# Supersimetria: da Mecânica Clássica à Mecânica Quântica

(Supersymmetry: From classical mechanics to quantum mechanics)

Rafael de Lima Rodrigues*
*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba*
*Campina Grande-PB, 58.109-970*

Arvind Narayan Vaidya
*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro,*
*Rio de Janeiro-RJ, 21.945-970*

Trabalho recebido em 30 de março de 1996

Apresentamos uma revisão sobre a construção da mecânica quântica supersimétrica com supersimetria N=2, usando o formalismo lagrangeano. Neste artigo, tem sido também investigado a supersimetria com duas variáveis de Grassmann (N=2) em mecânica clássica para implementar o método de quantização canônica de Dirac e as principais características da supersimetria em mecânica quântica não-relativística.

We present a review work considering the Lagrangian formalism on the construction of supersymmetric quantum mechanics with N=2 supersymmetry. In this paper the supersymmetry with two Grassmann's variables (N=2) in classical mechanics to implement the Dirac canonical quantization method and the main characteristics of the supersymmetry in non-relativistic quantum mechanics have also been investigated.

## I. Introdução

Este trabalho vem suprir a escassez de textos didáticos, publicados em português, concernentes a super-álgebra (supersimetria) do ponto, ou seja, abordaremos as teorias clássica e quântica que descreve uma partícula no super-espaço. O leitor com alguns conhecimentos no nível introdutório à mecânica quântica formulada por Schrödinger [1] não terá dificuldades em verificar os cálculos empreendidos neste artigo.

Partindo da super-partícula não-relativística construiremos a supersimetria em mecânica quântica (SUSI MQ) usando os formalismos lagrangeano e hamiltoniano. Iniciaremos com a supersimetria em mecânica clássica (SUSI MC) e implementaremos o procedimento de quantização canônica de Dirac [2], no contexto não-relativístico. Tal procedimento de quantização aplica-se a sistemas com vínculos de segunda classe.

A SUSI surgiu, na década de setenta e, logo em seguida, alguns pesquisadores da linha de trabalhos sobre uma descrição unificada das teorias físicas relutaram com a grande ambição de que a mesma fosse a teoria de grande unificação das quatro interações básicas existentes na natureza (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional). Mas, após um grande número de trabalhos abordando a SUSI neste contexto, está faltando uma constatação experimental, para que a SUSI se torne uma teoria de unificação a altas energias, ou seja, uma Teoria Quântica de Campos consistente com a descrição da natureza. Não obstante, no momento há uma grande perspectiva da existência da SUSI em física de altas energias.

Entretanto, após a formulação da SUSI MQ por Witten [3, 4] e da SUSI MC [5, 6, 7], surgiram algu-

*Endereço permanente: Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, Cajazeiras-PB, 58.900-000. E-mail: rafael@dfjp.ufpb.br ou cendfi76@vm.npd.ufpb.br

mas evidências fenomenológicas a baixas energias, em mecânica quântica não-relativística supersimé[8]. Na referência[7] o leitor pode encontrar uma demonstração de que, no caso da SUSI MC com N=1 (uma variável de Grassmann) e uma única supercoordenada comutante, não podemos introduzir um termo de potencial na super-ação. A SUSI MQ tem sido aplicada principalmente como técnica de resolução espectral para potenciais invariantes de forma [9] e para se construir novos potenciais iso-espectrais em mecânica quântica [10]. Recentemente, um dos autores construiu uma nova classe de potenciais no contexto da mecânica quântica unidimensional e da teoria de campos bidimensional (1+1 dimensões) [11].

Os modelos hamiltonianos da SUSI MC N=1 e N=2 em (0+1) dimensão, contêm vínculos [5] cuja primeira quantização, via o método de Dirac, foi efetivada por Barcelos *et al* [12]. Recentemente, foi mostrada a conexão da SUSI MQ com: a álgebra de Wigner e Heisenberg super-realizada para os osciladores quânticos de Wigner, em termos de operadores bosônicos e fermiônicos [13, 14]; a óptica quântica [15]; os superpotenciais singulares [16]; os potenciais não polinomiais [17], e com potenciais de fases equivalentes [18]. Gendenshtein e Krive [19] fizeram um excelente trabalho de revisão mostrando as aplicações da SUSI em física quântica com potenciais invariantes de forma, física estatística e física nuclear. Eles abordaram também os aspectos de quebra da supersimetria e a conexão com a teoria de Gauge; completando a revisão, Lahiri, Roy e Bagchi [20] consideraram a quantização com vínculos de uma lagrangeana SUSI, e também as aplicações para os seguinteharmônico isotrópico, o átomo de hidrogênio e o potencial de Morse. Lahiri *et al* discutiram também a conexão da SUSI com o acoplamento de spin órbita. Citamos também um curso sobre a SUSI MQ e a para-supersimetria dinâmica, ministrado por Luc Vinet, na *V Escola de Verão Jorge André Swieca, seção: Teoria de Campos e Partículas* [21]. Há também o excelente trabalho de Haymaker e Rau mostrando entre outras aplicações, a conexão da SUSI com a partícula relativística de Dirac [22]. O trabalho de revisão mais recente sobre SUSI em mecânica quântica, aborda entre outros tópicos, a construção de potenciais isoespectrais com o espectro de energia conhecido, por Cooper, Khare e Sukhatme [23].

