

Uma Relação Empírica para o Coeficiente Dielétrico do Ar

(An empirical relation for the dielectric coefficient of the air)

Irineu Hibler

Departamento de Física

Universidade Estadual de Maringá

Avenida Colombo, 5790, 87020-900 Maringá, PR, Brasil

Trabalho recebido em 17 de janeiro de 1996

Através do capacitor plano e paralelo, propõe-se uma expressão empírica para a determinação do coeficiente dielétrico do ar. Ela depende somente de parâmetros termodinâmicos tais como: o volume entre as placas, pressão atmosférica e a umidade relativa do ar.

An empirical expression for the determination of the effective dielectric coefficient of the air in parallel-plates capacitors is proposed. It depends only on the thermodynamical parameters: the volume between the plates, atmospheric pressure and the relative humidity of the air.

I. Introdução

Do ponto de vista didático, a eletrostática é área de maior deficiência dentro da eletricidade. Experimentos quantitativos que dependem da permissividade dielétrica do meio fornecem resultados não reais. O número de experimentos quantitativos de eletrostática realizados no meio ambiente é pequeno[18]. Isto é devido a dificuldades no controle de várias variáveis que afetam o fenômeno. Deste modo é importante identificar quais são as variáveis relevantes na determinação da permissividade dielétrica para descrever os fenômenos eletrostáticos. Um modo natural para atacar o problema é considerar uma camada de ar entre as placas do capacitor como um gás ideal. Mais precisamente, para investigar a influência das condições ambiente sobre as medidas eletrostáticas, é conveniente considerar as variáveis usuais que indicam a variação das condições termodinâmicas do momento.

Deste modo, toma-se a pressão atmosférica, a umidade relativa do ar e o volume entre as placas como variáveis relevantes nos cálculos da permissividade dielétrica do ar. O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma equação para o coeficiente dielétrico

do ar que esteja o mais próximo da realidade.

Este trabalho é organizado do seguinte modo. Na seção(II) é apresentado um breve resumo da eletrostática elementar. Na seção (III) é descrito o experimento e são definidas as variáveis relevantes. Na seção(IV) apresenta-se o modelo matemático. Os resultados e as conclusões são discutidos na seção(V).

II. Revisão da eletrostática

Quando duas placas condutoras e paralelas de área A , separadas por uma distância D são submetidas a uma diferença de potencial V , acumulam-se nas placas, cargas opostas ($\pm Q$), conforme pode-se ver na Fig.(01).

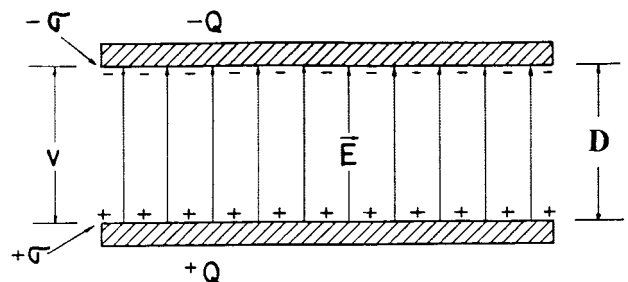


Figura 1. Capacitor de placas paralelas.

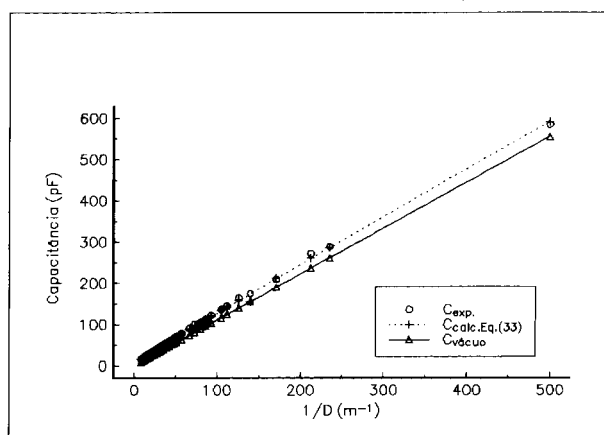


Figura 2. (o) Valor experimental da capacitância vs $1/D$. (—) Valores correspondentes obtidos pela (Eq. 33); (∇) Valores da capacitância no vácuo obtida pela (Eq. 03). As distâncias entre as placas foram medidas com um catetômetro cuja precisão é de 0.05 mm.

