A Crônica do Cálculo: IV. Após Newton e Leibniz - Século XVIII*

José Maria Filardo Bassalo
Departamento de Física da UFPA,
66075-900 - Belém, Pará
e-mail:http://www.amazon.com.br/bassalo

Trabalho recebido em 7 de março de 1996

Esta **Crônica** mostra como se desenvolveu o que hoje conhecemos como **Cálculo Diferencial e Integral**. Nesta quarta parte, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo devido aos trabalhos realizados por matemáticos do Século XVIII, principalmente os de Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace e Legendre.

This **Chronicle** shows how was developped that today means **Integral and Differential Calculus**. In this fourth part, we will study the development of this Calculus due to the work by mathematicians of XVIII Century, principally the Euler's, d'Alembert's, Lagrange's, Laplace's and Legendre's ones.
PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo das Variações.

Nas três primeiras partes da Crônica,[1] vimos como se desenvolveu o **Cálculo Diferencial e Integral** desde a Antiguidade até os trabalhos dos matemáticos, o inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e de seus contemporâneos, principalmente os dos irmãos suíços James (Jakob, Jacques) Bernoulli (1654-1705) e John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748), e o francês Marquês Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704). Nesta quarta parte,[2] estudaremos os trabalhos que se seguiram aos desses matemáticos durante o decorrer do Século XVIII.

Segundo vimos nas Crônicas anteriores,[3] no final do Século XVII o Cálculo apresentava dois enfoques: o newtoniano e o leibniziano, que se baseavam em conceitos bastante diferentes. Com efeito, o cálculo newtoniano (de estilo geométrico) tinha como fundamento o conceito de **fluxões**, introduzidas por meio de razões "primeiras" ou "últimas" de quantidades nascentes ou evanescentes, que não eram necessariamente infinitamente pequenas, isto é, infinitesimais. De outro lado, o cálculo leibniziano (de estilo analítico) baseava-se em **diferenciais** que representavam diferenças entre dois valores de uma quantidade que estão infinitamente próximos um do outro. Esses infinitesimais, no entanto, satisfaziam a certas regras.[4] Em vista disso, era natural que se questionasse sobre o significado das "primeiras" ou "últimas" razões newtonianas e, também, dos "infinitesimais" leibnizianos. Além disso, estabeleceu-se, também, uma polêmica para saber quem havia inventado o Cálculo.

Em três trabalhos escritos entre 1694 e 1696,[5] o médico e geômetra holandês Bernard Nieuwentijt (1654-1718) criticou a imprecisão na definição das quantidades nascentes ou evanescentes de Newton e a falta de clareza, também, na conceituação das diferenciais de ordem mais alta que a primeira, consideradas por Leibniz.[6] Em 1699, o matemático suíço Nicholas Fatio de Duillier (1664-1753) enviou um trabalho à **Royal Society** no qual criticou Leibniz, acusando-o de haver plagiado Newton. Leibniz defendeu-se em várias publicações.[7] Por volta de 1701, o matemático francês Michel Rolle (1652-1719) criticou o método dos infinitesimais apresentados por l'Hôpital, no livro *Analyse des Infiniments Petits* (*Análise dos Infinitamente Pequenos*), de 1696.[8] Por sua vez, no *Philosophical Trans-*

*Este artigo é em homenagem ao meu amigo MANOEL LEITE CARNEIRO, professor aposentado do Departamento de Matemática da UFPA, que ao me indicar, em 1962, para ser *Instrutor de Ensino* da Disciplina **Física Matemática** para o então Núcleo de Física e Matemática da UFPA, permitiu-me entrar em contato com Derivadas Parciais.

actions de 1708, o matemático inglês John Keill (1671-1721) publicou um artigo em defesa de Newton.

Apesar da polêmica sobre quem de fato havia inventado o Cálculo, este foi divulgado (e, em alguns casos, com novas contribuições ao seu desenvolvimento) por partidários, quer de Newton, quer de Leibniz, tanto na Inglaterra quanto na Europa continental. Vejamos, inicialmente, o que ocorreu na Inglaterra. Neste país, alguns matemáticos ingleses prosseguiram e desenvolveram o cálculo newtoniano, usando sua simbologia, notação e, principalmente, seu caráter geométrico. Assim, o matemático inglês Roger Cotes (1682-1716)[9] no livro *Harmonia Mensurarum*, publicado em 1722, após sua morte, tratou basicamente da integração de frações racionais, usando a decomposição em fatores quadráticos da forma $x^n - 1$, assim como aplicou o cálculo às funções logaritmo e trigonométrica.[10] Ainda nesse livro, Cotes incluiu um trabalho publicado na *Philosophical Transactions of the Royal Society 29*, de 1714, no qual usou pela primeira vez (na linguagem atual) a relação $\ln(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = i\theta$.[11]

Ainda na Inglaterra, o matemático Brook Taylor (1685-1731) publicou, em 1715,[12] o livro intitulado *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (*Métodos Direto e Inverso de Incrementações*) no qual apresentou uma técnica para tratar as diferenças finitas, no estilo do método newtoniano das fluxões. Esse livro tornou-se muito conhecido por conter a famosa **fórmula de Taylor** (em notação atual):[13]

$$f(x + a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

É oportuno registrar que fórmulas análogas a essa já haviam sido encontradas antes.[14] Por exemplo, o matemático escocês James Gregory (1638-1675), em 1670, em carta escrita ao matemático inglês John Collins (1625-1683) e, independentemente, Newton no Livro III de seu *Principia*, publicado em 1687, encontraram a hoje conhecida **fórmula de Gregory-Newton**:

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{c}\Delta f(a) + \frac{\frac{h}{c}(\frac{h}{c} - 1)}{1.2}\Delta^2 f(a) + \ldots .$$

Por seu lado, na *Acta Eruditorum* de 1694, John Bernoulli obteve, também, um resultado análogo ao de Taylor - a conhecida **série de Bernoulli**: $\int y\, dx = yx - \frac{x^2}{2!}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2y}{dx^2} - \ldots$.[15] Ainda no *Methodus*, Taylor tratou da corda vibrante,[16] para a qual obteve sua equação de movimento, bem como resolveu-a admitindo que sua forma era senoidal e, desse modo, encontrou a freqüência fundamental de sua vibração.

Ao contrário do que ocorreu na Inglaterra, onde o cálculo newtoniano foi mais difundido e desenvolvido, conforme vimos acima, na Europa continental, aconteceu o inverso, isto é, foi o cálculo leibniziano que recebeu maior atenção. Por exemplo, na França, além de l'Hôpital[17] e Varignon (já referidos), o cientista e escritor francês Bernard Le Bovier de Fontenelle (1657-1757) também divulgou o trabalho de Leibniz.[18] Na Itália, o cálculo leibniziano foi desenvolvido pelos matemáticos italianos Guido Grandi (1671-1742),[19] Gabriele Manfredi (1681-1761), e os Condes, Giulio Carlo de'Toschi di Fagnano (1682-1766)[20] e Jacopo Francesco Riccati (1676-1754).[21]

A essas contribuições dos matemáticos franceses e italianos para o desenvolvimento do cálculo leibniziano, acrescentem-se também contribuições dos matemáticos suíços. Com a morte de James Bernoulli, em 1705, a cátedra de Matemática da Universidade de Basiléia antes ocupada por ele, passou a ser regida por seu irmão John. Em torno da mesma, este reuniu alunos que se tornaram matemáticos brilhantes, como seu sobrinho Nicholas II (1687-1759),[22] seus filhos Nicholas III (1695-1726)[23] e Daniel (1700-1782),[24] além de Hermann e Euler, estes dois últimos já referidos.

Muito embora esses matemáticos suíços hajam contribuído relevantemente para o desenvolvimento do Cálculo, foi Euler quem começou a dar uma base conceitual rigorosa para essa disciplina. Apresentou as primeiras idéias sobre os conceitos de **função** e de **limite**, importantes para transformar o cálculo newtoniano-leibniziano, baseado em variáveis, infinitesimais e razões últimas, para uma teoria de funções e suas derivadas. Essa teoria tornou-se conhecida com o nome de **Análise**. Para essa transformação, contribuíram muitos matemáticos, além, é claro, de Euler, segundo veremos a seguir.

Conforme vimos no início deste trabalho, o Cálculo newtoniano-leibniziano foi muito criticado, principalmente sobre o significado das "fluxões" newtonianas e dos "infinitesimais" leibnizianos, sobretudo nos trabalhos de Nieuwentijt (1694-1696), Duillier (1699) e Rolle (1701). Mais tarde, em 1734, o filósofo e cientista anglo-irlandês, o Bispo George Berkeley (1685-1753) publicou o livro *The Analyst* (*O Analista*)[25] no qual criticou, também, aqueles conceitos utilizados por Newton e Leibniz no desenvolvimento do Cálculo. A base de sua crítica, afirmava haver uma contradição no uso dos "infinitesimais", uma vez que, em certos cálculos, primeiramente eram considerados diferentes de zero e, logo depois, tomados como nulos. Ainda nesse livro, Berkeley criticou a falta de clareza ao ser considerado a razão (primeira ou última) dessas quantidaes. Contudo, no livro, a maior crítica de Berkeley feita aos matemáticos que usavam aquele cálculo, referia-se ao fato de que eles agiam indutivamente ao invés de dedutivamente.

A publicação do livro de Berkeley motivou alguns matemáticos ingleses a sair em defesa de Newton. Assim, ainda em 1734, James Jurin (1684-1750) publicou o livro *Geometry, No Friend to Infidelity* no qual afirmou que o conceito de fluxão era bem claro para os versados em Geometria.[26] Por seu lado, Benjamin Robins (1707-1751) no livro publicado em 1735 e intitulado *A Discourse Concerning the Nature and Certainly of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions and of Prime and Ultimate Ratios* defendeu a idéia de fluxão, porém considerou que as razões primeira e última como apenas uma explicação. Contudo, tanto Jurin quanto Robins repudiaram os infinitesimais e tentaram introduzir o conceito de **limite** para tratar dessas "razões".[27] Também o escocês Maclaurin respondeu às críticas de Berkeley no livro **Tratado das Fluxões**, publicado em 1742, e já referido neste trabalho.[28] No livro, Maclaurin reforçou a convicção dos matemáticos ingleses de que o Cálculo deveria ser tratado basicamente por métodos geométricos.

Uma nova crítica ao cálculo newtoniano-leibniziano foi a feita por Euler, principalmente no seu aspecto geométrico. Assim, procurou desenvolver esse Cálculo por intermédio de manipulações algébricas, conforme se pode ver em seus livros: *Introductio in Analysin Infinitorum* (*Introdução à Análise dos Infinitos*), de 1748, *Institutiones Calculi Differentialis* (*Livros sobre Cálculo Diferencial*), de 1755, e *Institutiones Calculi Integralis* (*Livros sobre Cálculo Integral*), de 1768-1770. O *Introductio* era composto de 2 volumes. O primeiro volume começa com o estudo de séries (numéricas, de potência, recorrentes e de Taylor), frações contínuas[29] e teoria dos números. Em seguida, definiu as funções[30] logaritmo, exponencial e trigonométrica por intermédio de séries de potências.[31] O segundo volume trata da Geometria Analítica plana e espacial, com uma discussão sobre as curvas algébricas e transcendentais.

No *Institutiones* de 1755,[32] Euler afirmou que os infinitesimais (quantidades infinitamente pequenas) não existiam, e que as quantidaes menores do que qualquer quantidade finita são nulas. Portanto, os infinitesimais (por exemplo: **dx** e **dy**) são todos iguais a zero, mas, alertou Euler, eles podem apresentar uma razão finita, uma vez que sendo 0.n = 0, então $\frac{0}{0}$ = n, para qualquer **n**. Desse modo, para Euler, o ponto fundamental do Cálculo era encontrar a maneira mais conveniente de obter a razão entre os zeros (e não os próprios zeros), pois a mesma representava a diferencial de uma função.[33] Ainda nesse livro, Euler estudou um caso particular do Cálculo por intermédio das diferenças finitas, usou a série de Taylor para encontrar o extremo de f(x) e deduziu a condição necessária para que a função z = f(x,y) seja uma diferencial exata, isto é: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.[34]

Diferentemente de Euler, outros matemáticos achavam que a questão fundamental ("metafísica") do Cálculo não se relacionava nem com as fluxões newtonianas, nem com os infinitesimais leibnizianos e nem com os zeros eulerianos, e sim, com o processo de calcular **limites**. Assim, além de Jurin (1734) e de Robins (1735), conforme já vimos, d'Alembert também defendeu, desde 1754, o uso de limites para prover o fundamento do Cálculo ("metafísica do Cálculo"). Com efeito, nesse ano de 1754, d'Alembert escreveu o verbete sobre **Diferencial** (que foi publicado no Volume 4 da *Encyclopédie* (*Enciclopédia*)),[35] no qual afirmou que "a derivação de uma equação consiste simplesmente em encontrar o limite da razão entre diferenças finitas de duas variáveis incluídas nessa mesma equação". (Na linguagem atual, isso significa que: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.) Mais tarde, em 1765, d'Alembert escreveu o verbete sobre **Limite** para a *Encyclopédie*.[36]

Apesar de o conceito de limite visto acima representar mais um passo para o desenvolvimento do Cálculo, ele apresentava um sério problema pela falta de clareza em sua definição, já que para d'Alembert e Robins, a variável não atinge o limite, enquanto que para Jurin, em alguns casos, ela o alcança. Uma outra dificuldade para aquele desenvolvimento, relacionava-se ao conceito de **função** pois, conforme vimos, o mesmo referia-se a fórmulas e tal conceituação era insuficiente para resolver certos problemas, como, por exemplo, o de sistemas (cordas e hastes) vibrantes.[37]

O primeiro sistema vibrante a ser estudado foi a corda vibrante, e o estudo da mesma foi realizado pela primeira vez, em 1713, independentemente, por Taylor e Sauveur, e depois por Hermann, em 1716, segundo já falamos. Além de cordas, hastes vibrantes começaram a ser analisadas a partir de 1727, por Euler,[38] por John Bernoulli,[39] e por seu filho Daniel, este, a partir de 1732.[40] Contudo, com os trabalhos de d'Alembert, também sobre cordas vibrantes, começou uma grande polêmica entre esses matemáticos, provocada pelo conceito de função, segundo veremos a seguir.