Na construção de uma teoria SUSI, usa-se as variáveis anti-comutantes (cujo quadrado é zero) denominadas de grassmannianas [24]. Para a superpartícula relativística no espaço-tempo quadridimensional de Minkowski ($D = 4 = (3 + 1)$, que significa três dimensões espaciais e uma dimensão temporal), adotam-se etapas semelhantes ao procedimento que iremos considerar a seguir [25].

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na seção II, introduziremos algumas propriedades das variáveis de Grassmann e implementaremos a SUSI N = 2 em mecânica clássica. Na seção III, consideraremos a questão do vínculo de segunda classe na quantização da super-partícula e construiremos o modelo supersimétrico de Witten em mecânica quântica não-relativística, e na seção IV, elaboraremos as discussões e conclusões.

## II. Supersimetria em mecânica clássica com SUSI N=2

Para a SUSI $N = 1$, com uma única supercoordenada comutante, não podemos introduzir um potencial $V(\phi)$, pois entre outros motivos levaria a não consistência da super-ação, tornando-a de dimensão ímpar [7]. Consideraremos a análise da superpartícula interagindo com uma energia potencial conservativa $U(\phi)$, a qual, no formalismo lagrangeano, é usual denominá-la simplesmente de potencial. Assumiremos que a SUSI ocorre a $D = 1 = (0 + 1)$ com supersimetria estendida $N = 2$. Neste caso, teremos duas variáveis anticomutantes. Iniciaremos com o tratamento clássico e depois efetuaremos a primeira quantização via o método de quantização canônica com vínculos. Em geral, a SUSI com $N > 1$ é denominada de supersimetria estendida. No caso $N = 2$, o elemento de linha é dado por

$$dt - i\Theta_1 d\Theta_1 - i\Theta_2 d\Theta_2 = \text{ invariante}, (\text{Jacobiano} = 1), \tag{1}$$

o qual é invariante sob as seguintes transformações de translação no super-espaço:

$$\Theta_1 \rightarrow \Theta_1' = \Theta_1 + \epsilon_1, \quad \Theta_2 \rightarrow \Theta_2' = \Theta_2 + \epsilon_2, \quad t \rightarrow t' = t + i\epsilon_1\Theta_1 + i\epsilon_2\Theta_2, \tag{2}$$

onde $\epsilon_1$ e $\epsilon_2$ são grandezas anticomutantes (grassmannianas) e constantes reais. O "$i$" em (1) serve para garantir o caráter real do tempo.

As variáveis de Grassmann reais possuem as seguintes propriedades:

$$[\Theta_i, \Theta_j]_+ = \Theta_i\Theta_j + \Theta_j\Theta_i = 0 \Rightarrow (\Theta_1)^2 = 0 = (\Theta_2)^2. \tag{3}$$

Elas satisfazem as seguintes integrais de Berezin:

$$\int d\Theta\Theta = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2}\int d\Theta_i\Theta_i = 2 = \sum^{2} \qquad \int d\Theta_i = 0 = \partial_{\Theta_i}, (i = 1, 2), \tag{4}$$

onde $\partial_{\Theta_i}$ é a derivada parcial em relação a $\Theta_i$. Além do mais, note que a derivada grassmanniana satisfaz a seguinte relação de anti-comutação:

$$[\partial_{\Theta_i}, \Theta_j]_+ = \partial_{\Theta_i}\Theta_j + \Theta_j\partial_{\Theta_i} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2), \tag{5}$$

onde $\delta_{ij}$ é o delta de Kronecker, isto é, se $i = j \Rightarrow \delta_{ii} = 1$; se $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$.

