entanto, como esse exemplo de Cellérier só foi publicado em 1890 (*Bulletin des Sciences Mathématiques 14(2))*, o mérito de encontrar uma função contínua não-derivável se deve a Weierstrass. Com efeito, em 18 de Julho de 1872, ele comunicou à Academia de Berlim a hoje famosa **Função de Weierstrass**: f(x) = $\sum_{n=1}^{n=\infty} b^n\ cos(a^n \pi x)$, onde **a** é um inteiro ímpar e **b** é uma constante positiva menor do que um, e de tal modo, que ab $> 1 + \frac{3\pi}{2}$. É interessante destacar que Weierstrass comunicou esse exemplo ao matemático francês Paul Du Bois-Reymond (1831-1889), em 1874, e que o mesmo foi publicado em 1875, no *Journal für die Rein und Angewandte Mathematik 79*.

14. Esse resultado foi claramente refutado pelo exemplo dado por Caychy, em 1829, de que a função C(x) = e$-\ \frac{1}{x^2}$, não admitia desenvolvimento de Taylor na vizinhança de x = 0. É curioso destacar que Bolzano conhecia esse exemplo, conforme ele próprio se referiu no trabalho de 1831, publicado na *Miscellanea Mathematica.*

15. É oportuno observar que Bolzano não usava os termos **números reais** e sim **expressões-números infinitos mensuráveis**, conforme se pode ver no artigo publicado na *Miscellanea Mathematica*, em 1832, no qual tratou das progressões geométricas.

16. A propriedade de conjunto infinito, observada por Bolzano, foi posteriormente usada por Dedekind, em 1882, em sua definição de conjunto infinito, e sua teoria desenvolvida em sua famosa memória intitulada *Was sind und was sollen die Zahlen*, escrita em 1887. Por outro lado, a idéia de Bolzano sobre a correspondência um-a-um entre conjuntos, base para o conceito de potência ou número cardinal de um conjunto, foi desenvolvida por Cantor, numa série de artigos publicados nas revistas *Mathematische Annalen* e *Journal für die Rein und Angewandte Mathematik*, a partir de 1874.

17. Alguns desses trabalhos estão incluídos na obra intitulada *Schriften*, composta de 5 Volumes, publicada em Praga, entre 1930 e 1948.

18. A essas variáveis, Cauchy denominou-as de **infinitesimais**. Com isso, Cauchy elucidou o conceito de infinitesimal apresentado por Leibniz e o livrou das amarras metafísicas.

19. Para Cauchy, ∞ não significava uma quantidade fixa, mas alguma coisa indefinidamente grande.

20. É interessante observar que nas definições de limite e continuidade de uma função, apresentadas quer por Bolzano, quer por Cauchy, existem frases indefinidas, como, por exemplo, "torna-se e permanece menor do que uma dada quantidade" e "tão pouco quanto quisermos". Assim, para acabar com essas indefinições, Weierstrass apresentou, em suas aulas na Universidade de Berlim, a partir de 1859, a definição usada até hoje: - " Uma função f(x) é contínua em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$ se dado um número positivo ϵ, existe um δ tal que, para todo **x** no intervalo $|x - x_o| < \delta$, então

$|f(x) - f(x_o)| < \epsilon$." Ainda para Weierstrass uma função f(x) tem um limite L em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$, se $F(x_o) = L$.

21. Esta definição de diferencial apresentada por Cauchy, é muito semelhante à definição de Leibniz, de 1684. Contudo, enquanto Leibniz definiu a diferencial em termos da tangente à curva, Cauchy a define em termos da derivada.

22. Cf. Nota (1).

23. A notação $\int_{x_o}^{X}$ f(x) dx para **integral definida** foi introduzida por Fourier, em seu célebre livro *Théorie analytique de la chaleur* (*Teoria analítica do calor*), publicado em 1822.

24. Esse teorema significa que: - "Se f (x) é uma função contínua no intervalo [a,b], então, existe um valor ξ nesse intervalo, tal que: $\int_a^b$ f(x) dx = (b - a) f(ξ).