A relação entre a carga Q e a diferença de potencial V é dada pela constante de proporcionalidade (C), denominada de capacitância:

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (1)$$

Um capacitor de placas paralelas ideal é aquele no qual a separação D das placas é muito pequena comparada com as suas dimensões; dessa forma, pode-se desprezar o campo deformado[14]. Se a região entre as placas for preenchida com dielétrico de permissividade ϵ , a capacitância será dada por

$$C = \frac{\epsilon A}{D}, \quad (2)$$

onde $\epsilon = k\epsilon_0$, sendo ϵ_0 a constante de permissividade do vácuo.

No vácuo, o coeficiente dielétrico $k = 1$ e a Eq.(2) pode ser reescrita como

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{D}, \quad (3)$$

e será utilizada em todos os cálculos subsequentes.

No capacitor real, entretanto existe uma perturbação do campo elétrico nas vizinhanças das bordas. Feynman[7] propôs que, para corrigir esta perturbação na capacitância Eq.(3), que a área das placas fossem estendidas artificialmente por uma distância de $3/8$ da separação entre as placas.

Segundo Maxwell[3], para uma distância das bordas igual à distância entre as placas, o campo poderá ser afetado de somente $1/10\ 000$ do valor calculado para o campo uniforme. Para compensar esta perturbação propôs a utilização de um anel de proteção[11]. Simulações numéricas foram realizadas por Wintle[19], na determinação da correção da capacitância, devido o efeito da deformação no campo elétrico nas bordas do capacitor.

III. Desenvolvimento experimental

Assumimos que as variáveis fundamentais, para se obter um ajuste experimental do *coeficiente dielétrico* (ξ)¹ do ar, são dadas por:

$$\xi = f[(A, D), P, U(T_u, T_s)] \quad (4)$$

onde A é a área da placa, D é a distância entre as placas, P a pressão atmosférica, U a umidade relativa[1], T_u e T_s são as temperaturas dos bulbos úmido e seco respectivamente.

Dois placas de Al de raios 0.20 m e espessura de 2 mm são dispostas sobre uma superfície plana. As placas são separadas inserindo-se entre elas quatro suportes de PVC, os quais têm espessura ² variando de 1 cm até 10 cm. Para a medida da capacitância foi utilizado um MX - 801 DIGITAL LCR METER Este equipamento tem nos seus terminais uma diferença de potencial de 0.932 V(AC). As variáveis são medidas nas seguintes unidades. $A(m^2)$, $D(mm)$, $P(cm\ Hg)$, $t(^{\circ}C)$ e $C(pF)$ e transformadas para o SI de unidades. Os valores extremos obtidos para a *umidade* foram de 28 - 95 % e a *pressão* P , de 70.9 - 74.1 cm Hg. Foram utilizadas de algumas transformações para adequação dimensional[15] e, introduziram-se as seguintes definições:

$$\frac{Vol.}{Vol_0} = \frac{\text{Área Distância}}{22.4 \cdot 10^{-3}}, \quad (5)$$

e

$$\frac{P}{P_0} = \frac{P}{76}. \quad (6)$$

¹Optamos por este nome e não " constante dielétrica", pois o mesmo varia com o volume, pressão atmosférica e umidade do ar.

²Em 1091 medidas de capacitâncias, as correções devido ao uso de suportes de PVC entre as placas, para $D=1$ cm foi de -1.1 pF; para as demais de -1.0 pF

IV. Modelo matemático

As medidas da capacitância no vácuo pelo inverso da distância entre as placas conduz à uma relação linear. Entretanto, quando as medidas são efetuadas no ar, isto é, no ambiente, a relação é não linear. Deste modo é possível estabelecer a correlação entre ambas as observações, no vácuo e no ambiente. Assumindo uma relação do tipo:

$$C_{AR} = \xi C_{VAC}. \tag{7}$$

onde ξ é dado pela Eq.(4) e C_{VAC} é fornecido pela Eq.(3). Agora utilizando a definição Eqs. (5) e (6) a Eq.(4) pode ser reescrita na forma:

$$\xi = f\left(\frac{Vol.}{Vol.0}, \frac{P}{P_0}, U\right), \tag{8}$$

esta relação terá de satisfazer a seguinte condição: para $P \simeq 0$ (no vácuo) implicará que $\xi = 1$.