De um modo geral, uma função de um conjunto de duas variáveis ímpares reais ($\Theta_\alpha, \alpha = 1, 2$) pode ser definida pela seguinte expansão formal:

$$\begin{aligned} f(\Theta_\alpha) &= f_0 + \sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha\Theta_\alpha + f_3\Theta_1\Theta_2 \\ \delta f &= \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial\Theta_\alpha}\delta\Theta_\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Note que na segunda equação acima $\delta\Theta_\alpha$ está atuando pelo lado direito, o que denomina-se de regra de derivada à direita. Quando $\delta\Theta_\alpha$ atuar pelo lado esquerdo da derivada parcial, chama-se de regra de derivada à esquerda. Neste trabalho, estamos adotando a regra de derivada à direita, ou seja: $\partial_{\Theta_1}(\Theta_2\Theta_1) = \Theta_2$, $\quad \partial_{\Theta_1}(\Theta_1\Theta_2) = -\Theta_2$.

As variáveis de Grassmann muitas vezes simplificam os cálculos. Por exemplo, a exponencial de $\Theta_1$ resulta exatamente na soma da unidade com $\Theta_1$. Definindo as coordenadas grassmannianas complexas $\Theta$ e $\bar{\Theta}$ (o conjugado complexo de $\Theta$) em termos das variáveis anticomutantes reais, $\Theta_i(i = 1, 2)$ e os parâmetros (constantes) grassmann

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - i\Theta_2), \\ \bar{\Theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + i\Theta_2), \\ \epsilon &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2), \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2), \end{aligned} \tag{7}$$

a transformação SUSI torna-se:

$$\Theta \rightarrow \Theta' = \Theta + \epsilon, \qquad \bar{\Theta} \rightarrow \bar{\Theta}' = \bar{\Theta} + \bar{\epsilon}, \qquad t \rightarrow t' = t - i(\bar{\Theta}\epsilon - \bar{\epsilon}\Theta). \tag{8}$$

Neste caso, obtêm-se as seguintes relações de anti-comutações:

$$[\partial_\Theta, \Theta]_+ = 1, \quad [\partial_{\bar{\Theta}}, \bar{\Theta}]_+ = 1, \quad \Theta^2 = 0. \tag{9}$$

A expansão de Taylor para a supercoordenada escalar real de natureza comutante, em termos de $\Theta$ e $\bar{\Theta}$, pode ser escrita como:

$$\phi(t;\Theta,\bar{\Theta}) = q(t) + i\bar{\Theta}\psi(t) + i\Theta\bar{\psi}(t) + \Theta\bar{\Theta}A(t). \tag{10}$$

A partir da lei de tranformação infinitesimal desta supercoordenada, a saber,

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \phi(t';\Theta',\bar{\Theta}') - \phi(t;\Theta,\bar{\Theta}) \\
&= \partial_t\phi\delta t + \partial_\Theta\phi\delta\Theta + \partial_{\bar{\Theta}}\phi\delta\bar{\Theta} \\
&= (\epsilon Q + \bar{Q}\bar{\epsilon})\phi,
\end{aligned} \tag{11}$$

onde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ e os geradores da SUSI,

$$\bar{Q} \equiv \partial_{\bar{\Theta}} - i\Theta\partial_t, \quad Q \equiv -\partial_\Theta + i\bar{\Theta}\partial_t, \tag{12}$$

(a supercarga $\bar{Q}$ não é o complexo conjugado da supercarga $Q$), obtemos as respectivas leis para as componentes bosônicas (pares) $(q(t);A)$ e fermiônicas (ímpares) $(\psi(t),\bar{\psi}(t))$:

$$\delta q(t) = i\{\epsilon\bar{\psi}(t) + \bar{\epsilon}\psi(t)\}, \qquad \delta A = \epsilon\dot{\bar{\psi}}(t) - \bar{\epsilon}\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt}\{\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi), \tag{13}$$

$$\delta\psi(t) = -\epsilon\{\dot{q}(t) - iA\}, \qquad \delta\bar{\psi}(t) = -\bar{\epsilon}\{\dot{q}(t) + iA\}, \tag{14}$$

as quais misturam-se como no caso da SUSI N=1 [7]. Obtemos estas leis de transformação comparando a lei SUSI em sua forma infinitesimal, dada pela equação (11), com a variação $(\delta\phi)$ obtida diretamente da supercoordenada, isto é, $\delta\phi = \delta q(t) + i\bar{\Theta}\delta\psi + i\Theta\delta\bar{\psi} + \Theta\bar{\Theta}\delta A(t)$. A super-ação mais geral com SUSI $N = 2$, invariante sob estas transformações, no superespaço $(\Theta,\bar{\Theta};t)$ e de dimensão par, é definida pela seguinte integral tripla:

$$S[\phi] = \int\int\int dt d\bar{\Theta} d\Theta\{\frac{1}{2}(\bar{D}\phi)(D\phi) - U(\phi)\}, \qquad D \equiv \partial_\Theta + i\bar{\Theta}\partial_t, \tag{15}$$

onde $D$ é a derivada covariante, $(\bar{D} \equiv -\partial_{\bar{\Theta}} - i\Theta\partial_t)$, $\bar{\partial}_{\bar{\Theta}} = -\partial_\Theta$, e $(\partial_{\bar{\Theta}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}}$ e $\partial_\Theta = \frac{\partial}{\partial\Theta})$, construída de modo que $[D,Q]_+ = 0 = [\bar{D},\bar{Q}]_+$ e $U(\phi)$ é uma função polinomial da supercoordenada. Multiplicando esta super-ação covariante SUSI por $(-1)$ obtém-se aquela da referência [12], no entanto, as derivadas covariantes são diferentes da nossa definição. De fato, a SUSI MC é um jogo de convenções, pois, poderíamos ter construído outras derivadas covariantes anti-comutantes com as respectivas supercargas. As derivadas covariantes da supercoordenada $\phi = \phi(\Theta,\bar{\Theta};t)$ resultam em

$$\begin{aligned}
D\phi &= (\partial_\Theta + i\bar{\Theta}\partial_t)\phi = -i\bar{\psi} - \bar{\Theta}A + i\bar{\Theta}\partial_t q + \Theta\bar{\Theta}\dot{\bar{\psi}}, \\
\bar{D}\phi &= (-\partial_{\bar{\Theta}} - i\Theta\partial_t)\phi = i\psi - \Theta A - i\Theta\dot{q} + \Theta\bar{\Theta}\dot{\psi} \\
(\bar{D}\phi)(D\phi) &= \psi\bar{\psi} - \bar{\Theta}(\psi\dot{q} - iA\psi) - \Theta(iA\bar{\psi} + \bar{\psi}\dot{q}) \\
&+ \Theta\bar{\Theta}\left(\dot{q}^2 + A^2 + i\psi\dot{\bar{\psi}} - i\dot{\psi}\bar{\psi}\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Expandindo em série de Taylor o potencial $U(\phi)$ e mantendo até a primeira ordem em $\Theta\bar{\Theta}$ (porque somente estes termos sobrevivem após integrarmos nas variáveis garssmannianas complexas $\Theta$ e $\bar{\Theta}$), obtemos:

$$\begin{aligned}
U(\phi) &= \phi U'(\phi) + \frac{\phi^2}{2}U''(\phi) + \cdots \\
&= A\Theta\bar{\Theta}U'(\phi) + \frac{1}{2}\psi\bar{\psi}\bar{\Theta}\Theta U'' + \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\Theta\bar{\Theta}U'' + \cdots \\
&= \Theta\bar{\Theta}\{AU' + \bar{\psi}\psi U''\} + \cdots,
\end{aligned} \tag{17}$$

onde as derivadas ($U'$ e $U''$) são tomadas a $\Theta = 0 = \bar{\Theta}$, de modo que resultam-nos em funções exclusivamente da coordenada par $q(t)$. Substituindo esta expansão de $U(\phi)$ e as derivadas covariantes $\bar{D}\phi$ e $D\phi$ vemos que a super-ação e a lagrangeana com SUSI N=2 em termos das componentes da supercoordenada $\phi$ tornam-se:

$$S[q;\psi,\bar{\psi}] = \frac{1}{2}\int\left\{\dot{q}^2 + A^2 - i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\psi\dot{\bar{\psi}} - 2AU'(q) - 2\bar{\psi}\psi U''(q)\right\}dt \equiv \int L dt, \tag{18}$$

onde temos efetivado as integrais sobre as variáveis de Grassmann. Note que, a componente bosônica $A$ não é uma variável dinâmica, pois, não existe nenhum termo na lagrangeana contendo derivada temporal dela! Neste caso, usando a equação de Euler-Lagrange para $A$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \partial_t A} - \frac{\partial L}{\partial A} = A - U'(q) = 0 \Rightarrow A = U'(q), \tag{19}$$

o que nos permite uma representação da lagrangeana sem depender de $A$, como será visto logo abaixo. Por isso, esta componente é denominada de componente auxiliar. Em geral isto ocorre com a componente que aparece no termo de maior ordem da expansão da supercoordenada $[\phi(t;\Theta^\alpha)]$ nas variáveis anticomutantes $\Theta$ e $\bar{\Theta}$. De (19) em (18), é fácil de ver que a lagrangeana SUSI pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}\left\{\dot{q}^2 - 2\left(U'(q)\right)^2 - 2U''(q)\bar{\psi}\psi - i(\dot{\psi}\bar{\psi} + \psi\dot{\bar{\psi}})\right\}. \tag{20}$$