Em dois trabalhos realizados em 1746,[41] e apresentados à Academia de Ciências e Letras de Berlim em 1747, d'Alembert deduziu a equação diferencial parcial da corda vibrante (na notação atual): $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, onde $a^2 = \frac{T}{\sigma}$, sendo T a tensão na corda e σ sua massa por unidade de comprimento. Para essa equação, d'Alembert encontrou uma solução da forma y(x,t) = $\frac{1}{2}$ [f(x + at) + f(x - at)], com f(x) (= y(x,0)) sendo uma "função arbitrária", representando a posição inicial (t = 0) da corda. A polêmica que se seguiu a essa solução foi a de saber se toda a posição inicial da corda podia ser descrita pela "função" f(x). Contudo, até o Século XVIII, o conceito de função ainda não estava bem entendido. Nessa época, segundo já relatamos, o conceito de função referia-se a fórmulas, isto é, uma relação entre **y** e **x** só podia ser chamada de função se pudesse ser expressa por uma fórmula. Desse modo, não estava claro se qualquer posição inicial da corda poderia ser descrita por uma fórmula.

Ao tomar conhecimento dos trabalhos de d'Alembert sobre a corda vibrante, Euler escreveu seu próprio trabalho e apresentou-o à Academia de Berlim em 16 de Maio de 1748.[42] Nesse trabalho, Euler demonstrou que se a forma inicial da corda fosse periódica, isto é (na notação atual): y(x,0) = $\sum A_n \; sen \; \frac{n\pi x}{\ell}$, então todos os possíveis movimentos posteriores da corda também seriam periódicos (também na notação de hoje): y(x,t) = $\sum A_n \; sen \; \frac{n\pi x}{\ell} \; cos \; \frac{n\pi a t}{\ell}$. No entanto, nessa solução, Euler não informou se o somatório envolvia um número finito ou infinito de termos, apesar de ele já considerar a idéia da superposição de modos vibracionais. Logo depois, em 1750,[43] d'Alembert apresentou um novo trabalho à Academia de Berlim no qual voltou ao problema da corda vibrante, corroborando suas idéias a respeito do mesmo, porém, afirmou, sem demonstrar, que o tempo de vibração da corda era independente de sua forma inicial.

As soluções encontradas por d'Alembert e por Euler, referidas acima, apresentavam um impasse uma vez que, enquanto Euler admitia que a posição inicial da corda poderia ser não-analítica, d'Alembert só considerava tal posição como analítica. Para complicar mais essa situação, depois de ler os trabalhos de d'Alembert (1746) e de Euler (1749), Daniel Bernoulli apresentou à Academia de Berlim, em 1753,[44] uma outra solução para essa questão polêmica. Tendo em vista resultados que havia obtido anteriormente, Daniel considerou que todos os modos de vibração da corda poderiam existir simultaneamente e, portanto, tanto a posição inicial da corda, quanto as demais posições seriam representadas por uma série infinita de funções trigonométricas.[45] Essa solução foi contestada por Euler em trabalho comunicado a essa mesma Academia, ainda em 1753,[46] no qual demonstrou que "funções arbitrárias" eram capazes de representar "todas as curvas da corda" e vice-versa. Desse modo, afirmou que a função $y = \phi(x + at) + \psi(x - at)$, com ϕ e ψ arbitrárias, seria uma solução da equação da corda vibrante.

Uma primeira tentativa para resolver essa polêmica foi apresentada por Lagrange, em 1759,[47] em artigo no qual tratou do problema relacionado à natureza e propagação do som. Utilizando-se de técnicas matemáticas empregadas na solução desse problema, Lagrange aplicou-as ao problema da corda vibrante e concluiu que de um modo bastante geral, as funções arbitrárias de Euler poderiam ser representadas pelas séries trigonométricas de Daniel Bernoulli. Ao receber críticas de Euler, Daniel e d'Alembert, em cartas trocadas ainda em 1759, Lagrange concentrou-se no problema da corda vibrante nos anos de 1760 e 1761. Em conseqüência disso, preparou um novo artigo,[48] no qual apresentou uma solução diferente para a equação diferencial da corda vibrante. Usando alguns artifícios matemáticos, como, por exemplo, multiplicando essa equação por uma função desconhecida, Lagrange transformou-a em duas equações diferenciais ordinárias, e ao resolvê-las, obteve a solução final da corda vibrante (em notação atual):

$$y(x,t) = \frac{1}{2} \left[f(x + at) + f(x - at) - \int_o^{x+t} g(x)\, dx + \int_o^{x-t} g(x)\, dx\right],$$

onde f(x) = y(x,0) e g(x) = $(\frac{\partial y}{\partial t})_{t=o}$. Desse modo, conforme Lagrange demonstrou, a solução concordava com a de d'Alembert.

Apesar dessa solução, a polêmica sobre a corda vibrante continuou pelo restante do século XVIII, e só foi resolvida com os trabalhos dos matemáticos, os franceses Cauchy e Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) e os alemães Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) sobre continuidade e diferenciabilidade de funções, realizadas no século XIX, conforme veremos na próxima Crônica.

Depois dessa rápida discussão sobre o problema da corda vibrante, voltemos às contribuições de Euler para o desenvolvimento do Cálculo. Até aqui, vimos algumas dessas contribuições reunidas por Euler nos livros *Introductio*, de 1748, e *Institutiones*, de 1755. Agora, vejamos as do livro *Institutiones Calculi Integralis*, composto de 3 volumes. No Volume I, editado em 1768, Euler sistematizou vários trabalhos nos quais desenvolveu métodos de solução para resolver equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes, como o ainda hoje famoso **método do fator integrante**, descoberto em 1734,[49] para resolver equações de primeira ordem, assim como o método geral de resolver equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes de ordens mais altas e homogêneas, obtido no trabalho de 1743,[50] e não-homogêneas, encontrado no artigo de 1750,[51] acrescido de uma discussão sobre a distinção entre soluções particulares e gerais, dessas mesmas equações.[52] Ainda nesse Volume I, Euler descreveu alguns métodos especiais de integração, mais tarde conhecidos como **integrais eulerianas**[53] e **integrais elípticas**. Estas, conforme vimos na nota 20, surgiram no estudo da retificação de certas curvas (por exemplo: elipse, hipérbole, ciclóide e lemniscata), e os primeiros trabalhos sobre as mesmas foram realizados pelos irmãos James[54] e John Bernoulli[55] e por Giulio Carlo di Fagnano.[56]

Quando o *Produzioni matematiche*, de di Fagnano, foi recebido pela Academia de Berlim, em 1751, Euler foi solicitado a emitir sua opinião sobre o mesmo e, rapidamente, percebeu a importância de seu conteúdo para a integração de equações diferenciais envolvendo radicais. Assim, começou uma série de trabalhos sobre esse assunto, que foram comunicados à Academia Petropolitana, entre 1756 e 1759.[57] Nesses trabalhos, Euler deduziu um resultado importante, hoje conhecido como o **Teorema da Adição das Integrais Elípticas**: $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}$, onde R(z) = A$z^4$ + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E, sendo que cada uma dessas integrais é dada por arcos de cônicas ou lemniscata. No entanto, essa descoberta de Euler - feita quase por acaso - permitiu-lhe comparar não apenas os arcos de cônicas ou lemniscata, mas, também, arcos de curvas transcendentais dadas pela integral $\int \frac{P(x)dx}{R(x)}$, onde P(x) é uma função racional e R(x) continua sendo a raiz quadrada de um polinômio do quarto grau.

Contudo, essa descoberta de Euler sobre as integrais elípticas apresentava dificuldades, pois se restringia apenas a considerações geométricas, segundo o próprio Euler destacou no Volume I de *Integralis*. O estudo analítico dessas integrais foi feito por Legendre, numa série de pesquisas realizadas entre 1768 e 1826. Por exemplo, em 1786,[58] Legendre reuniu seus primeiros trabalhos sobre a integração de arcos elípticos, nos quais obteve um método geral para resolver as integrais $\int \frac{P(x)dx}{R(x)}$, usando aproximações, assim como apresentou uma nova demonstração para o **Teorema de Landen**.[59] Logo depois, em 1793, preparou o trabalho intitulado *Mémoires sur les transcendantes elliptiques* (*Memórias sobre as elípticas transcendentais*), no qual propôs comparar e classificar todas as funções desse tipo, reduzi-las a uma forma mais simples, e calculá-las da maneira mais fácil através de aproximações. Novos resultados sobre essas "funções" foram apresentados por Legendre no Volume I de seu *Exercices de calcul intégral*, editado em 1811, inclusive as representações trigonométricas das integrais elípticas, as hoje famosas **integrais elípticas de primeira, segunda e terceira espécies**.[60] Por fim, um estudo completo das *integrais elípticas* (contendo, inclusive, tabelas das mesmas) foi apresentado por Legendre no célebre *Traité des fonctions elliptiques* (*Tratado das funções elípticas*), obra em dois volumes, publicados em 1825 e 1826.[61]

No Volume II do *Integralis*, editado em 1769, Euler continuou tratando de equações diferenciais, em especial, a hoje conhecida **equação diferencial hipergeométrica**:[62]

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c - (a + b + 1)x]\frac{dy}{dx} - aby = 0,$$

para a qual apresentou a seguinte série-solução:[63]

$$y = 1 + \frac{a.b}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots .$$

Por fim, no Volume III do *Integralis*, publicado em 1770, Euler desenvolveu alguns trabalhos sobre equações em derivadas parciais e sobre o Cálculo das Variações, segundo veremos a seguir.

Conforme vimos anteriormente, Euler lidou com equações em derivadas parciais ao tratar o problema da corda vibrante, entre as décadas de 1720 e 1750.[64] Porém, esse tipo de problema só envolvia equações em derivadas parciais com uma variável espacial e uma temporal, ou seja, os deslocamentos da corda eram dados pela função y(x,t). Em 1759,[65] Euler preparou um trabalho no qual começou a estudar as vibrações de membranas retangulares e circulares. No caso das circulares, ao usar coordenadas polares, obteve a seguinte equação diferencial: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}$. Ao procurar soluções da forma:

$$z(r,\phi) = u(r)\ \mathrm{sen}(\omega t + A)\ sen(\beta\phi + B),$$

Euler obteve e resolveu, por intermédio de séries infinitas, a hoje conhecida **equação de Bessel**: u" + $\frac{1}{r}u' + (\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2})u = 0$. Com exceção de um fator dependendo apenas de β, Euler obteve como solução dessa equação, a atual representação em série da $J_\beta(r)$.[66]

Novas equações em derivadas parciais foram encontradas por Euler em suas pesquisas sobre o movimento dos fluidos e a propagação do som. Com efeito, em trabalho realizado em 1752,[67] Euler estudou os fluidos incompressíveis perfeitos (não viscosos), trabalho que foi logo generalizado, numa série de três artigos escritos entre 1753 e 1755,[68] nos quais Euler tratou ainda dos fluidos perfeitos, porém compressíveis. Nesses trabalhos, o fluido é tomado como um contínuo e suas partículas constituintes são consideradas como pontos matemáticos. Ao admitir a força $\vec{F}$ (por unidade de massa) atuando sobre um pequeno volume do fluido de densidade ρ, e sujeito a uma pressão **p**, Euler demonstrou a hoje ainda célebre **Equação de Euler** (na notação atual): $\nabla p + \rho\vec{F} = \rho\vec{v}$. Ainda nesses trabalhos, Euler generalizou a **Equação da Continuidade** (que havia sido demonstrada por d'Alembert em seus estudos sobre o movimento dos fluidos[69] e também por Euler no artigo de 1752, conforme já vimos) obtendo para o fluxo de fluidos perfeitos compressíveis a equação (na linguagem moderna): $\nabla.(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