Além das considerações introduzidas, propomos definir uma relação empírica para o coeficiente dielétrico Eq.(8) como:

$$\xi = \exp\left[\left(\frac{AD}{22.4 \cdot 10^{-3}}\right)^\alpha \left(\frac{P}{76}\right)^\beta U^\delta\right]. \tag{9}$$

A relação acima foi obtida após testes de regressão, em modelos lineares e não lineares e comparados com 1362 observações experimentais. Para verificar a precisão do modelo, necessário se fez determinar os expoentes α , β e δ . Procedeu-se do seguinte modo. Aplicou-se duas vezes o logaritmo natural na Eq.(9), tomando

$$\ln[\ln(\xi)_i] = \alpha \ln\left[\frac{AD}{0.0224}\right]_i + \beta \ln\left[\left(\frac{P}{76}\right)_i\right] + \delta \ln[(U)_i]. \tag{10}$$

Para melhor trabalhar com o sistema de equações produzidas pela Eq.(10), introduziremos o vetor B que será formado pelas variáveis dependentes e a matrix A pelas variáveis independentes, ou seja

$$e \left. \begin{aligned} b_{i1} &= \ln[\ln(\xi)_i]; \\ &= \ln\left[\ln\left(\frac{C_{AR}}{C_{VAC}}\right)_i\right]. \\ a_{i1} &= \ln\left[\left(\frac{AD}{0.0224}\right)_i\right]; \\ a_{i2} &= \ln\left[\left(\frac{P}{76}\right)_i\right]; \\ a_{i3} &= \ln[(U)_i]. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Deste modo, a Eq.(10) pode ser reescrita na forma de uma matrix:

$${}_m A_{3 \ 3} X_1 = {}_m B_1. \tag{13}$$

O vetor B é constituído pelas observações e estas claramente contém erros experimentais. Estes erros podem produzir um sistema inconsistente. Para remover esta inconsistência, adiciona-se na definição do vetor B o vetor ${}_m V_1$ o qual contém as correções[5]:

$${}_m A_{3 \ 3} X_1 = {}_m B_1 + {}_m V_1, \tag{14}$$

onde m = 1362, observações e o número de incógnitas é 3.

O vetor V não é conhecido a priori. Entretanto, desde que o número de equações é maior que o número de incógnitas, pode ser usado o Método dos Mínimos Quadrados relativo ao melhor valor estimado \bar{X} que satisfaz a condição[6]:

$$\phi = V^t V = \text{mínimo.} \quad (15)$$

Isolando o vetor V na Eq.(14)

$$A X - B = V. \quad (16)$$

Usando a Eq.(16), a Eq.(15) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \phi &= (A \bar{X} - B)^t (A \bar{X} - B) \\ &= \bar{X}^t A^t A \bar{X} - \bar{X}^t A^t B - B^t A \bar{X} + B^t B \\ &= \text{mínimo.} \end{aligned}$$

Para encontrar o mínimo de ϕ , deveremos derivar as matrizes acima. As regras para isto pode-se encontrar nas referências [2,9,10,12]

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{X}} = 0. \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial}{\partial \bar{X}} (\bar{X}^t A^t A \bar{X}) - \frac{\partial}{\partial \bar{X}} (\bar{X}^t A^t B) - \frac{\partial}{\partial \bar{X}} (B^t A \bar{X}) + \frac{\partial}{\partial \bar{X}} (B^t B) = 0. \quad (18)$$

Desenvolvendo a primeira parcela da Eq.(18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{X}} (\bar{X}^t A^t A \bar{X}) &= \left(\frac{\partial \bar{X}^t}{\partial \bar{X}} \right) A^t A \bar{X} + \bar{X}^t \left(\frac{\partial A^t}{\partial \bar{X}} \right) A \bar{X} + \bar{X}^t A^t \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{X}} \right) \bar{X} + \\ &+ \bar{X}^t A^t A \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{X}} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

onde $\bar{X} = f(\alpha, \beta, \delta)$.

$$\frac{\partial \bar{X}^t}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial}{\partial \bar{X}} [\alpha \quad \beta \quad \delta] = [1 \quad 1 \quad 1]; \quad (20)$$