Esta lagrangeana é a mesma obtida através da regra de derivada à esquerda. Ela descreve uma partícula supersimétrica não-relativística, onde $q = q(t)$ é a variável bosônica, $\psi = \psi(t)$ é a variável fermiônica, $\bar{\psi} = \psi^\dagger$ e $\dot{\psi} = \frac{d\psi(t)}{dt}$. Devemos enfatizar também que $\psi, \bar{\psi}$ e $\dot{\psi}$ não são operadores, mas sim variáveis clássicas fermiônicas satisfazendo à álgebra de Grassmann ($\psi\psi = \bar{\psi}\bar{\psi} = \dot{\psi}\dot{\psi} = 0, \quad \psi\bar{\psi} = -\bar{\psi}\psi, \quad \psi\dot{\psi} = -\dot{\psi}\psi$ e $\dot{\psi}\bar{\psi} = -\bar{\psi}\dot{\psi}$).

Por construção, a hamiltoniana canônica da SUSI $N = 2$ é dada por:

$$H_c = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\psi)}\dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\bar{\psi})}\dot{\bar{\psi}} - L = \frac{1}{2}\left\{p^2 + \left(U'(q)\right)^2 + U''(q)[\bar{\psi},\psi]_-\right\}, \tag{21}$$

a qual contém um termo de potencial misto, composto de uma função da variável dinâmica de posição da partícula ($U''(q)$) e de variáveis de Grassmann ($[\bar{\psi},\psi]_-$). Após a quantização desta hamiltoniana veremos que este termo de potencial misto nos proporcionará a interação SUSI MQ, envolvendo uma parte bosônica e uma parte fermiônica.

## III. Mecânica quântica supersimétrica

### A. Quantização Canônica no Super-Espaço

A supersimetria em mecânica quântica, formulada inicialmente por Witten [3], pode ser alcançada pela primeira quantização da hamiltoniana canônica acima. Mas, devemos tomar certos cuidados ao se implementar o procedimento de quantização canônica, pois há vínculos embutidos neste modelo [5, 12]. Salomonson *et al*, F.Cooper et al e Ravndal não consideraram os vínculos [6]. No entanto, eles fizeram uma escolha adequada para a representação dos operadores fermiônicos correspondentes às coordenadas ímpares anti-comutantes $\bar{\psi}$ e $\psi$. A questão de tais vínculos foi abordada através do método de Dirac [2] por Barcelos *et al* [12]. Eles mostraram que a primeira quantização pode ser implementada consistentemente, no formalismo de supercoordenada via o procedimento de quantização canônica de Dirac. De acordo com o método de Dirac, os parênteses de Poisson $\{A, B\}$ devem ser substituídos por parênteses de Poisson modificados (denominados de parênteses de Dirac) $\{A, B\}_D$, os quais entre duas variáveis dinâmicas $A$ e $B$ são dados por:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Gamma_i\}C_{ij}^{-1}\{\Gamma_j, B\} \tag{22}$$

onde $\Gamma_i$ denotam os vínculos de segunda classe. Estes vínculos têm os parênteses de Poisson não-nulos que definem a matriz $C$

$$C_{ij} \simeq \{\Gamma_i, \Gamma_j\}, \tag{23}$$

que Dirac mostrou ser anti-simétrica e não-singular e, portanto, inversível. Seguindo esta técnica obtém-se [12]:

$$\{q, \dot{q}\}_D = 1, \qquad \{\psi, \bar{\psi}\}_D = i \qquad \text{e} \qquad \{A, \dot{q}\}_D = \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2}. \tag{24}$$