Ao fazer a descrição espacial da Hidrodinâmica, isto é, ao estudar as propriedades físicas do fluido em cada ponto do espaço (velocidade: $\vec{v}(\vec{r},t)$, densidade: $\rho(\vec{r},t)$, pressão: $p(\vec{r},t)$, etc.), Euler criou um novo formalismo matemático para estudar o movimento dos fluidos, formalismo esse hoje conhecido como **descrição euleriana**, na qual as taxas e variação dessas propriedades são demonidades de **derivadas convectivas**, e denotadas por (na notação de hoje): $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\nabla$. Mais tarde, no Volume I do *Mécanique*, Lagrange generalizou as equações de Euler, porém, estudou o movimento espacial das partículas constituintes do fluido, através de suas trajetórias, estudo esse hoje conhecido como **descrição lagrangeana**.[70]

Equações em derivadas parciais também foram objeto de pesquisa por parte de Euler, quando procurou estudar o problema da propagação do som no ar, assunto que lhe preocupava desde 1731 quando escreveu o livro (publicado em 1739) *Tentamen Novae Theoriae Musicae ex Certissimis Harmoniae Principiis Dilucide*

Expositae (*Um Investigação sobre uma Nova Teoria da Música, Baseada sobre Incontestáveis Princípios de Harmonia*). Assim, com o desenvolvimento de seu estudo sobre os fluidos, Euler passou a utilizá-lo para entender aquele problema. Com efeito, em 1759, Euler apresentou à Academia de Ciências de Berlim alguns trabalhos nos quais obteve e resolveu as equações em derivadas parciais referentes à propagação do som em uma, duas e três dimensões.[71] Mais tarde, em 1771,[72] Euler preparou um novo trabalho no qual estudou a propagação do som em tubos cilíndricos e não-cilíndricos, com o objetivo de compreender o funcionamento dos instrumentos de sopro.[73]

O estudo da atração gravitacional entre corpos massivos levou os matemáticos a tratar com outras equações em derivadas parciais. Com efeito, os trabalhos de Maclaurin e Clairaut sobre esse tipo de atração gravitacional[74] mostraram que era possível calcular a força de gravitação ($\vec{F}$) por intermédio de uma função potencial (V($\vec{r}$)), isto é (na notação de hoje): $\vec{F} = -\nabla V$.[75] Essa expressão facilitava o cálculo da força de gravitação exercida por um dado corpo, desde que fosse conhecida a sua distribuição de massa (densidade ρ) e, também, se a sua forma fosse bem precisa, já que bastaria calcular primeiro V (por intermédio uma integral tripla, ao invés de três integrais triplas,[76] como seria o caso do cálculo direto da força), e logo depois a sua derivada. Contudo, para muitas formas de corpos essas integrais triplas não são integráveis em termos de funções simples; em vista disso era necessário calcular V por outros meios.

Numa série de três pesquisas realizadas em 1772, 1773 e 1775, Laplace calculou a força de atração gravitacional exercida por corpos de revolução, porém, nesses cálculos, trabalhou apenas com as componentes dessa força, sem usar o potencial. Mais tarde, em 1782,[77] Legendre escreveu seu famoso trabalho intitulado *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes* (*Pesquisas sobre a atração dos esferóides*) no qual demonstrou um importante teorema: - "Se a atração de um sólido de revolução é conhecida em cada ponto externo do prolongamento de seu eixo, então ela será conhecida em qualquer ponto externo".[78]

Esse trabalho de Legendre inspirou Laplace a escrever, ainda em 1782,[79] seu famoso artigo intitulado *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes* (*Teoria das atrações dos esferóides e da forma dos planetas*), no qual estudou o problema da força de atração gravitacional por intermédio de uma função potencial, exibindo, sem demonstrar, a equação satisfeita pela mesma (na notação atual):

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + r\,\frac{\partial^2(rV)}{\partial^2 r} = 0, \text{ com } \mu = \cos\theta.$$

Ainda nesse mesmo artigo, ao considerar que V(r,θ,ϕ) $= \frac{U_o}{r} + \frac{U_1}{r^2} + \frac{U_2}{r^3} + ...$, onde $U_n = U_n(\theta,\phi)$, Laplace demonstrou que (também na linguagem atual):[80]

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial U_n}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\phi^2} + n(n+1)U_n = 0.$$

Mais tarde, em 1787, Laplace escreveu o artigo em que aparece a hoje famosa **Equação de Laplace** em coordenadas cartesianas: $\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$.[81]

Ainda na década de 1780, Legendre continuou suas investigações sobre a atração gravitacional de corpos, ocasião em que obteve relações importantes entre suas funções. Por exemplo, em 1784,[82] Legendre demonstrou que (na notação atual): $\int_o^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)\,dx = \frac{1}{4m+1}\,\delta_{mn}$ e, em 1790,[83] demonstrou que (ainda na notação atual): $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}\,\delta_{mn}$.[84]

Ao concluir esta Crônica, vejamos o desenvolvimento do Cálculo das Variações ocorrido no Século XVIII. Conforme vimos na Crônica anterior,[85] os primeiros problemas relacionados com esse tipo de

Cálculo foram tratados por Newton, Leibniz, l'Hôpital e pelos irmãos James e John Bernoulli, no último quartel do Século XVII.

No Século XVIII, o primeiro matemático (além dos referidos anteriormente) a lidar com um problema variacional foi Euler. Com efeito, em 1728, John Bernoulli propôs a Euler resolver um velho problema que ele havia tratado em 1697,[86] qual seja, o problema de encontrar a menor distância (**geodésica**) entre dois pontos sobre superfícies, usando a propriedade de que os planos osculatrizes das geodésicas cortam perpendicularmente essas superfícies.[87] Assim, ainda em 1728,[88] Euler resolveu esse problema apresentando as equações diferenciais para geodésicas sobre superfícies. Logo depois, em 1732,[89] Hermann também encontrou geodésicas sobre superfícies particulares.[90]

A disciplina matemática, hoje conhecida como **Cálculo das Variações** foi desenvolvida por Euler, a partir de 1734. Assim, nesse ano de 1734,[91] generalizou o problema da **braquistócrona**[92] ao minimizar outras quantidades além do tempo. O método usado por Euler para fazer essa generalização consistiu em estudar os extremos (máximo ou mínimo) de uma função representada pela integral (na notação moderna) $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\ dx$. Para isso, ele calculou a variação (δ) de J e, ao igualar a mesma a zero ($\delta J = 0$), obteve a seguinte equação: $f_x - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0$, onde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}$, com $y' = \frac{dy}{dx}$. Logo depois, em 1736,[93] Euler apresentou essa equação na forma (atual): $f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y} - y'' f_{y'y'} = 0$.

Entre 1736 e 1744, Euler realizou novas pesquisas com o objetivo de aperfeiçoar o seu método variacional, e as reuniu no livro intitulado *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (*Um método de descobrir linhas curvas que apresentam a propriedade de máximo ou mínimo ou a solução do problema isoperimétrico tomado em seu sentido mais amplo*), publicado em 1744. Em um dos apêndices desse livro, Euler usou o seu método variacional para resolver o problema que lhe havia sido proposto por Daniel Bernoulli, em carta escrita em 1742: - "Encontrar a forma de um bastão elástico sujeito a uma força axial, assumindo seja mínimo o quadrado da curvatura ao longo da curva formada pelo bastão fletido".[94] Euler resolveu esse problema por meio de integrais elípticas. Ainda em outro apêndice do mesmo livro (que, por sinal, lhe deu grande fama), Euler apresentou uma nova formulação para o **Princípio da Mínima Ação** que havia sido enunciado pelo matemático francês Pierre Louis Moureau de Maupertuis (1698-1759), também em 1744.[95] Para Euler, esse Princípio deveria ser escrito na seguinte forma (na notação moderna): $\delta \int v\ ds = \delta \int v^2\ dt = 0$, expressão essa que indicava ser a **ação de Maupertuis** mínima para movimentos de partículas ao longo de curvas planas.[96]

Os trabalhos de Euler sobre o problema variacional atraiu a atenção de Lagrange, em 1750, quando este era um jovem professor da Escola de Artilharia, em Turim. Depois de os ler (inclusive o *Methodus*), Lagrange descartou os argumentos geométricos-analíticos usados por Euler e pelos irmãos Bernoulli (James e John) no trato desse problema, e começou a estudá-lo sob o ponto de vista puramente analítico. Assim, no começo de 1755, escreveu uma carta a Euler na qual apresentou os primeiros resultados de seu **método de variações**,[97] e havendo recebido do mesmo incentivo para continuar, Lagrange preparou em 1760, seu famoso artigo intitulado *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* (*Tentativa de um novo método para determinar o máximo e o mínimo de integrais indefinidas*).[98]

Nesse *Essai*, Lagrange usou um método diferente para determinar a curva **y(x)** que extremiza a integral (na notação atual): $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\ dx$. Assim, ao invés de variar individualmente as ordenadas da curva **y**, ele introduziu novas curvas entre os seus pontos extremos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), as quais representou na forma $y(x) + \delta y(x)$, onde δ era um símbolo especial introduzido por Lagrange para representar a **variação** da curva y(x). Desse modo, a introdução de uma nova curva no integrando de J mudou o seu valor produzindo o incremento ΔJ, dado por: $\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y')]\ dx$. Em seguida, Lagrange considerou o integrando como uma função de três variáveis independentes (mantendo **x** constante) e o desenvolveu em série de Taylor, ou seja: $\Delta J = \delta J + \frac{1}{2!}\delta^2 J + \frac{1}{3!}\delta^3$J + ..., onde

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (f_y \delta y + f_{y'} \delta \text{y'})\ \text{dx},$$

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} [f_{yy}(\delta y)^2 + 2 f_{yy'}(\delta y)(\delta y') + f_{y'y'}(\delta y')^2]\ \text{dx}$$

representam, respectivamente, a **primeira variação**, a **segunda variação**, e assim por diante.

Para encontrar os extremos de J, Lagrange considerou apenas a primeira variação. Então, ao fazer $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta \text{y})$, obteve: $\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f_y \delta y + f_{y'} \frac{d}{dx}(\delta \text{y})]$ dx. Integrando por partes o segundo termo dessa expressão e considerando que $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, encontrou: $\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'})]\ \delta$y dx. Por fim, ao admitir que δJ = 0, Lagrange concluiu que o coeficiente de δy deveria ser nulo,[99] encontrando dessa maneira a mesma equação obtida por Euler (a hoje famosa **Equação de Euler-Lagrange**): $f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0$.

O problema do cálculo variacional envolvendo integrais múltiplas, também foi tratado por Lagrange. Por exemplo, em dois apêndices de seu trabalho de 1760-1761[100] estudou problemas relacionados com a determinação dos extremos da função (na notação moderna): J = $\int\int$ f(x,y,z,p,q) dx dy, onde z = g(x,y), p = $\frac{\partial z}{\partial x}$ e q = $\frac{\partial z}{\partial y}$. Lagrange voltou a tratar com outros problemas desse tipo, em trabalhos realizados entre 1766 e 1770.[101] Nesses trabalhos, ao minimizar a função J, encontrou a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem e não-linear: Rr + Ss + Tt = U, onde R, S, T e U são funções de **x**, **y**, **z**, **p** e **q** com (na notação atual): p = $\frac{\partial z}{\partial x}$, q = $\frac{\partial z}{\partial y}$, r = $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, s = $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e t = $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.[102]

Muito embora o Cálculo das Variações trabalhado por Euler e Lagrange não haja sido bem entendido por seus contemporâneos, eles continuaram realizando pesquisas no sentido de melhorá-lo cada vez mais. Por exemplo, Euler estendeu-o a novos e antigos problemas,[103] e Lagrange aplicou-o à Dinâmica. Com efeito, em seu estudo da Dinâmica, Lagrange considerou o Princípio da Mínima Ação de Maupertuis-Euler (na notação atual): $\delta \int_{t_o}^{t_1}$ T dt = 0, onde T = $\frac{1}{2}$ ($\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$). Supôs ainda que as forças derivam da função potencial V(x, y, z), com a condição de que T + V = constante. Ao aplicar o seu Cálculo das Variações, a esse Princípio, demonstrou que (na linguagem de hoje): $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ e $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$, equações essas equivalentes à Segunda Lei de Newton (na notação de hoje): m$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$, m$\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y$ e m$\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$, respectivamente.[104]

Apesar do desenvolvimento do Cálculo das Variações levado a cabo por Euler e Lagrange, havia uma dificuldade com o mesmo, pois a equação de Euler-Lagrange só fornecia (e ainda fornece) apenas a condição necessária para estudar o máximo ou o mínimo de um dado funcional, sem, no entanto, decidir qual desses dois (máximo ou mínimo) resolveria o problema. Faltava a condição suficiente, como acontece no cálculo ordinário em que é o sinal da derivada segunda (f"(x)) que determina o extremo: máximo, quando f"(x) < 0 e mínimo, quando f"(x) > 0. Usando esse fato, em 1786,[105] Legendre usou a segunda variação δ^2J, e afirmou que o máximo ocorreria quando $f_{y'y'} \leq 0$ e mínimo, quando $f_{y'y'} \geq 0$. Contudo, o próprio Legendre mostrou em 1787, que o sinal de $f_{y'y'}$ dava apenas a condição necessária. Esta só foi conhecida no Século XIX, conforme veremos na próxima Crônica.