25. Cf. Nota (1).

26. Nesse trabalho, que foi publicado nos *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores 2 (1813)*, Gauss usou o **teste da razão** para demonstrar que a série hipergeométrica $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ (esta notação foi apresentada por ele nessa ocasião):

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + ... + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)...(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2...(n-1)\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}x^n + ...,$$

converge para $|x| < 1$, diverge para $|x| > 1$; para x = 1, ela converge se e somente se $\alpha + \beta < \gamma$, e para x = - 1 ela converge se e somente se $\alpha + \beta < \gamma + 1$.

27. É oportuno esclarecer que ao descuidar da questão da convergência uniforme, Cauchy cometeu alguns erros com relação ao rigor matemático. Por exemplo, no *Cours* ele afirmou que $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é contínua se a série converge e u_n também é contínua; no *Résumé*, ele afirmou que essa mesma série poderia ser integrada termo a termo, isto é: $\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$; e no *Exercices de mathématiques 2* (*Exercícios de matemáticas 2*), de 1827, afirmou que (em notação atual):

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx.$$

No entanto, em 1853 (*Comptes Rendus 36*), Cauchy reconheceu a necessidade da convergência uniforme para assegurar a soma de séries de funções contínuas. Porém, apesar disso, permaneceu com a idéia de que a mesma não era necessária para garantir a diferenciação e a integração termo a termo das séries.

28. Esse trabalho foi publicado no *Journal für die Rein und Angewandte Mathematik 1 (1826)*.

29. Hoje, o conceito de **convergência uniforme** é o seguinte: - " A série $S(x) = \sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformente em um dado intervalo de **x** se, dado qualquer ϵ, então se existe um **N** tal que para todo $\mathbf{n} > \mathbf{N}$, teremos: $|S(x) - \sum_{1}^{\infty} u_n(x)| < \epsilon$".

30. A descoberta desse fato surpreendente foi comunicada por Abel, em carta escrita de Paris, em 16 de Janeiro de 1826, ao seu antigo professor, o matemático norueguês Berndt Michael Holmböe (1795-1850).

31. Esse trabalho foi publicado nos *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1837)*.

32. A noção de convergência uniforme também foi utilizada pelo físico e matemático inglês Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), em 1848 (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8_5), e pelo matemático alemão Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896), em 1847/1849 (*Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften (München)*). Esses dois matemáticos demonstraram que se a soma de uma série de funções contínuas é descontínua em $\mathbf{x}_o$, então existem valores de **x** próximos de $\mathbf{x}_o$ para os quais a série dada converge arbitrária e suavemente. Apesar disso, esses matemáticos não se referiram sobre a necessidade desse conceito para justificar a diferenciação e a integração termo a termo das séries.

33. Nesse trabalho (*Journal für die Rein und Angewandte Mathematik 71 (1870)*), Heine enfatizou a importância da convergência uniforme ao estudar a convergência das séries trigonométricas. Provavelmente Heine tomou conhecimento dessa importância com Cantor, quando este visitou Halle, em 1867, cidade em que Heine era professor.

34. Nesse trabalho (*Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1885)*), Weierstrass demonstrou que qualquer função contínua em um intervalo fechado do eixo real pode ser representada, nesse intervalo, por séries de polinômios absoluta e uniformemente convergentes.

35. O primeiro trabalho sobre condução de calor em uma barra metálica foi realizado pelo físico francês Jean Baptiste Biot (1774-1862), em 1804, ocasião em que fez a distinção entre condução interna e radiação externa. Esse trabalho, contudo, apresentava uma grande dificuldade pois a equação diferencial proposta por Biot - d^2v - k v dx = 0 -, não representava um modelo físico adequado para tratar o problema da condução do calor, já que não levava em consideração o tempo. Essa dificuldade foi contornada por Fourier, no trabalho de 1807, conforme vimos.

36. Quando Fourier tornou-se secretário da Academia Francesa de Ciências, em 1824, decidiu publicar, nesse mesmo ano, seu trabalho de 1811, nas *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France (1819-1820)*.