A matriz A depende, conforme pode-se verificar na Eq.(11), do volume, pressão e da umidade. Assim a derivada de uma matriz que não depende de $X(\alpha, \beta, \delta)$ é nula,

$$\frac{\partial A^t}{\partial \bar{X}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial A}{\partial \bar{X}} = 0. \quad (21)$$

Substituindo as Eq.(20),(21) na Eq.(19), encontra-se

$$A^t A \bar{X} + 0 + 0 + \bar{X}^t A^t A. \quad (22)$$

De modo análogo, desenvolvendo-se as demais parcelas da Eq.(18), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} (\bar{X}^t A^t B) = \frac{\partial}{\partial \bar{X}} (B^t A \bar{X}) = A^t B \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{X}} (B^t B) = 0. \quad (23)$$

Finalmente, retornando com os resultados da Eq.(22) e Eq.(23) na Eq.(18), tem-se

$$A^t A \bar{X} + \bar{X}^t A^t A - 2 A^t B = 0. \quad (24)$$

Os produtos matriciais $A^t A$ e AA^t , representam a mesma matriz *simétrica* [16]. Deste modo tem-se:

$$A^t A \bar{X} = A^t B. \quad (25)$$

Outra forma de obter-se este resultado é desenvolver cada uma das parcelas da Eq.(18), efetuando os produtos dos elementos das matrizes, e após derivar o escalar resultante em relação a α , β e δ .

A última matriz representa o conjunto de três equações normal, quando a matriz quadrada $A^t A$ é não singular. A solução do sistema Eq.(25) é dada por

$$\bar{X} = (A^t A)^{-1} A^t B \tag{26}$$

Utilizando sub-rotinas desenvolvidas em Fortran [8], obtemos a solução

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Após a determinação do vetor X, é possível o cálculo dos elementos de V através da relação

$$v_i = (C_{exper.})_i - (C_{calc.})_i, \tag{28}$$

onde

$$C_{calc.} = \xi \left(\frac{\epsilon_0 A}{D} \right)$$

O método acima foi aplicado na análise comparativa com as observações experimentais. O modelo proposto para reproduzir os dados experimentais Eq.(9) é o que melhor satisfaz os seguintes critérios:

1. A soma dos erros da Eq.(28) deve ser aproximadamente nula [6] ;

$$sv = \sum_{i=1}^m v_i \tag{29}$$

- 2 A variância deve ser mínima [4];

$$\sigma_v^2 = \pm \left[\frac{V^t V}{m(m-1)} \right] \tag{30}$$

3. O χ^2 deve ser mínimo[13];

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \left[\frac{v}{C_{calcul.}} \right]_i^2. \tag{31}$$

Os três critérios são obviamente equivalentes. Todos estes critérios foram utilizados para achar o melhor ajuste aos dados experimentais. Desta análise obteve-se a seguinte expressão para o coeficiente dielétrico do ar

$$\xi = \exp \left[\left(\frac{V}{22.4 \times 10^{-3}} \right)^{0.53591911} \left(\frac{P}{76} \right)^{-2.9311819} (U)^{-0.116599689} \right]. \tag{32}$$

Com auxílio da Eq.(3) e Eq.(32), pode-se reescrever a Eq.(7) para a capacitância do ar como:

$$C_{AR} = \exp [2\,495\,402.3054 (V^{0.53591911} P^{-2.93118019} U^{-0.116599689})] \frac{\epsilon_0 A}{D}. \tag{33}$$

Além das correções na capacitância devido ao uso dos suportes de PVC, foi aplicado uma segunda, nas mesmas observações já mencionado, devido a superfície

higroscópica [17]. Utilizando-se de 271 observações obtidas com uma das placas do capacitor suspensa. As correções foram obtidas por simulação para limite infe-

rior das umidades de 70 a 90%. As que apresentaram a menor soma dos desvios Eq.(29), foram as iguais e superiores a 88 %. Foram acrescidas as capacitâncias experimentais correspondentes, 1/5 da variação entre a capacitância calculada com uma das placas suspensa e as medidas experimentais. Para todo o conjunto de valores experimentais, a soma dos erros Eq.(29) é de 53.19, a variância Eq. (30) resulta em 0.150×10^{-2} e o χ^2 Eq. (31) 50.35. Observe que, se $\xi = f(P,U)$, os resultados obtidos acima deveriam ser multiplicados por 100.