Notas e referências bibliográficas

1. BASSALO, J. M. F. 1996a. *A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(2)*: 103-112; —— 1996b. *A Crônica do Cálculo: II. Na época de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(3)*: 181-190; —— 1996c. *A Crônica do*

Cálculo: III. Contemporâneos de Newton e Leibniz. Revista Brasileira de Ensino de Física, 18(4): 328-336.

2. Para escrever este artigo, consultamos os seguintes textos: BARON, M. E. 1985. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*, Unidades 1 e 2; BARON, M. E. e BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidade 3; BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidades 4 e 5, da Open University. Editora da Universidade de Brasília; BOYER, C. B. 1968. *A History of Mathematics.* John Wiley and Sons; CANNON, J. T. and DOSTROVSKY, S. 1981. *The Evolution of Dynamics. Vibration Theory from 1687 to 1742.* Springer-Verlag; KLINE, M. 1974. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press; RONAN, C. A. 1987. *História Ilustrada da Ciência.* Jorge Zahar Editor; SEDGWICK, W. T., TYLER, H. W. e BIGELOW, R. P. 1950. *História da Ciência.* Editora Globo; STRUIK, D. J. (Editor) 1969. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard University Press; TRUESDELL, C. A. 1968. *Essays in the History of Mechanics.* Springer-Verlag. Além desses livros, consultamos também alguns verbetes da *Encyclopaedia Britannica* (University of Chicago, 1988) e do *Dictionary of Scientific Biography* (Charles Scribner Sons, 1981).

3. Cf. Nota (1).

4. Para demonstrar essas regras, tanto Leibniz quanto os irmãos Bernoulli e l'Hôpital utilizaram o "postulado" básico de que infinitesimais de ordem superior eram desprezados em presença dos de ordem inferior. Por exemplo, para demonstrar que d(xy) = xdy + ydx, é necessário desprezar o infinitesimal (dx.dy) de segunda ordem, em presença dos infinitesimais (xdy e ydx) de primeira ordem.

5. Esses três trabalhos têm os seguintes títulos: *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinitè parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis* (1694); *Analysis infinitorum, seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae* (1695); *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia; et responsio ad virum nobilissimum C. G. Leibnitium* (1696).

6. No *Acta Eruditorum Lipsiensium* (*Ata dos Eruditos de Lípsia (Leipzig)*) de 1695, Leibniz respondeu às críticas de Nieuwentijdt afirmando que havia diferentes graus de infinito ou de infinitesimais. Por exemplo, como defesa desse seu argumento, observou que "a Terra era considerada como um ponto quando comparada com as distâncias às estrelas fixas, assim como uma bola é considerada como um ponto quando comparada com a Terra". Observou mais ainda "que as distâncias às estrelas fixas eram infinitamente infinitas com respeito ao diâmetro da bola". Os trabalhos de Nieuwentijdt também foram criticados por um aluno de James, o matemático suíço Jacob Hermann (1678-1733), em trabalho publicado em 1700, e intitulado *Responsio ad Clar. Viri Bernh. Nieuwentijt considerationes secundas circa calculi differentialis principia editas.* É interessante observar que esse matemático, mais tarde, apresentou importantes contribuições à Geometria Analítica, ao representar certas curvas algébricas por intermédio de coordenadas polares, assim como demonstrou a maneira de transformar coordenadas cartesianas em polares. Essas contribuições foram reunidas nos *Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae* (*Comentários da Academia de Ciências Imperial Petropolitana*), editado entre 1729 e 1733.

7. Por exemplo, no *Acta Eruditorum* de 1704, Leibniz considerou-se como o inventor do Cálculo e protestou junto à **Royal Society** sobre a acusação de Duillier. Em outras ocasiões, Leibniz continuou apelando para que aquela Sociedade estudasse o caso da prioridade da invenção do Cálculo. Em vista disso, a **Royal Society** designou um comitê para estudar esse caso; após examinar as cartas que Leibniz enviou a Newton, em 1676, o comitê preparou, em 1712, o relatório intitulado *Commercium Epistolicum* que concluiu ser Newton o inventor do Cálculo. A disputa entre Leibniz e Newton prosseguiu de maneira não muito atenciosa. Por exemplo, o *Acta* de 1705 rejeitou a publicação (será que aceitando algum parecer de Leibniz?) do trabalho de Newton intitulado *De Quadratura Curvarum* (*Sobre a Quadratura das Curvas*), no qual apresentou um conjunto de problemas resolvidos pelo método das fluxões, problemas semelhantes aos que Leibniz havia resolvido com o seu próprio método. De sua parte, na terceira edição do famoso livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*), publicada em 1726, Newton retirou qualquer referência a Leibniz como sendo autor de um método de cálculo similar ao seu.

8. Os ataques de Rolle ao cálculo leibniziano foram respondidos pelo matemático francês Pierre Varignon (1654-1722), amigo de John Bernoulli, e apresentados no texto *Eclaircissement sur l'Analyse des Infiniments Petits* (*Esclarecimento sobre a Análise dos Infinitamentes Pequenos*), publicado somente em 1725, após a morte de Varignon e de l'Hôpital. Registre-se que Varignon, em 1704, apresentou uma *Mémoire* à Academia Francesa de Ciências na qual descreveu algumas curvas algébricas por intermédio de coordenadas polares.

9. Foi Cotes quem preparou, entre 1709 e 1713, a segunda edição (ainda em latim) do *Principia* de Newton, publicada em 1713.

10. Também nesse livro há uma tabela de integrais envolvendo as funções logaritmo e trigonométrica (para esta, Cotes reconheceu a sua periodicidade), e a "famosa propriedade do círculo" dada pela expressão (na notação atual):

$$x^{2n} + 1 = [x^2 - 2x \cos(\tfrac{\pi}{2n}) + 1]\,[x^2 - 2x\ \cos(\tfrac{3\pi}{2n}) + 1] \ldots [x^2 - 2x \cos(\tfrac{(2n\ -\ 1)\pi}{2n}) + 1].$$

11. Na literatura matemática universal esse teorema é atribuído ao matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783), conforme veremos mais adiante.

12. Ainda nesse ano de 1715, Taylor (que também era um talentoso artista) publicou o livro *Linear Perspective* (*Perspectiva Linear*). Mais tarde, em 1719, Taylor voltou a tratar da perspectiva no livro *New Principles of Linear Perspective* (*Novos Princípios da Perspectiva Linear*). Nesses livros, há um primeiro tratamento sobre o **princípio dos pontos de fuga**.

13. Essa fórmula já havia sido obtida por Taylor em 1712.

14. Parece que antes de 1550, os matemáticos indianos já conheciam a **série de Taylor**.

15. O matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) no famoso livro *Treatise of Fluxions* (*Tratado das Fluxões*), editado em 1742, apresentou um caso particular da série de Taylor (a = 0), a hoje conhecida **série de Maclaurin**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\tfrac{x^2}{2!} + \ldots + f^n(0)\tfrac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Nesse livro, Maclaurin interpretou as fluxões como velocidades instantâneas das variáveis, bem como deduziu as regras do cálculo através de rigorosas provas geométricas pelo método da exaustão. Observe-se que o matemático escocês James Stirling (1692-1770) já havia encontrado a série de Maclaurin para funções algébricas, em 1717 e, para funções mais gerais, em seu célebre *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitatum* (*Método Diferencial com um Tratado sobre Somação e Interpolação de Séries Infinitas*), editado em 1730. Aliás, é neste livro que há a célebre **fórmula de Stirling** que permite calcular log n! em função dos **números de Bernoulli** B_i (estes, obtidos por James, no estudo sobre probabilidade, e publicados após sua morte, em 1713), bem como uma fórmula aproximada quando $n \gg 1$: $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$, onde **e** é a base dos logaritmos neperianos, estes apresentados pelo matemático escocês John Napier (Neper) (1550-1617, em 1594. Ainda em 1730, no livro *Miscellanea Analytica* (*Miscelânia Analítica*), o matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754) apresentou uma fórmula similar a de Stirling. É interessante registrar que Moivre nesse livro foi o primeiro a apresentar a conhecida integral de probabilidade (na notação atual): $\int_o^\infty e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Registre-se, também, que foi Moivre quem primeiro usou números complexos em trigonometria (em trabalho publicado em 1707), através de sua célebre fórmula (mais tarde re-obtida por Euler, conforme veremos mais adiante): $(\cos x + \sqrt{-1} \text{ sen } x)^n = \cos (nx) + \sqrt{-1} \text{ sen } (nx)$.

16. A corda vibrante já havia sido objeto de estudo por parte de Taylor em trabalho realizado em 1713, e publicado na *Philosophical Transactions Royal Society of London 28 (1713)*, em 1714. Na linguagem atual, a equação diferencial da corda vibrante obtida por Taylor nesse trabalho, é da forma: $\sigma\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ =\ T\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, onde σ é a massa por unidade de comprimento e T é a tensão na corda. Eslareça-se que Taylor tratou esssa equação na forma: $a^2\ \ddot{x}\ =\ \dot{s}\ y\ \dot{y}$, onde $\dot{s}\ =\ \sqrt{\dot{x}^2\ +\ \dot{y}^2}$, $a = \frac{\ell}{\pi}$ e ℓ é o comprimento da corda. Ao admitir $y = A \text{ sen } (\frac{x}{a})$, ele obteve para a freqüência fundamental da corda a expressão (na notação atual): $\nu = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{Tg}{\sigma}}$, sendo **g** a aceleração da gravidade. Ainda em 1713, o matemático francês Joseph Sauveur (1653-1716) - o criador da **Acústica Musical** - apresentou à Academia Francesa de Ciências

uma *Mémoire* na qual calculou a freqüência vibracional de uma corda musical. Para esse cálculo, Sauveur considerou uma corda esticada horizontalmente em um campo gravitacional, e sujeita a pequenas vibrações horizontais. Logo depois, na *Acta Eruditorum* de 1716, Hermann apresentou sua análise sobre a corda vibrante tentando (sem sucesso) considerar seus movimentos como sendo os de um oscilador harmônico simples.

17. É interessante observar que o matemático inglês Edmund Stone (∼1700-1760) no livro *The Method of Fluxions both Direct and Inverse* (*O Método Direto e Inverso das Fluxões*), editado em 1730, em sua primeira parte, apresentou a tradução do *Analyse* de l'Hôpital, na qual substituiu os diferenciais leibnizianos (dx, dy) pelos fluxões newtonianos ($\dot{x}$, $\dot{y}$).

18. Foi Fontenelle quem preparou os obituários das mortes de Leibniz (1716) e Newton (1727) para a Academia Francesa de Ciências, pois era seu Secretário Permanente desde 1697.

19. Grandi ficou conhecido entre seus pares por haver resolvido a polêmica sobre o valor correto da soma S da série alternada 1 - 1 + 1 -1 + ... Vejamos como. Em 1696, James Bernoulli havia encontrado S = $\frac{1}{2}$. Contudo, a polêmica se instalou pois alguns matemáticos observaram que o valor de S mudava de acordo com a arrumação da série. Com efeito, se ela fosse arrumada na forma (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... obtem-se S = 0; se ela fosse escrita na forma 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - ..., encontra-se S = 1; por fim, usando-se as duas formas anteriores, verifica-se que S = 1 - S, logo S = $\frac{1}{2}$. Portanto, no livro intitulado *Quadratura Circuli et Hyperbolae* (*A Quadratura do Círculo e da Hipérbole*), publicado em 1703, Grandi encontrou o mesmo resultado de James, ao obter a série $\frac{1}{1\,+\,x}$ = 1 - x + x^2 - x^3 + ..., e fazendo na mesma x = 1. Grandi também contribuiu para o desenvolvimento da Geometria Analítica, ao obter em coordenadas polares (r = a cos (nθ) e r = a sen (nθ)), as curvas do tipo pétala de rosa - as famosas **rosas de Grandi**. É interessante ressaltar que Grandi foi aluno do matemático italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), que se tornou conhecido por haver tentado demonstrar o célebre postulado euclidiano das paralelas, no livro *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* (*Euclides Defendido de Todas suas Faltas*), publicado em 1733.