Todos os demais parênteses de Dirac são nulos. Na próxima etapa, implememtaremos o procedimento de quantização canônica. Em tal procedimento, devemos substituir os parênteses de Dirac por comutador ou anticomutador. De acordo com o *teorema de spin-estatística*, os operadores bosônicos satisfazem a relação de comutação e os operadores fermiônicos satisfazem a relação de anticomutação. Conseqüentemente, denotamos $\hat{q}$ e $\hat{\psi}$ como sendo os operadores bosônico e fermiônico, respectivamente, em mecânica quântica, correspondentes as variáveis clássicas $q$ e $\psi$. Neste caso, efetuamos as substituições dos parênteses de Dirac pelo seguinte comutador e anticomutador:

$$\begin{aligned}\{q,\dot{q}\}_D &= 1 \rightarrow \frac{1}{i}[\hat{q},\dot{\hat{q}}]_- = 1 \quad \Rightarrow [\hat{q},\dot{\hat{q}}]_- = \hat{q}\dot{\hat{q}} - \dot{\hat{q}}\hat{q} = i, \\ \{\psi,\bar{\psi}\}_D &= i \rightarrow \frac{1}{-i}[\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}]_+ = i \Rightarrow [\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}]_+ = \hat{\psi}\hat{\bar{\psi}} + \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Note que, após a substituição das variáveis clássicas por operadores preservamos o que foi obtido, ou seja, o lado direito da equação (24) não deve ser alterado. Vale a pena salientar que, na referência [12], aparece um sinal negativo no parêntese de Dirac para as variáveis fermiônicas, ou seja, $\{\psi,\bar{\psi}\}_D = -i$. Isto aconteceu porque eles usaram a regra de derivação à esquerda. Além do mais, note que o parêntese de Dirac é não nulo, enquanto que o parêntese de Poisson é fracamente nulo, o que é denotado por

$$\{\psi,\bar{\psi}\} \approx 0, \tag{26}$$

e, por sua vez, não tem correspondência com o anticomutador. Por isso, foi necessário a implementação do método de quantização Dirac. No caso da referência [12], o parêntese de Dirac deve ser substituído pelo seguinte anticomutador: $\frac{1}{i}[\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}]_+$. A representação matricial dos operadores fermiônicos serão as mesmas consideradas na próxima subseção.

Devemos dizer que o objetivo principal deste trabalho não é analisar os aspectos da quantização de sistemas com vínculos, mas entendemos que foi necessário a síntese apresentada nesta seção. Para maiores detalhes sugerimos ao leitor buscar subsídios nas referências citadas em [5, 12].

## B. O Modelo SUSI de Witten

Nesta subseção veremos o efeito dos vínculos sobre a hamiltoniana canônica na versão quantizada. A representação fundamental dos operadores fermiônicos, em $D = 1 = (0+1)$ é dada por:

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\bar{\psi}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow [\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}]_+ = 1_{2\times 2}, \qquad [\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}]_- = \sigma_3, \tag{27}$$

onde $\sigma_3$ é a matriz (diagonal de Pauli) com os elementos 1 e -1 na diagonal principal. Por outro lado, na representação de coordenada, os operadores de posição e de momento linear satisfazem à relação de comutação canônica ($[\hat{x},\hat{p}_x]_- = i$) e têm as seguintes representações:

$$\hat{x} \equiv \hat{q}(t) = x(t), \qquad \hat{p}_x = m\dot{x}(t) = -i\hbar\frac{d}{dx} = -i\frac{d}{dx}, \quad \hbar = 1. \tag{28}$$

Substituindo (27) em (21), e definindo

$$W(x) \equiv U'(x) \equiv \frac{dU}{dx}, \tag{29}$$

a hamiltoniana canônica torna-se o seguinte operador matricial, denominado de modelo hamiltoniano de Witten [3]:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\{W^2(x) + W'(x)\sigma_3\} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \tag{30}$$

onde o setor de hamiltoniano ($H_-$) pode ser colocado em termos de operadores diferenciais de primeira or$A^+ = (A^-)^\dagger$, $\quad A^- = (A^+)^\dagger$), a saber,

$$H_- = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_- = A^+A^- \tag{31}$$

e o seu companheiro supersimétrico $H_+$ é definido por

$$\begin{aligned} H_+ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_+ = A^-A^+, \\ V_\mp &= \frac{1}{2}\left\{W^2(x) \mp W'(x)\right\}, \\ A^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\pm\frac{d}{dx} + W(x)\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Vemos que devido a existência de vínculos obtém-se o hamiltoniano SUSI com um termo de potencial matricial, envolvendo a matriz diagonal de Pauli, ou seja, o método de quantização de sistema hamiltoniano com vínculos nos assegura a existência de operadores fermiônicos no hamiltoniano SUSI MQ.