Na Fig.(02) estão representadas por círculos as capacitâncias obtidas experimentalmente variando-se a distância entre as placas de 2 mm a 117 mm. Estas distâncias entre as placas foram obtidas com o auxílio de um catetômetro, sendo uma das placas suspensa através de um dispositivo. A linha descontínua que passa pelos mesmos corresponde a capacitância calculada pela Eq.(33). A linha contínua representa a capacitância obtida através da Eq.(3) para as mesmas distâncias no intervalo mencionado acima. Alertamos o leitor, para o fato de que, quanto menor a distância entre as placas, maior será o valor da capacitância.

Na Fig.(03), comparamos para um intervalo comum da capacitância geométrica conforme propôs Wintle[20]. Na mesma está representada também a de Feynman. Os valores da capacitância calculados por Wintle[20], e o modelo proposto por Feynman[7] praticamente coincidem em seus resultados, conforme se pode observar na presente figura.

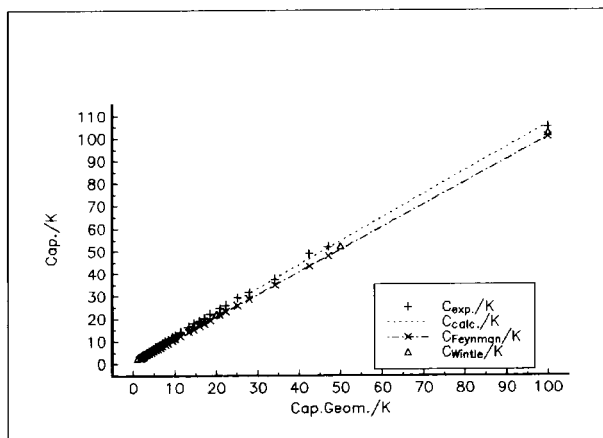


Figura 3. Comparação da capacitância experimental ajustada pela (Eq.33) com resultados obtidos por Wintle ($K = \pi \epsilon_0 a$) e Feynman.

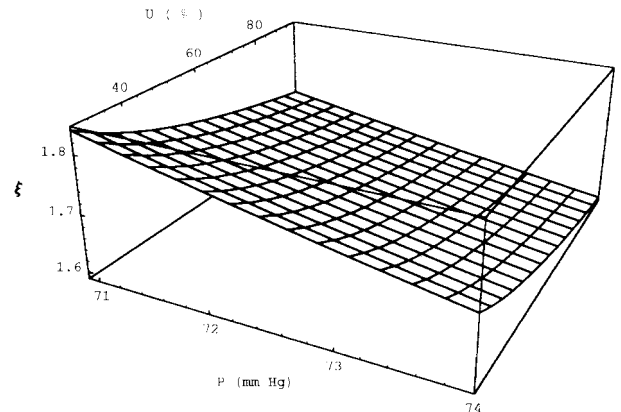


Figura 4. Configuração do coeficiente dielétrico do ar para uma distância D entre as placas de 10 cm.

Na Fig.(04), é mostrado o coeficiente dielétrico do ar quando a distância D entre as placas é de 10 cm e a pressão atmosférica e a umidade são variáveis. Observa-se que quanto maior a umidade do ar, mais facilidade encontram as cargas para se deslocarem de uma placa a outra. De forma análoga, quanto maior a pressão atmosférica, mais denso é o meio entre as placas, menor é a distância entre as moléculas que formam o meio, permitindo que as cargas armazenadas nas placas do capacitor encontrem um caminho para se neutralizarem.

V. Conclusão

O coeficiente dielétrico para capacitores de placas paralelas no vácuo é definido como igual a um.

Entretanto para calcular o valor da capacitância no meio ambiente utilizando um capacitor circular plano e paralelo, há necessidade de fazer-se o uso da Eq.(33). A equação proposta para a determinação do coeficiente dielétrico do ar, foi a que apresentou os menores valores para os parâmetros estatísticos para uma amostragem de 1362 observações.

A função ξ depende somente de parâmetros termodinâmicos. Esta função possibilita o cálculo da permissividade elétrica do ar num determinado momento. Se os parâmetros que definem o ξ são conhecidos, pode-se determinar o valor da capacitância do capacitor de placas planas e paralelas, quando o meio for o ar, sem usar de aparelho específico para a sua determinação.