20. Entre 1714 e 1718, Fagnano publicou no *Giornali dei Letterati d'Italia* (*Jornal dos Literatos da Itália*) uma série de artigos sobre a retificação de certas curvas (elipse, hipérbole, ciclóide e lemniscata) estudadas pelos irmãos James e John Bernoulli, nos quais demonstrou que a retificação das mesmas não poderia ser feita por meio de funções elementares, e sim através das **integrais elípticas**, conforme Euler mostraria mais tarde, segundo veremos mais na frente.

21. Riccati tornou-se famoso por haver trabalhado com equações diferenciais ordinárias e não-lineares. Por exemplo, na *Acta Eruditorum* de 1724, ao estudar um problema de Acústica, chegou à equação (em notação atual): x$^m \frac{d^2x}{dp^2}$ = $\frac{d^2y}{dp^2}$ + $(\frac{dy}{dp})^2$. Ao fazer uma mudança de variável, Riccati obteve: x$^m \frac{dq}{dx}$ = $\frac{du}{dx}$ + $\frac{u^2}{q}$. Em seguida, ao assumir que q = x^n, chegou à forma: $\frac{du}{dx}$ + $\frac{u^2}{x^n}$ = nx$^{m\,+\,n\,-1}$. Para resolver essa equação diferencial ordinária de primeira ordem não-linear e para certos valores de **n**, Riccati usou o Método da Separação de Variáveis. Aliás, esse Método já havia sido utilizado antes pelos irmãos Bernoulli (John, em 1694 e James, em 1696), na resolução da hoje conhecida **equação de Bernoulli**: $\frac{dy}{dx}$ = P(x)y + Q(x)y^n. Registra-se também, que Riccati obteve: x$^m \frac{dq}{dx}$ = $\frac{du}{dx}$ + $\frac{u^2}{q}$. Em seguida, ao assumir que q = x^n, chegou à forma: $\frac{du}{dx}$ + $\frac{u^2}{x^n}$ = nx^{m+n-1}. Registra-se ainda que a também hoje conhecida **equação de Riccati**: $\frac{dy}{dx}$ = A(x) + B(x)y + C(x)y^2 recebeu esse nome do matemático francês Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), em 1763. Registre-se, ainda, que foi Riccati quem divulgou, na Itália, o trabalho de Newton.

22. Na *Acta Eruditorum* de 1719, Nicholas II demonstrou que a função $\frac{1}{x^4\,+\,a^4}$ só poderia ser integrada em termos de funções trigonométrica e logaritmo. Por outro lado, em cartas trocadas com Euler discutiu o problema da convergência de certas séries. Por exemplo, em carta de 7 de Abril de 1713, mostrou que a série: (1 + x)^n = 1 + nx + $\frac{n(n-1)}{2}x^2$ + ... não apresenta soma quando x < 0 (| x | >1) e **n** é fracionário. Em cartas de 1742 e 1743, Nicholas II mostrou que as séries

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

e

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + ...$$

exibem a mesma soma (- 1) para, respectivamente, x = 2 e x = 1, resultado esse que indicava uma contradição insolúvel. Para Nicholas II, essa contradição acontecia porque não era considerado em cada série o **termo restante**, e que, para o caso da série $\frac{1}{1-x}$, o mesmo valia $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$. Essa questão (que estava relacionada ao conceito de **convergência** ou **divergência** de séries, nomes dados por Gregory, em 1668) só ficou esclarecida com o trabalho do matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813) sobre a série de Taylor, realizado em 1797, no qual escreveu a seguinte expressão para essa série (na notação moderna):

$$f(x + a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + ... + f^n(a)\frac{x^n}{n!} + R_n,$$

onde $R_n = f^{(n+1)}(x + \theta h)\, \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$, com θ entre 0 e 1, expressão essa conhecida como **resto de Lagrange**.

23. Em 1716, Nicholas III trabalhou no problema de encontrar as trajetórias ortogonais a uma família (F(x,y,c) = 0) de curvas, problema esse que havia sido tratado por Leibniz, em 1715, por Newton, em 1716, e foi completado por Hermann na *Acta* de 1717, ao encontrar que aquelas trajetórias são dadas pela equação diferencial $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, onde F_x e F_y são as derivadas parciais de F.

24. Além de trabalhos realizados com sistemas (cordas e hastes) vibrantes, mencionados mais adiante, Daniel Bernoulli também estudou a **Hidrodinâmica**, termo esse que inclusive cunhou. Com efeito, em 1730, ele escreveu uma carta ao metamático russo Christian Goldbach (1690-1764) na qual descreveu seus estudos sobre o fluxo de fluidos em tubos horizontais, e que lhe permitiu descobrir o seguite Teorema (mais tarde conhecido como **Teorema** ou **Princípio de Bernoulli**: - "Quando a velocidade do fluxo dos fluidos aumenta, sua pressão diminui". Em 1734, Daniel concluiu seus estudos sobre o movimento de fluidos e os reuniu no manuscrito *Hydrodinamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*. Neste estudou, com auxílio do **princípio da força viva (vis viva)**, o fluxo estacionário de um fluido incompressível em um tubo horizontal fixo, relacionou a pressão que o mesmo exerce sobre as paredes desse tubo e a sua própria velocidade (**v**), obtendo a seguinte expressão: $v\,\frac{dv}{dx} = \frac{a-v^2}{2c}$, onde $\sqrt{a}$ é uma velocidade de referência, **dv** é o incremento da velocidade **v** do fluido ao atravessar uma distância **dx** no tubo, e $v\,\frac{dv}{dx}$ representa a pressão. Nessa expressão, as unidades são escolhidas de tal maneira que a aceleração da gravidade **g** vale $\frac{1}{2}$. Esse resultado matemático traduz, portanto, o Teorema que havia descoberto em 1730. É oportuno destacar que nesse livro (publicado somente em 1738), Daniel apresentou a idéia de que uma força poderia ser deduzida de uma "função potencial", expressão essa, aliás, que empregou nesse mesmo livro. Destaque-se, ainda, que seu pai John Berboulli, em 1740, concluiu o livro intitulado *Hydraulica, nunc Primum Detecta ac Demonstrata ex Fundamentis Pure Mechanics*, escrito com o objetivo de criticar o *Hydrodinamica* (1734-1738) de seu filho Daniel. Em seu livro, John estudou o movimento das águas separando cuidadosamente a cinemática da dinâmica do fluxo líquido; introduziu uma "força interna" atuando nas secções retas do fluido em movimento no conduto (como se fosse uma pressão interna), idéia essa que não havia sido considerada por seu filho Daniel. Com isso, generalizou o Teorema de Bernoulli e o apresentou quase na forma hoje conhecida: $p + \frac{DV^2}{2} + DgH =$ constante, onde **p** é a pressão, **D** é a densidade do fluido, **V** a sua velocidade e **H** é a altura em relação a um determinado referencial. (Registre-se que John datou esse manuscrito de 1732, um ano antes de seu filho Daniel entregar o manuscrito do *Hydrodinamica* à Academia de Ciências de São Petersburgo, pois queria se apropriar das idéias de seu filho.) Em 1739, Daniel Bernoulli apresentou à essa mesma Academia um trabalho contendo um estudo (no plano bi-dimensional) do equilíbrio de um corpo rígido flutuando em um fluido incompressível.

25. Esse livro tinha um título complementar: *A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein It is examined whether the Object, Principles and Inferences of the Modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith* (*Um Discurso Dirigido a um Matemático Infiel. Onde se discute a questão se o Objeto, Princípios e Inferências da Análise Moderna são concebidos mais distintamente ou deduzidos mais logicamente que os Mistérios e Pontos de Fé Religiosos*). É interessante observar que o "matemático infiel", embora não identificado por Berkeley, era o astrônomo inglês Sir Edmund Halley (1656-1742), que havia utilizado a teoria da gravitação newtoniana para identificar que os cometas aparecidos nos anos de 1456, 1531, 1607

e 1682 tratava-se do mesmo cometa, que depois ficou conhecido como o **cometa de Halley**.

26. Em 1735, Berkeley replicou Jurin no trabalho intitulado *A Defense of Freethinking in Mathematics*, simplesmente dizendo que Jurin havia defendido aquilo que ele próprio não havia entendido.

27. Por exemplo, Jurin definiu o limite de uma quantidade variável como "alguma quantidade determinada, para a qual a quantidade variável se aproxima continuamente, sem, contudo, nunca ultrapassá-la, podendo, em alguns casos, atingi-la". De seu lado, Robins definiu o limite como "uma última grandeza, para a qual uma grandeza variável se aproxima intimamente, porém nunca poderá ser absolutamente igual a ela".

28. Anteriormente, em 1737, o matemático inglês Thomas Simpson (1710-1761) publicou o livro *A New Treatise on Fluxions* (*Um Novo Tratado sobre Fluxões*) no qual definiu fluxão (na notação moderna): $\Delta y = (\frac{dy}{dt})\Delta t$. É oportuno notar que Simpson ficou conhecido pela hoje famosa **regra de Simpson**, apresentada no livro *Mathematical Dissertations on Physical and Analytical Subjects* (*Dissertações Matemáticas sobre Temas Analíticos e Físicos*) publicado em 1743. Com essa regra, quadraturas (áreas sob curvas) eram calculadas com aproximações de segmentos parabólicos.

29. Em 1737, Euler tratou pela primeira vez das frações contínuas no trabalho intitulado *De Fractionibus Continuis*, no qual demonstrou que cada número racional pode ser expresso como uma fração contínua finita, e que **e** e $\mathbf{e}^2$ são números irracionais. Aliás, o símbolo **e** - base dos logaritmos neperianos - foi usado por Euler pela primeira vez em 1727, no artigo *Meditatio in Experimenta Explosione Tormentorum Nuper Instituta* (somente publicado em 1864) e, também, pela primeira vez impresso no livro *Mechanica, sive Motus Scientia Analytice Exposita* escrito também por Euler em 1736. Registre-se que o trabalho de Euler sobre frações contínuas foi utilizado pelo físico e matemático suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777) para demonstrar, em 1761, que e^x e tg (x) não são números racionais. Ora, como tg $\frac{\pi}{4} = 1$, Lambert concluiu que π não é um número racional.

30. A palavra **função** foi usada pela primeira vez na Matemática por Leibniz no artigo intitulado *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis*, publicado na *Acta* de 1692, no qual ele mostrou como calcular a evoluta de uma família de curvas. Nesse artigo, escreveu que "a linha tangente e outras funções dependem ... ." Para Leibniz, "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica formada de qualquer modo por tal quantidade variável e por números e quantidades constantes". Portanto, no sentido leibniziano, "funções" representavam quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva, tais como coordenadas, tangentes, subtangentes, normais, raios de curvatura, etc. Essa mesma idéia foi apresentada por Leibniz, no *Journal des Sçavans* de 1694. Por sua vez, John Bernoulli empregou o termo "função" de modo diferente, em carta que escreveu para Leibniz, em Agosto de 1698, em resposta a uma carta de Julho de 1698, na qual Leibniz apresentava seu conceito de "função". Assim, para John, "funções" seriam expressões analíticas (fórmulas) que envolviam somente uma quantidade variável, como, por exemplo, (a + x)$^3bx^2$. Esse emprego do termo "função" foi utilizado por Euler no *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 7 (1734-1735)*, editado em 1740, conforme já referimos. Por outro lado, no Capítulo I do *Introductio* de 1748, Euler adicionou a palavra "analítico" na definição de função apresentada por John no *Opera Omnia* de 1742, bem como apresentou as primeiras classificações de funções: "algébricas", "transcendentais", "valores simples", "valores múltiplos", etc. No Volume II do *Introductio*, Euler discutiu linhas curvas por intermédio desse conceito de função e no *Institutiones* de 1755, demonstrou como diferenciar certas "funções". Por fim, Euler voltou a empregar o termo função no livro *Historia et Origo Calculi Differentialis* (*História e Origem do Cálculo Diferencial*), publicado em 1714.