Estes modelos de potenciais $V_\pm$ são iso-espectrais, cujas degenerescências fornecem a supersimetria em mecânica quântica. Eles foram introduzidos na literatura, pela primeira vez, por Witten [3]. A partir desta forma fatorada de $H_\pm$ é fácil verificar que estes hamiltonianos possuem a mesma energia, a menos de um autovalor de energia pertencente ao nível mais baixo (estado fundamental).

Agora, considerando a equação de autovalor para $H_-$

$$H_- \mid \psi >_- = E_- \mid \psi >_- \tag{33}$$

e notando que

$$H_+A^- = A^-H_- \tag{34}$$

obtemos

$$H_+(A^- \mid \psi >_-) = E_-(A^- \mid \psi >_-). \tag{35}$$

Esta equação de autovalor para $H_+$ nos assegura que $(A^- \mid \psi >_-)$ é uma autofunção de $H_+$ associada ao mesmo autovalor de energia $E_-$ de $H_-$. Assumindo que $A^-$ aniquila a função de onda normalizável que descreve o estado fund

$$A^-\psi_-^{(o)} = 0, \quad E_-^{(0)} = 0, \tag{36}$$

obtém-se o seguinte mapeamento entre os autovalores de energia $E_\pm$ de $H_\pm$:

$$E_+^{(n)} = E_-^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

Vemos que todos os níveis de energia dos hamiltonianos $H_\pm$ são degenerados, com exceção do estado fundamental não degenerado de $H_-$ associado ao autovalor de energia zero.

Por que a denominação de superpotencial? A função $W(x)$ é chamada de superpotencial, devido as seguintes interpretações: $W^2(x)$ representa a interação entre bóson-bóson, e $W'(x)\sigma_3$ representa a interação bóson-férmion. A álgebra graduada de Lie associada à SUSI MQ $N = 2$, em termos das supercargas $Q_\pm$, envolvendo comutador $[A, B]_- = AB - BA$ e anticomutador $[A, B]_+ = AB + BA$:

$$[Q_-, Q_+]_+ = H_{SUSI}, \quad Q_+ = Q_-^\dagger, \quad Q_- = Q_+^\dagger, \tag{38}$$

$$[H_{SUSI}, Q_-]_- = 0 = [H_{SUSI}, Q_+]_-, \qquad Q_+^2 = Q_-^2 = 0. \tag{39}$$

Os elementos desta super-álgebra podem ser representados em termos dos operadores diferenciais de primeira ordem $A^\pm$. Neste caso, temos:

$$H_{SUSI} = \hat{H}, \quad Q_- = \sigma_-A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

onde $\sqrt{2}\sigma_- = \sigma_1 - i\sigma_2$ com $\sigma_1$ e $\sigma_2$ sendo as matrizes de Pauli. A energia do estado fundamental do setor bosônico $H_-$ é zero, ou seja, $E_-^{(0)} = 0 = E_{SUSI}^{(0)}$. A equação de Schrödinger para a função de onda que descreve um estado quântico SUSI na representação abstrata,

$$\hat{H} \mid \Psi >_{SUSI} = E \mid \Psi >_{SUSI}, \qquad \mid \Psi >_{SUSI} = \begin{pmatrix} \mid \psi >_- \\ \mid \psi >_+ \end{pmatrix}, \qquad E \equiv E_{SUSI} \geq 0, \tag{41}$$

nos fornece as seguintes relações entrelaçadas entre as autofunções dos setores bosônico, $\mid \psi >_-$, e fermiônico, $\mid \psi >_+$, conforme a equação (34):

$$\mid \psi >_+ = \frac{1}{\sqrt{E}} A^- \mid \psi >_-, \qquad \mid \psi >_- = \frac{1}{\sqrt{E}} A^+ \mid \psi >_+ . \tag{42}$$

Por conseguinte vemos que os operadores $A^{\pm}$ não são os operadores de simetria, mas eles graduam os subespaços de Hilbert da SUSI MQ, levando o setor bosônico no setor fermiônico e vice-versa. Os operadores de simetria são as supercargas $Q_{\pm}$. Na descrição de Schrödinger, a função de onda depende de $x$ e está relacionada com a representação abstrata através do seguinte produto escalar: $\Psi_{SUSI}(x) = < x \mid \Psi >_{SUSI}$ . Justifica-se esta denominação de setores bosônico e fermiônico, devido ao fato de que o operador de número fermiônico, $N_f = (1 - \sigma_3)/2$, $N_f N_f = N_f$, possui o auto-espinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $n_f = 0$ (nenhum férmion) e o auto-espinor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, com $n_f = 1$ (um férmion). Lembre-se de que, pelo *teorema de spin-estatística*, cada estado quântico só pode ser ocupado por no máximo um férmion ou um número inteiro de bósons.