Observe que não utilizamos o referido anel proposto[11] por três motivos: a) Por desejarmos que no coeficiente estivesse contida também a influência da

deformação do campo produzido pelas bordas. b) A utilização de anéis conectados com as placas do capacitor não é viável na montagem do sistema. c) Observamos experimentalmente que capacitores de mesma área, porém de raios diferentes, possuem capacitâncias diferentes. Tencionamos quantificar os efeitos produzidos nas bordas das placas do capacitor.

Finalmente, a escolha dos parâmetros termodinâmicos adotados não é consequência de um modelo teórico. Entretanto, esta escolha não foi arbitrária e sim como um resultado da análise da influência das condições do ambiente nas medidas. Muitos ensaios foram realizados para determinar o modelo empírico do coeficiente dielétrico do ar em termos de variáveis termodinâmicas mais relevantes. A melhor reprodução dos dados experimentais é dada pela Eq.(33). A Fig.(04), mostra o porquê de experimentos de eletrostática não funcionarem em determinados dias, quando a pressão atmosférica está alta, bem como quando a umidade relativa do ar é grande.

References

- [1] Brasil, Ministério da Aeronáutica. *Diretoria de Proteção ao Voo*. TMA-DEPV.105-05 Tabela II-B – Umidade Relativa em percentagem – Temperaturas Celsius – (Pressão = 990 mb) [s.n.t] 10 p. (Tabela).
- [2] Bronson, R. *Matrix Methods and Introduction*, Pag.(131 a 133). Academic Press, Inc, New York. 1969.
- [3] Bruhat, G. ; Goudet, G. *Cours de Physique Générale – Électricité I* Paris: Masson & Cie. Editeurs, 1962. p.142.
- [4] Carnahan, B.; Luther, H. and Wilkes, J.O. – *Applied Numerical Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [5] Dalmolin, Q. – *Ajustamento de Observações Pelo Processo Iterativo*. Curitiba: UFPR, 1976. p.96 Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, 1976).
- [6] Draper, N. R. and Smith, H., – *Applied Regression Analysis*. 2.ed. New York: John Wiley & Sons, 1966.
- [7] Feynman, R. P. & Leghton, R.B. and Matthew, S.- *The Feynman Lectures on Physics*. Vol.II- Chap.6 - Addison-Wesley Publishing Company. 1964.
- [8] Hibler, I. – *Regressão de Superfícies Através de Polinômios Algébricos*. Curitiba: UFPR, 1980 p.100 Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, 1980).
- [9] Lancaster, P. *Theory of Matrices*, pag.99, Academic Press, Inc (London) Ltd. 1969.
- [10] Lugnani, J.B.- *O Problema dos Sistemas de Equações Lineares Mal Condicionados e suas Implicações em Geodésia*. Curitiba: UFPR, 1975. p.106, Cap.III, Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, 1975
- [11] Maxwell, J. C. – *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol.1 - Chapter XIII. Dover Publications, Inc. - Unabridged third edition (1954).
- [12] Pipes, L. A. *Matrix Methods for Engineering*, Cap.4 pag.(88 a 89), Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1963.
- [13] Physics Letters B Amsterdam: Elsevier Science Publishers, V.239, April 1990 cap 3 p.31–33.
- [14] Reitz, J. R. and Milford, F. J. - *Foundation of Electromagnetic Theory*. 2.ed. Massachusetts: Addison – Wesley,1971.
- [15] Resnick, R. and Halliday, D. *Physics: Part II*. New York: John Wiley & Sons, 1966.
- [16] Searle, S. R.- *Matrix Algebra for the Biological Sciences (Including Applications in Statistics)*. Chap.8 - John Wiley & Sons, Inc., New York. 1966.
- [17] Taréiev, B. M.- *Física de los Materiales Dieléctricos* Cap.6, Editorial Mir – Moscú. URSS. 1978.
- [18] Universidade de São Paulo. Instituto de Física. *Texto base. Laboratório*. São Paulo: USP, 1986.
- [19] Wintle, H. J. and Kurylowicz, S.- *Edge Corrections for Strip and Disc Capacitors*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol.IM - 34, Nº. 1, March, 1985.
- [20] Wintle, H. J. - *Capacitor Edge Corrections*. IEEE Transactions on Electrical Insulation, Vol.EI - 21, Nº. 3, June, 1986.