31. Euler começou a estudar séries a partir de 1730. Já em 1734-1735 realizou trabalhos (que foram publicados em 1740 nos *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 7 (1734-1735)*), nos quais além de demonstrar que se y = e^x, então x = ℓy, apresentou as representações em série das seguintes funções: sen x = x - $\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ - ..., cos x = 1 - $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ - ..., $\ell(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$ - ... . Usando esta última representação, Euler demonstrou que: $\gamma = \sum_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ell$ n) = 0,577218. (Em 1790, o matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) publicou

o livro *Adnotationes ad Calculum Integrale Eureli* (*Anotações sobre o Cálculo Integral Euleriano*) no qual apresentou o valor de γ com 32 decimais. Em vista disso, essa constante passou a ser conhecida como **constante de Euler-Mascheroni.**) Ainda naquele artigo, utilizando as representações das funções seno e cosseno, Euler reobteve a **fórmula de Moivre** ((cos ϕ + $\sqrt{-1}$ *sen* $\phi)^n$ = cos (nϕ) + $\sqrt{-1}$ *sen*(nϕ)), demonstrou que $e^{\pm\sqrt{-1}\phi} = cos\ \phi \pm \sqrt{-1}\ sen\ \phi$, e obteve a representação em série do A.tang.t (na notação atual: tg^{-1} t), isto é: z = A.tang.t = $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$. Ao fazer z= 45^o ou z = $\frac{\pi}{4}$ nesta última expressão, encontrou que: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$. É oportuno notar que Euler usou o símbolo **p** ao invés de π (este símbolo foi batizado pelo matemático inglês William Jones (1675-1749), em 1706) até 1737. Por outro lado, somente em 1777, no manuscrito *De Formulis Differentialis Angularibus* foi que introduziu a notação $\sqrt{-1}$ = i, uma vez que até então usava o símbolo **i** para denotar "número infinito", como se pode ver na expressão por ele utilizada: $e^x = (1 + \frac{x}{i})^i$, que significava (na notação de hoje) $e^x = \lim_{h\to\infty} (1 + \frac{x}{h})^h$. Note-se, também, que no artigo de 1734-1735 referido acima, Euler utilizou as notações: ℓx para representar o logaritmo neperiano de **x**, Σ para indicar as séries e f(x) para simbolizar uma função de **x**.

32. Nesse livro, Euler apresentou a seguinte expressão: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$, onde **n** é um número inteiro e B_{2n} são os **números de Bernoulli** definidos por James, em 1774, no livro póstumo *Ars Conjectandi* (*A Arte de Conjecturar*), editado por seu sobrinho Nicholas, filho de John. É interessante registrar que Euler, em 1740, já havia encontrado a série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^n}$ para alguns valores ímpares de **n**.

33. Usando esse método (e o desenvolvimento de ℓ(1 + x) obtido no *Introductio* (1748)), Euler calculou o diferencial de y = ℓx, da seguinte maneira: dy = ℓ(x + dx) - ℓx = $\ell(1 + \frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3}$ - ... . Por fim, considerando que os infinitésimos de ordem mais alta são evanescentes, obteve que: dy = d(ℓx) = $\frac{dx}{x}$.

34. Essa condição já havia sido proposta por Nicholas III Bernoulli, em 1721, e uma primeira demonstração foi apresentada por Euler em seus trabalhos de 1734-1735, referidos na Nota 31.

35. A obra *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts, et de Métiers* (*Enciclopédia, ou Dicionário Racional das Ciências, das Artes, e dos Ofícios*) composta de 28 Volumes e publicada entre 1751 e 1772, foi editada pelo filósofo francês Denis Diderot (1713-1784), com a colaboração de d'Alembert.

36. LIMITE, substantivo (Matemática) - "Diz-se que uma grandeza é o limite de uma outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente interminável".

37. Essas dificuldades só foram contornadas quando os conceitos de limite e de função foram bem compreendidos, porém, isso só aconteceu no século XIX, a partir dos trabalhos do matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) realizados na década de 1820, e que serão objeto da próxima Crônica.

38. Em um artigo escrito nesse ano de 1727 (que só foi publicado em 1862), Euler analisou o movimento de uma haste vibrante circular supondo que um elemento da mesma se comportava (na linguagem moderna) dinamicamente como uma partícula com um grau de liberdade e acelerada por uma força decorrente de uma energia potencial igual a energia interna do elemento considerado. Euler voltou a estudar os sistemas vibrantes em outras oportunidades. Com efeito, em Outubro de 1735, Euler comunicou à Academia de Ciências de São Petersburgo um trabalho (escrito em conseqüência de cartas que trocou com Daniel Bernoulli, em Dezembro de 1734 e Junho de 1735, conforme veremos mais adiante) no qual estudou as pequenas vibrações transversais de uma haste presa em uma de suas extremidades, sendo a outra livre, obtendo então a equação diferencial correspondente, e apresentou sua solução em forma de série. Ainda nesse trabalho, discutiu pela primeira vez a condição de equilíbrio estático de um pêndulo. Por outro lado, em trabalhos comunicados àquela Academia (1736, 1738, 1740 e 1741), Euler estudou o problema das oscilações de pêndulos compostos acoplados, assim como o de cordas vibrantes (contínuas e discretas) suspensas (esses problemas também foram tratados por Daniel Bernoulli, conforme vermos mais adiante). Por fim, em Agosto de

1742, Euler apresentou a essa mesma Academia um longo trabalho pedagógico sobre oscilações harmônicas de pêndulos compostos acoplados e analisou, também, os casos limites de um corpo rígido pendurado e de uma cadeia pendurada com **n** massas iguais e igualmente espaçadas.

39. Em Outubro e Dezembro de 1727, John Bernoulli escreveu cartas para seu filho Daniel que se encontrava em São Petersburgo, nas quais anunciou seus estudos sobre cordas vibrantes. Nesses estudos, John considerou uma corda vibrante sem peso, carregada com **n** massas iguais e igualmente espaçadas, sendo que essas massas satisfaziam à equação diferencial do oscilador harmônico simples: $\ddot{x}$ + Kx = 0, cuja solução ele a obteve por métodos analíticos. Na continuação de seu trabalho, John estudou a corda vibrante contínua e, ao resolver sua equação diferencial y" + ky = 0, encontrou que sua forma é sempre senoidal (esse tipo de curva era chamada de **trochoides socia** - "a companheira da ciclóide" - pelo matemático francês Gilles Personne de Roberval (1602-1675)), bem como determinou sua freqüência fundamental, que já havia sido obtida por Taylor. Esses trabalhos foram publicados nos *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 3 (1728)*, e editado somente em 1732. Em 1742, John reuniu seus trabalhos no *Operam Omnia*, em 4 Volumes. Nessa obra, John incluiu trabalhos que havia feito em 1740, sobre sistemas vibrantes, principalmente pêndulos compostos acoplados e hastes penduradas.

40. Em 1732-1733, nos *Commentarii Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae 6* publicado em 1738, Daniel Bernoulli apresentou seus estudos sobre as pequenas vibrações de uma corda sem peso, pendurada em uma extremidade e carregada com **n** massas igualmente espaçadas, bem como as vibrações de pêndulos acoplados. No caso da corda, demonstrou que os deslocamentos horizontais **y**, a uma distância **x** de sua extremidade livre, satisfazem à equação diferencial $\alpha \frac{d}{dx}(x \frac{dy}{dx})$ + y = 0, cuja solução (na notação atual) é dada por: y = A $J_o(2\sqrt{\frac{x}{\alpha}})$, onde α satisfaz a equação $J_o(2\sqrt{\frac{\ell}{\alpha}})$, onde ℓ é o comprimento da corda e J_o é a **função de Bessel de ordem zero**. (Um resultado análogo a esse também foi obtido por Euler. É interessante registrar que tanto Daniel quanto Euler observaram que J_o tinha muitas raízes (zeros).) Desse modo, Daniel encontrou que a vibração da corda suspensa poderia ser obtida por uma sucessão de um grande número de vibrações simples. Ainda em seu estudo das cordas vibrantes, Daniel tratou de cordas vibrantes suspensas de espessura não-uniforme, para as quais apresentou a seguinte equação diferencial (na notação de hoje): $\alpha \frac{d}{dx}(g(x)\frac{dy}{dx})$ + y$\frac{dg(x)}{dx}$ = 0, onde g(x) é a distribuição do peso da corda ao longo de seu comprimento ℓ. Considerando g(x) = $\frac{x^2}{\ell^2}$, Daniel obteve a seguinte solução (ainda em notação de hoje): y = 2A$(\frac{2x}{\alpha})^{-\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{\frac{2x}{\alpha}})$, com $J_1(2\sqrt{\frac{2\ell}{\alpha}})$= 0. Por outro lado, em Dezembro de 1734, Daniel escreveu para Euler dizendo-lhe que estava estudando as pequenas vibrações transversais de uma barra elástica com uma extremidade engastada na parede e a outra livre. Em Maio de 1735, voltou a escrever para Euler, e disse-lhe que aquelas vibrações satisfaziam a equação (na notação atual): $K^4 \frac{d^4y}{dx^4}$ = y (onde K é uma constante, **y** são os deslocamentos da barra numa posição **x** marcada a partir de sua extremidade livre), mas que a solução dessa equação (que havia encontrado na forma de seno e exponencial), era inapropriada. Logo em Junho de 1735, Euler respondeu a Daniel dizendo-lhe que havia encontrado uma equação semelhante, mas que somente as séries serviam como solução para a mesma. (Observe-se que Daniel, no trabalho de 1732, usou o método da separação de variáveis para resolver a equação diferencial da corda vibrante.)

41. Esses trabalhos foram publicados em 1749 na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 3 (1747)*, com os títulos de *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration* (*Pesquisas sobre a forma tomada por uma corda tensa em vibração*) e *Suite des Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration* (*Continuação das Pesquisas sobre a forma tomada por uma corda tensa em vibração*).

42. Esse trabalho, intitulado *Sur la vibration de cordes* (*Sobre a vibração da cordas*), foi inicialmente apresentado na *Nova Acta Eruditorum* de 1749, e posteriormente publicado em 1750 na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 4 (1748)*.

43. Esse trabalho foi publicado em 1752 na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 6 (1750)*, com o nome de *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration* (*Adição à

memória sobre a forma tomada por uma corda tensa em vibração).

44. Esse trabalho foi publicado em 1755 na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 9 (1753)* e intitulado *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 e 1748* (*Reflexões e esclarecimentos sobre as novas vibrações das cordas expostas nas memórias da Academia de 1747 e 1748*).

45. Nos trabalhos realizados em 1732-1733 (referidos anteriormente) sobre a vibração de cordas, Daniel observou que a mesma poderia ser composta de modos mais altos de vibração. Mais tarde, em 1740, em trabalho comunicado à Academia de São Petersburgo (publicado em 1750 nos *Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 12 (1740)*), Daniel descreveu esses modos. Entre 1741 e 1743, Daniel realizou novas pesquisas sobre as vibrações de uma barra. Assim, em um comunicado a essa mesma Academia (publicado em 1751 nos *Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 13 (1741-1743)*), ele apresentou um novo trabalho no qual estudou as vibrações de uma barra e os sons emitidos por ela, bem como separou os diversos modos dessas vibrações, observando ainda que os sons correspondentes (os diversos harmônicos) podiam existir juntos. Parece ser essa a primeira observação da co-existência das pequenas oscilações harmônicas. Apesar de entender fisicamente o problema, Daniel não foi capaz de formulá-lo matematicamente.

46. Esse trabalho intitulado *Remarques sur les mémoires precédents de M. Bernoulli* (*Observações sobre as memórias precedentes de M. Bernoulli*), foi publicado no mesmo Volume 9 da *Histoire* no qual Daniel Bernoulli havia publicado o seu.

47. Esse trabalho foi publicado na *Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis* 1_3, de 1759.

48. Esse artigo foi publicado na *Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis* 2_2, de 1762.

49. No artigo escrito em 1734 e publicado em 1740 nos *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 7 (1734-1735)*, Euler demonstrou a condição para que uma equação diferencial de primeira ordem do tipo M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 seja exata (na notação atual): $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Demonstrou ainda que no caso da equação não ser exata, em algumas situações, é possível integrá-la através do **fator integrante**. Por exemplo, se tivermos (na notação atual) y' + p(x)y = r(x), sua solução será dada por y = $\frac{1}{u}[\int r\ u\ dx$ + C], com u(x) = exp ($\int$ q(x) dx) sendo o fator integrante. É oportuno esclarecer que o matemático francês Alexis Claude Clairaut (1713-1765) em 1739 e 1740 (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris*) obteve, independentemente, esses mesmos resultados de Euler.

50. No artigo publicado no *Miscellanea Berolinensia 7 (1743)* Euler estudou a equação 0 = Ay + B$\frac{dy}{dx}$ + $C\frac{d^2y}{dx^2}$ + $D\frac{d^3y}{dx^3}$ + ... $L\frac{d^ny}{dx^n}$, onde os coeficientes são constantes. Nesse estudo, Euler demonstrou que a solução geral dessa equação é dada por (na notação moderna): y = $\sum_{i=1}^{i=n} a_i\ e^{r_i x}$, onde $\mathbf{r}_i$ são as raízes da equação característica ou indicial: A + Br + Cr^2 + Dr^3 + Lr^n = 0. Se esta equação indicial tiver uma raíz **q** de multiplicidade **k** ($\leq$ n), Euler mostrou que a expressão

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{qx}\ (\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \kappa x^{k-1}) + \sum_{i=1}^{i=n-k} a_i\ e^{r_i x}$$

é a solução da equação diferencial envolvendo **k** constantes arbitrárias. Euler considerou também o caso em que a equação indicial apresentava raízes complexas do tipo a + $\sqrt{-1}$b, sendo que, neste caso, ele usou sua célebre expressão: e$^{\pm\sqrt{-1}x}$ = $cos(x) \pm \sqrt{-1}\ sen(x)$, para tratar a parte imaginária $\sqrt{-1}$b.