37. O método de Fourier de desenvolver uma função em série trigonométrica foi usado pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), por volta de 1815, na solução de alguns problemas de condução do calor. Em trabalhos posteriores, nos quais tratou outros tipos desses problemas, Poisson usou, além do desenvolvimento em série de Fourier, o desenvolvimento em polinômios de Legendre e em harmônicos de Laplace; esses trabalhos foram reunidos posteriormente no livro intitulado *Théorie mathématique de la chaleur* (*Teoria matemática do calor*) e publicado por Poisson, em 1835.

38. Essas expressões, são:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cos(nx)\ dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sen(nx)\ dx\ ,\ n \geq 1\ .$$

39. Nesse trabalho, Cauchy desenvolveu a técnica da integral de Fourier ao resolver problemas relacionados a equações da hidrodinâmica, tais como: $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0$, em que **q** foi posteriormente denominado de **potencial velocidade**. Sem nenhuma explicação, Cauchy escreveu que: q(x,y) = $\int_o^\infty cos(mx)\ e^{-\ ym}$ f(m) dm, onde f(m) era arbitrária; para determiná-la, escreveu que: q(x,0) = F(x) = $\int_o^\infty$ cos (mx) f(m) dm. Com isso, Cauchy mostrou que: f(m) = $\frac{2}{\pi} \int_o^\infty$ cos (mu) F(u) du. Com este valor, Cauchy obteve o seguinte resultado:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_o^\infty \int_o^\infty \cos(mx) \cos(mu) F(u)\ du\ dm\ .$$

Desse modo, vê-se que Cauchy não só encontrou a integral-dupla de Fourier de uma função, bem como a maneira de determinar a sua inversa. (Na linguagem de hoje, diz-se que Cauchy obteve tanto a transformada quanto a anti-transformada de Fourier de uma dada função.) Registre-se que esse artigo foi publicado no *Nouveau Bulletin de la Société Philomatique de Paris (1817)*.

40. Esse trabalho foi publicado nas *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France (2) 1 (1816)*. (Observe-se que, por ser membro da Academia Francesa, Poisson não concorreu ao prêmio de 1816.)

41. Dirichlet interessou-se pelas séries trigonométricas, depois de conhecer Fourier durante sua estada em Paris, no período de 1822 a 1825.

42. Esse trabalho foi publicado no *Journal für die Rein und Angewandte Mathematik 4 (1829)*.

43. Para publicar esse trabalho, Dirichlet escolheu o *Repertorium der Physik*, uma revista científica, especialista em artigos de revisão sobre Física-Matemática, na qual seu amigo Jacobi também colaborava.

44. É interessante observar que Dirichlet deu outras contribuições ao desenvolvimento do Cálculo, estudando problemas de Mecânica. Por exemplo, em 1839, ao determinar a atracção gravitacional entre um elipsóide e massas pontuais colocadas fora e dentro do mesmo, Dirichlet desenvolveu um método para calcular integrais múltiplas baseado no chamado fator de descontinuidade. Por outro lado, em 1846, ao tratar o problema da estabilidade do sistema solar, criticou a solução apresentada por Laplace (e aceita por Poisson), qual seja, o abandono (sem justificativa) de termos acima da segunda ordem nas expansões em séries utilizadas por esses matemáticos, ao tratarem aquele problema. Assim, Dirichlet evitou esse artifício analisando a energia do sistema solar. Por fim,

em 1852, ao estudar o movimento de uma esfera em um fluido incompressível, foi o primeiro a fazer uma integração exata das equações da Hidrodinâmica, tema, aliás, que ocupou a mente de Dirichlet até sua morte, em 1859. Esses últimos trabalhos de Dirichlet foram editados por seu aluno Dedekind.

45. É oportuno notar que devido à praxe (pelo menos nas universidades alemães) requerida para um Concurso de Habilitação para ser **Privatdozent**, o candidato deveria apresentar além da tese (**Habilitationsschrift**), mais três possíveis temas para o **Habilitationsvortrag**. Gauss, membro da Banca Examinadora, escolheu o tema intitulado *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sobre as Hipóteses nas quais se Fundamentam a Geometria*) no qual Riemann aplicou o método de Gauss (proposto em 1827 para estudar as superfícies curvas) ao estudo do espaço tridimensional geral, focalizando sua atenção na métrica e nas propriedades de curvatura do espaço. Esse trabalho, que foi lido no dia 10 de Junho de 1854 na Universidade de Göttingen (e somente publicado em 1868, no *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13*), tornou-se famoso pois nele está o conceito de **métrica** (na notação atual): $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

46. A condição de integrabilidade de Riemann foi discutida em 1875 pelos matemáticos, o francês Gaston Darboux (1842-1917) e o inglês Henry John Stephen Smith (1826-1883). Com efeito, no artigo publicado nos *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 2*, Darboux demonstrou que uma função limitada seria integrável em [a,b] se, e somente se, as descontinuidades de f(x) nesse intervalo constituirem um conjunto de medida nula. Por sua vez, no artigo publicado nos *Proceedings of the London Mathematical Society 6*, Smith deu o primeiro exemplo de uma função não integrável no sentido de Riemann que, contudo, apresentava um conjunto de descontinuidades "raro". É oportuno ressaltar que a teoria da integração de Riemann foi extendida a funções de duas variáveis por Karl J. Thomae (1840-1921), em 1876, em trabalho publicado no *Zeistschrift für Mathematik und Physik 21*, e que esse mesmo conceito foi completado por Lebesgue, no Século XX, conforme veremos quando tratarmos da Crônica desse século.

47. Nos trabalhos publicados no *Journal für die Rein und Angewandte Mathematik 72 (1870); 73 (1871)*, Cantor demonstrou que se uma função f(x) é representada por uma série trigonométrica convergente para qualquer valor de **x** (ou mesmo para um número finito de valores), então não existe nenhuma outra série que convirja da mesma maneira. No artigo publicado, em 1872, no *Mathematische Annalen 5*, Cantor extendeu os resultados obtidos anteriormente para o caso onde um conjunto infinito de valores excepcionais de **x** é ainda considerado. Destaque-se que com esses artigos, Cantor iniciou a terceira fase da aritmetização da Análise. As duas primeiras, conforme vimos, foram iniciadas por Bolzano (1817) e por Weiertrass (1861). Ainda deve ser destacado que foi no artigo de 1872 que Cantor iniciou sua famosa Teoria dos Conjuntos.

48. Em 1873 (*Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen)*, Du Bois-Reymond mostrou que uma função contínua no intervalo (- π, π), pode ser representada por uma série de Fourier que não converge em um particular ponto desse intervalo. Em 1876 (*Abhandlungen der Königlich Bayerisch Akademie der Wissenschaften (München) 12)*, ele demonstrou que qualquer série trigonométrica que converge para uma dada função f(x) em [-π, π], sendo esta integrável num sentido mais geral do que o de Riemann, então essa série deve ser necessariamente uma série de Fourier. Por fim, no trabalho de 1883 (*Mathematische Annalen 22*), ele demonstrou que qualquer série de Fourier de uma dada função, integrável segundo Riemann, pode ser integrada termo a termo, mesmo que aquela série não seja uniformemente convergente. Note-se que esses trabalhos sobre a série de Fourier permitiram completar o famoso teorema demonstrado pelo matemático francês Marc Antoine Parseval des Chênes (1755-1836), em 1799. Assim, se f(x) e $[f(x)]^2$ são integráveis segundo Riemann no intervalo [- π, π], então:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = 2a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) ,$$

onde $\mathbf{a}_n$ e $\mathbf{b}_n$ são, respectivamente, os coeficientes de Fourier de f(x). É oportuno destacar que embora o método de Parseval (desenvolvido para somar séries) envolva séries trigonométricas, ele nunca procurou determinar expressões gerais para esses coeficientes.