51. Esse artigo foi publicado em 1753 nas *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 3 (1750-1751)*, e nele Euler apresentou seu método de resolver as equações diferenciais lineares ordinárias não-homogênas e de coeficientes constantes, do tipo: Ay + B$\frac{dy}{dx}$ + $C\frac{d^2y}{dx^2}$ + $D\frac{d^3y}{dx^3}$ + ... $L\frac{d^ny}{dx^n}$ = X(x). Basicamente, seu método consistia em multiplicar a equação dada por e$^{\alpha x}$dx, integrar ambos os membros da equação resultante, e determinar o valor de α necessário para reduzir de uma unidade a ordem da equação diferencial dada. Desse modo, a ordem da equação dada era baixada até finalmente reduzi-la a uma equação de primeira ordem, cuja solução era obtida pelo método do fator

integrante. Convém destacar que Lagrange, na *Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis 3 (1762-1765)*, foi um dos primeiros a estudar as equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes não constantes e não-homogênea, do tipo: L(t) + M(t)$\frac{dy}{dt}$ + $N(t)\frac{d^2y}{dt^2}$ + ... = T(t). Para resolver uma equação desse tipo, Lagrange multiplicou a mesma pelo fator z(t)dt, com z(t) a ser determinado, e integrou por partes a equação resultante. Com esse artifício, encontrou uma equação diferencial em **y** e de ordem mais baixa. (Essa equação resultante recebeu do matemático alemão Lazarus Fuchs (1833-1902), em 1873, o nome de **equação adjunta**.) Desse modo, Lagrange continuou com esse artifício até transformar a equação diferencial original que era não-homogênea, em homogênea. Mais tarde, em 1759, ao tratar os movimentos de uma membrana circular vibrante, Euler lidou com uma equação diferencial linear de coeficientes variáveis, do tipo Bessel, conforme veremos mais adiante.

52. Em 1734, na (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris*), Clairaut estudou a equação (hoje conhecida como **equação de Clairaut**) y = xy' + f(y'), usando o artifício de chamar y' = p. Então, ao diferenciar em relação a **x** essa equação, encontrou [x + f'(p)] $\frac{dp}{dx}$ = 0, o que resultou nas equações: $\frac{dp}{dx}$ = 0 e x + f'(p) = 0. Integrando a primeira dessas equações, Clairaut obteve que y' = p = c (constante). Esse resultado permitiu encontrar a **solução geral** de sua equação, isto é: y = cx + f(c), que representa uma família de retas. Contudo, a outra equação x + f'(c) = 0 daria uma nova solução (chamada **solução singular**) que, contudo, não estaria incluída na solução geral, concluiu Clairaut. Esse fato criou uma certa confusão, o que levou o próprio Clairaut e também Euler, a encontrarem um método de obter a solução singular trabalhando com a própria equação diferencial, ou seja, eliminar y' de f(x,y,y') = 0 e impor que $\frac{\partial y}{\partial y'}$ = 0. Desse modo, no Volume I do *Integralis*, Euler apresentou um critério para distinguir a solução singular de uma integral particular, e que seria usado quando a solução geral não fosse conhecida. É interessante observar que Laplace, em trabalho realizado em 1772 (publicado em 1775 na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris (1772)*), estendeu a noção de solução singular a equações diferenciais ordinárias lineares de ordem mais alta, inclusive com três variáveis. Por seu lado, Lagrange fez, em 1774, um estudo sistemático da relação entre soluções singular e geral das equações diferenciais ordinárias, bem como deu uma interpretação geométrica da solução singular como um envelope da solução geral, estudo esse que foi publicado em 1776, na *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin (1774)*. Apesar desses estudos sobre soluções singulares, havia algumas dificuldades com as mesmas (por exemplo, a possibilidade de uma solução singular conter um ramo da solução geral) que não foram tratadas nos mesmos. A teoria das soluções singulares só foi completada em 1872, com os trabalhos dos matemáticos, o francês Gaston Darboux (1842-1917) e o inglês Arthur Cayley (1821-1895), segundo veremos na próxima Crônica.

53. Essas integrais decorreram do estudo do problema da interpolação, isto é, inserir valores em tabelas de funções logarítmicas e trigonométricas, problema esse tratado por Wallis, Stirling, Daniel Bernoulli e Goldbach, e no qual havia a questão de encontrar uma interpretação para n!, com **n** não-inteiro. Em cartas que trocou com Goldbach, em Outubro de 1729 e Janeiro de 1730, Euler discutiu a solução desse problema e foi por ele formalizada em 1731, em um trabalho publicado em 1738, nos *Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 5 (1730-1731)*. Inicialmente, Euler obteve n! (com **n** inteiro), resolvendo a seguinte integral: $\int_o^1 x^e(1 - x)^n$ dx = $\frac{n!}{(e+1)(e+2)...(e+n+1)}$, com **e** qualquer. Contudo, para obter uma expressão de n!, com **n** arbitrário, Euler escreveu que n! = $\int_o^1 (-\log x)^n$ dx. É oportuno destacar que somente em 1771 Euler preparou um trabalho (publicado em 1772 na *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 16 (1771)*), no qual demonstrou a relação entre essas duas integrais, e que em 1781 ele apresentou a forma hoje conhecida para esta última integral, fazendo nesta t= - log x, ou seja, obteve a seguinte expressão: n! = $\int_o^\infty t^n e^{-t}$ dt. Por fim, no livro intitulado *Exercices de calcul intégral* (*Exercício de cálculo integral*) (obra em três volumes, editados em 1811 (I), 1816 (III) e 1817 (II)), o matemático francês Adrien Marie Legendre (1752-1833) fez um estudo profundo dessas integrais, ocasião em que as denominou de **primeira integral euleriana** ou **função beta**: B(m,n) = $\int_o^\infty x^{m-1}(1 - x)^{n-1}$ dx e **segunda**

integral euleriana ou **função gama**: $\Gamma(n + 1) = n! = \int_o^\infty x^n e^{-x}$ dx, e demonstrou a seguinte equação: $\Gamma(2x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{2x - \frac{1}{2}} \Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2})$. (Destaque-se que Euler demonstrou que $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ e que $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m + n)}$, bem como calculou $\Gamma(\frac{3}{2})$, $\Gamma(\frac{5}{2})$ e assim por diante.)

54. Na *Acta Eruditorum* de Setembro de 1694, James Bernoulli estudou a **elástica** (nome cunhado por ele), que é a forma assumida por um bastão fino quando forças são aplicadas em suas extremidades. Ao obter a equação diferencial dessa curva: $dy = \frac{(x^2 + ab)dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}}$, James observou que ela não poderia ser integrada em termos das funções elementares até então conhecidas: algébricas, trigonométricas (diretas e inversas), exponenciais e logarítmicas. Ainda em conexão com esse trabalho, James introduziu uma curva em forma de 8 deitado (∞), isto é, uma **lemniskòs** (grego) ou **lemnicus** (latino) (nome das fitas ou ornatos pendentes dos vencedores e das mitras episcopais), dada pela equação: $xx + yy = a\sqrt{(xx - yy)}$, e procurou determinar o comprimento de arco dessa curva (mais tarde conhecida como **lemniscata**) por intermédio da integral (na linguagem atual): $s = \int_o^r \frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}$ e, mais uma vez, percebeu que a mesma não poderia ser integrada em termos de funções elementares. (É oportuno registrar que a notação $\int_a^b$ foi introduzida por Fourier em seu famoso livro *Théorie analytique de la chaleur* (*Teoria analítica do calor*), editado em 1822.)

55. Na *Acta Eruditorum* de Outubro de 1698, John Bernoulli demonstrou que a diferença de dois arcos da parábola cúbica ($y = x^3$) poderia ser integrada em termos de funções elementares. Em vista desse resultado, John tentou então calcular (sem êxito) arcos de outras curvas, principalmente a elipse e a parábola $a^m y^p = b^n x^q$ ($m + p = n + q$). Contudo, apesar de não poder retificar tais curvas, John (bem como seu irmão James) afirmou (sem demonstrar) que a soma (ou a diferença) desses arcos poderia ser representada por arcos de círculo ou por linhas retas.

56. Entre 1714 e 1718, conforme vimos, Giulio Carlo di Fagnano realizou uma série de trabalhos sobre a retificação de curvas, por intermédio de integrais que envolviam radicais. Nesses trabalhos, demonstrou as afirmações dos irmãos Bernoulli referidas na nota anterior, bem como estendeu essas demonstrações a outras curvas, como a hipérbole, a ciclóide e a lemniscata. (Registre-se que em um desses trabalhos, Fagnano obteve um importante resultado ao demonstrar que a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ apresentava certa analogia com a hipérbole retangular, já que a excentricidade dessa elipse vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$, enquanto a da hipérbole retangular vale $\sqrt{2}$.) Esses trabalhos foram publicados por Fagnano no livro intitulado *Produzioni matematiche* (*Produções matemáticas*), editado em 1750.

57. Esses trabalhos foram publicados em 1761 nas *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 6 (1756-1757); —— 7 (1758-1759).*

58. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris (1786).*

59. Em 1775, o agrimensor e matemático inglês John Landen (1719-1790) demonstrou que cada arco de hipérbole podia ser medido por dois arcos de elipse, resultado esse conhecido como **Teorema de Landen**. É interessante ressaltar que Landen, em seu livro *Discourse concerning the residual analysis* (*Discurso concernente a análise residual*), de 1758, definiu derivada através do "resíduo" - $[\frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}]_{x_o = x_1}$ -, expandindo f(x) em uma série de potências em **x**.

60. Essas integrais são as seguintes:

$$\text{Primeira Espécie: } F(\phi) = \int \frac{d\phi}{\Delta};$$

$$\text{Segunda Espécie: } E(\phi) = \int \Delta d\phi;$$

$$\text{Terceira Espécie: } \Pi(\phi) = \int \frac{d\phi}{(1 + n\ sen^2\ \phi)\ \Delta},$$

onde **n** é qualquer constante e $\Delta(k, \phi) = \sqrt{1 - k^2 sen^2 \phi}$, com $0 \leq k \leq 1$.

61. É oportuno destacar que embora Legendre usasse o termo **função elíptica**, havia um pouco de controvérsia em torno do mesmo. O conceito atual de **função elíptica** foi introduzido pelos matemáticos, o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), em 1826, e o alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), em 1829, conforme veremos na próxima Crônica.

62. A expressão **equação diferencial hipergeométrica** foi cunhada pelo matemático alemão Johann Friedrich Pfaff (1765-1825), amigo e professor do grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Aliás, Gauss estudou a função hipergeométrica em 1813 (ocasião

em que apresentou a notação F(a,b,c;z)), em trabalho publicado nos *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores 2.*

63. Em 1778, Euler voltou a pesquisar com essas **séries hipergeométricas** (nome cunhado por ele próprio), ocasião em que encontrou algumas relações entre elas, como, por exemplo: F(-n,b,c;z) = (1 - z)$^{c+n-b}$F(c + n,c - b;z). O resultado dessas pesquisas foi comunicado à Academia de Ciências de São Petrogrado, e publicado em 1801, nos *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 12 (1794).*

64. Em trabalhos realizados entre 1762 e 1765, Euler voltou a tratar o problema da corda vibrante. Porém, desta vez, ele considerou cordas de espessura variável, bem como cordas compostas de diferentes espessuras. Esses trabalhos foram publicados em 1764, nas *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 9 (1762-1763)* e em 1766, na *Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis 3 (1762-1765).* É oportuno ressaltar que d'Alembert também tratou o problema da corda vibrante de espessura variável, em 1763, ocasião em que usou o método da separação de variáveis para resolver a equação diferencial da corda vibrante: $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, tomando y(x,t) = g(x)h(t). Esse trabalho de d'Alembert foi publicado em 1770, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 19 (1763).* Aliás, esse método já havia sido utilizado por Daniel Bernoulli, em 1732, ao tratar as vibrações de uma cadeia suspensa, conforme vimos.

65. *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 10 (1764)*, publicado em 1766.

66. A teoria da membrana vibrante foi melhor desenvolvida pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1829.

67. Nesse trabalho (intitulado *Principia motus fluidorum* (*Princípio do movimento dos fluidos*) e publicado em 1761, nos *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 6 (1756-1757)*), Euler estudou os fluidos incompressíveis perfeitos (não viscosos) e, ao tratar com as componentes **u**, **v** e **w** da velocidade de qualquer ponto no interior de um fluido, demonstrou (na linguagem atual) que udx + vdy + wdz deveria ser uma diferencial exata (dS) e, portanto, deveria ter: u = $\frac{\partial S}{\partial x}$ v = $\frac{\partial S}{\partial y}$ e w = $\frac{\partial S}{\partial z}$. Sendo o fluido considerado incompressível, demonstrou então que: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, que representa a **Equação da Continuidade** e que $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$. Euler não soube como encontrar a solução geral dessa equação, e sim, apenas em casos especiais em que S era um polinômio em **x**, **y** e **z**. Observe-se que, em 1868, o fisiologista e físico alemão Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) denominou S de **potencial velocidade**.

68. Esses trabalhos, intitulados *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides* (*Princípios gerais do estado de equilíbrio dos fluidos*), *Principes généraux du mouvement des fluides* (*Princípios gerais do movimento dos fluidos*) e *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides* (*Continuação das pesquisas sobre a teoria do movimento dos fluidos*)), foram publicados em 1757, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 11 (1755).*

69. O movimento dos fluidos foi estudado por d'Alembert nos seguintes textos: *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (*Tratado do equilíbrio e do movimento dos fluidos*), de 1744, *Réflexions sur la cause générale des vents* (*Reflexões sobre a causa geral dos ventos*), de 1747 e *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (*Ensaio sobre uma nova teoria da resistência dos fluidos*), de 1752. É oportuno observar que nesses textos, d'Alembert começou a lidar com os números complexos. Por exemplo, no *Réflexions*, ele tentou demonstrar a famosa **conjectura de Girard** (apresentada pelo matemático flamengo Albert Girard (1590-1633), em 1629), hoje conhecida como o Teorema Fundamental da Álgebra: - "Toda equação algébrica tem pelo menos uma raiz complexa". Muito embora d'Alembert não haja tido sucesso em sua demonstração (a primeira demonstração com sucesso foi feita por Gauss, em 1799), ele conseguiu mostrar que toda operação algébrica envolvendo números complexos, resulta num número complexo da forma A + $\sqrt{-1}$B. Já no *Essai*, ao considerar o movimento de um corpo através de um fluido ideal, d'Alembert percebeu que o cálculo com variáveis complexas poderia ser conduzido de maneira análoga ao cálculo com variáveis reais, ou seja, que a expressão (na linguagem atual) f(x + iy)d(x + iy) poderia ser sempre expressa na forma dp + idq, em que as partes

real e imaginária poderiam ser tratadas separadamente. Desse modo, afirmou (sem demonstrar) que se f(x + iy) = u + iv, então: f(x - iy) = u - iv, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. (Essas são as famosas **equações de Cauchy-Riemann**, conforme veremos na próxima Crônica.) Convém notar que nesses trabalhos, d'Alembert apresentou, pela primeira vez, a maneira mais geral de usar as equações diferenciais parciais em Física. Porém, foi Euler quem aperfeiçoou técnicas para usá-las.

70. Como as equações relacionadas com o movimento de fluidos apresentadas por Euler e por Lagrange não consideravam a viscosidade dos mesmos, esta foi considerada pelos matemáticos, o francês Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), em 1821, e o inglês Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), em 1845, dando origem à famosa **equação de Navier-Stokes**, conforme veremos na próxima Crônica.

71. Esses trabalhos foram publicados em 1766, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences e des Belles-Lettres de Berlin 15 (1759).*

72. *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 16 (1771)*, publicado em 1772.

73. A propagação do som em instrumentos de sopro já havia sido pesquisada por Daniel Bernoulli, em 1762, ocasião em que demonstrou que na extremidade aberta de um tubo cilíndrico não há condensação de ar, enquanto que na extremidade fechada as partículas de ar permanecem em repouso. Esse trabalho foi publicado em 1764, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, Paris (1762).*

74. Em seu já citado **Treatise of Fluxions** (1742), Maclaurin demonstrou (usando argumentos geométricos) que dados dois elipsóides de revolução homogêneos e confocais, a atração exercida por esses dois corpos sobre uma partícula externa situada no prolongamento do eixo de revolução ou no plano equatorial, era proporcional aos volumes respectivos. Como o tratamento geométrico só se aplicava a corpos com certas formas especiais, era necessário usar métodos analíticos para tratar outras formas. Assim, em seu livro *Théorie de la Figure de la Terre* (*Teoria da Forma da Terra*) de 1743, Clairaut apresentou um estudo analítico sobre a forma da Terra e a atração gravitacional entre corpos.

75. Conforme dissemos na nota (24), Daniel Bernoulli em seu *Hydrodinamica* (1738) já havia apresentado a idéia de que uma força poderia ser deduzida de uma "função potencial", expressão essa, aliás, que empregou nesse mesmo livro.

76. Na linguagem atual, essas integrais triplas são calculadas pelas expressões:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int\int\int \frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\, d^3\vec{r'} \text{ e}$$
$$\mathrm{V}(\vec{r}) = \int\int\int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3\vec{r'}.$$

77. *Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royal des Sciences, par Divers Sçavans, et Lus dans ses Assemblées 10,* publicado em 1785.

78. Também nesse trabalho, Legendre calculou a componente da força de atração gravitacional exercida por um esferóide de massa M, por intermédio da seguinte notação (de hoje):

$$\mathrm{P}(\mathrm{r},\theta,0) = \frac{3M}{r^2} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{2n-3}{2n-1}\, P_{2n}(cos\theta)\, \frac{\alpha_n}{r^{2n}},$$

com

$$\alpha_n = \frac{4\pi}{3M} \int_o^{\frac{\pi}{2}} R^{2n+3}\, P_{2n}(cos\ \theta')\ sen\ \theta'\ d\theta',$$

sendo R = f(θ'), onde θ é a coordenada esférica polar e P_{2n} é o que hoje denominamos de **polinômio de Legendre** ou **coeficiente de Laplace** ou ainda **harmônico zonal**.

79. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, Paris (1782)*, publicado em 1785.

80. Quando U_n só depende de θ, isto é, $U_n(\theta)$, essa equação se transforma na hoje famosa **Equação de Legendre**: $(1 - x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - 2x\frac{dU}{dx} + n(n+1)U = 0$, com $x = \cos\theta$. A função $U_n(\theta, \phi)$) foi denominada pelo físico inglês William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907) de **harmônico esférico**.

81. Na nota (67) vimos que Euler chegou a uma equação desse tipo em seu trabalho sobre o movimento dos fluidos. É oportuno registrar que Laplace cometeu um erro ao afirmar que essa equação também valia para pontos interiores ao corpo geradores do potencial V. Esse erro foi corrigido por Poisson, em 1813, conforme veremos na próxima Crônica.

82. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, Paris (1784)*, publicado em 1787.

83. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, Paris (1789)*, publicado em 1793. É interessante observar que ainda nesse trabalho, Legendre chegou a trabalhar com a hoje **Equação Associada de Legendre**: $(1 - x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\,\frac{dy}{dx} + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$, onde $y = P_n^m(x)$.

84. Registre-se que a conhecida representação diferencial dos polinômios de Legendre - $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ - foi obtida pelo matemático Olinde Rodrigues (1794-1851), em 1816 (*Correspondance sur l'Ecole Polytechnique 3*).

85. BASSALO (1996c), op. cit.

86. Esse problema foi proposto no *Journal de Sçavans*, de 1697.

87. Em 1698, John escreveu a Leibniz afirmando que o plano osculatriz (o plano do círculo osculatriz), em qualquer ponto de uma geodésica de uma dada superfície, é perpendicular a esta naquele ponto. Chama-se de **círculo osculatriz** de uma superfície curva em um dado ponto P, ao círculo com centro no centro de curvatura e raio igual ao raio de curvatura da superfície em questão e relativos ao ponto P, e que a tangencia nesse mesmo ponto P. Esse conceito foi introduzido por Newton em seu livro *Geometria Analytica* (*Geometria Analítica*), escrito em 1671 e publicado em 1736. O termo **osculatriz** foi dado por Leibniz, no *Acta Eruditorum*, de 1686. Em 1698, James resolveu o problema da geodésica sobre cilindros, cones e superfícies de revolução.

88. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 3 (1728)*, publicado em 1732.

89. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 6 (1732-1733)*.

90. É oportuno notar que Clairaut, em suas pesquisas sobre a forma da Terra, realizadas em 1733 (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris*, publicado em 1735) e 1739 (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris*, publicado em 1741), apresentou um estudo analítico das geodésicas sobre superfícies de revolução.

91. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 7 (1734-1735)*, publicado em 1740.

92. Na *Acta Eruditorum* de 1696, John Bernoulli propôs o seguinte problema: - "Dados dois pontos A e B em um plano vertical, encontrar a curva que uma partícula, somente sob a ação da gravidade, a descreverá em um tempo mínimo". Essa curva foi denominada por John de **braquistócrona** (do grego **brachistos** - mais curto e **chronos** - tempo). Esse problema foi resolvido, em trabalhos independentes, por Newton, Leibniz, l'Hôpital, John, James e pelo matemático saxão Conde Ehrenfried Walter Tschirnhaus(en) (1651-1708), os quais foram publicados no mesmo volume da *Acta*, de Maio de 1697. Todos (com exceção de l'Hôpital) encontraram que aquela curva era a ciclóide.

93. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736)*, publicado em 1741.

94. Na notação moderna, esse problema relaciona-se com a minimização da seguinte integral: $\int_o^L \frac{ds}{R^2}$, onde **s** é o comprimento de arco e R é o raio de curvatura.

95. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris (1744)*. Nesse trabalho, Maupertuis apresentou a sua versão do **Princípio da Mínima Ação**, considerando a grandeza física **Ação**, definida como o produto da massa **m**, da velocidade **v** e da distância **s**, como sendo minimizável, ou seja: mvs = mínimo.

96. É oportuno destacar que além de razões físicas, Maupertuis e Euler alegavam razões teológicas para o seu Princípio, pois diziam eles: as leis do comportamento da natureza possuem a perfeição digna da criação de Deus.

97. É oportuno salientar que o nome Cálculo das Variações foi dado por Euler no trabalho intitulado *Elementa Calculi Variationum* (*Elementos do Cálculo das Variações*), apresentado à Academia de Berlim, em 1756, e somente publicado em 1766 nos *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 10 (1764)*.

98. *Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis 2 (1760-1761)*, publicado em 1762.

99. O fato de considerar o coeficiente de δy como nulo foi intuitivamente aceito e mesmo incorretamente provado por vários matemáticos (inclusive Cauchy) por mais de 100 anos depois de Lagrange. A sua prova correta só foi apresentada pelo matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861), em 1848, e a mesma é hoje considerada como o lema fundamental do Cálculo das Variações.

100. Em um desses apêndices, Lagrange tratou do problema de encontrar a superfície de menor área entre todas as superfícies, em duas situações: as que apresentavam o mesmo perímetro; e as de mesmo volume. Um caso especial desses tipos de superfície - a superfície de revolução de área mínima - já havia sido tratado por Euler em seu *Methodus*, de 1744. Mais tarde, em 1785 (*Mémoires des savants étrangers de l'Académie 10*), o matemático francês Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de La Place (1754-1793) estudou dois tipos dessas superfícies: a catenóide e o helicóide reto. No segundo apêndice, Lagrange estudou o polígono de maior área entre todos os polígonos de um mesmo número de lados. Ele encontrou que esse tipo de polígono deve ser inscrito em um círculo, conforme havia sido demonstrado geometricamente pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752), em 1752 (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*).

101. Esses trabalhos foram publicados, respectivamente, na *Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis 4 (1766-1769)* e *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin (1770)*.

102. Esse tipo de equação, de difícil solução, foi mais tarde estudada pelo matemático francês Gaspard Monge (1746-1818), em seu famoso livro *Feuilles d'analyse appliquée a la géométrie a l'usage de l'École Polytechnique* (*Aplicações da análise à geometria para uso na Escola Politécnica*), editado em 1795. É oportuno registrar que Monge introduziu a notação p = $\frac{dz}{dx}$, q = $\frac{dz}{dy}$ para representar a derivada parcial de **z** com relação a **x** e **y**, respectivamente. Muito embora a notação $\frac{\partial z}{\partial x}$ parece haver sido proposta por Legendre, em 1786 (somente publicado em 1788, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris (1786)*), ela foi apresentada por Jacobi, em 1841 (*Crelle's Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 22*), ocasião em que desenvolveu sua teoria dos determinantes.

103. Em 1779, Euler considerou curvas espaciais que apresentavam propriedades de máximo e de mímino. Esse trabalho foi publicado em 1813, nas *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg 4 (1811)*. Em 1780, fez o estudo da braquistócrona considerando o caso em que a força externa opera em três dimensões ou quando o meio exterior é resistente. Esse trabalho foi publicado em 1822, nas *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg 8 (1817-1818)*.

104. Ao estudar, em 1782, sistemas de massas pontuais, Lagrange introduziu o conceito de **coordenadas generalizadas** (p_i, q_i), como qualquer conjunto de coordenadas que pode, sem ambigüidade, definir a configuração desses sistemas. Então, a partir dessa consideração, em seu *Mécanique* de 1788, Lagrange apresentou o Princípio de Mínima Ação de Maupertuis-Euler em termos dessas coordenadas e, usando seu método variacional, obteve famosa **Equação de Euler-Lagrange**: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial q_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$.

105. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris (1786)*, publicado em 1788.