Abordaremos agora a quebra espontânea da SUSI em mecânica quântica. Quando o vácuo deixa de ser invariante SUSI,

$$T(\epsilon, \bar{\epsilon}) |\Psi_{SUSI}^{(0)} > \neq |\Psi_{SUSI}^{(0)} >, \quad T(\epsilon, \bar{\epsilon}) = e^{i(\bar{\epsilon} Q_- + Q_+ \epsilon)}, \tag{43}$$

diz-se que há uma quebra espontânea da SUSI. Isto se dá precisamente quando $E_{SUSI}^{(0)} \neq 0$. Note qu$Q$ corresponde ao operador $Q_-$ da versão quântica e $T$ é um operador unitário ($T^\dagger = T^{-1}$). Dado uma curva de potencial, se ocorrer pelo menos um mínimo com valor zero o potencial não apresenta quebra espontânea de SUSI. Obviamente, estamos considerando o caso em que o potencial é uma função positiva dependente exclusivamente da posição da partícula.

Agora assumindo que $|\Psi_{SUSI}^{(0)} >$ é invariante SUSI e $Q_{\pm}$ são os operadores de supercargas mutuamente adjuntos, temos:

$$\begin{aligned} E_{SUSI}^{(0)} &= < \Psi_{SUSI}^{(0)} | H_{SUSI} | \Psi_{SUSI}^{(0)} > = < \Psi_{SUSI}^{(0)} | (Q_- Q_+ + Q_+ Q_-) | \Psi_{SUSI}^{(0)} > \\ &= |Q_+ |\Psi_{SUSI}^{(0)} > |^2 + |Q_- |\Psi_{SUSI}^{(0)} > |^2 = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

se e somente se

$$Q_- |\Psi_{SUSI}^{(0)} > = Q_+ |\Psi_{SUSI}^{(0)} > = 0 \Rightarrow T(\epsilon, \bar{\epsilon}) |\Psi_{SUSI}^{(0)} > = |\Psi_{SUSI}^{(0)} >, \tag{45}$$

ou seja, se $E_{SUSI}^{(0)} = 0$ dizemos que não há quebra espontânea de supersimetria e, portanto, a SUSI é uma simetria exata sempre que existir uma solução normalizável, da equação de Schrödinger, associada a energia zero. Podemos implementar uma análise precisa da normalizabilidade da função de onda, $\Psi_{SUSI}^{(0)}(x)$, que descreve o estado fundamental, em termos do superpotencial $W(x)$. De fato, considerando que em uma dimensão $\Psi_{SUSI}^{(0)}(x)$ é aniquilada pela supercarga matricial $Q_-$, dada pela equação (40), obtemos:

$$Q_- \Psi_{SUSI}^{(0)}(x) = 0 \Rightarrow \Psi_{SUSI}^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} \psi_-^{(0)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} exp\left(-\int_0^x W(y)dy\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Obviamente, para que $\Psi_{SUSI}^{(0)}(x)$ seja normalizável vemos que é necessário e suficiente a seguinte condição sobre a topologia do superpotencial:

$$\int_0^x W(y)dy \to \infty, \quad x \to \pm\infty. \tag{47}$$

Neste caso, $N$ é a constante de normalização. Um aspecto bastante importante é a impossibilidade do nível de energia do estado fundamental ser degenerado quando não há quebra espontânea da SUSI. Pois, da definição de $A^{\pm}$ em (32), obtém-se a seguinte relação entre as soluções de $A^{-}\psi_{-}^{(0)}(x) = 0$ e $A^{+}\psi_{+}^{(0)}(x) = 0$:

$$\psi_{-}^{(0)}(x)\psi_{+}^{(0)}(x) = C, \tag{48}$$

onde $C$ é uma constante real. Note que, se $\psi_{-}^{(0)}(x)$ for normalizável, então $\psi_{+}^{(0)}(x)$ será não-normalizável e, portanto, a energia zero não será permitida para $H_{+}$. Neste caso, $\psi_{+}^{(0)}(x)$ é uma solução da equação de Schrödinger, mas não é aceitável fisicamente.

Sobretudo, podemos afirmar que temos quebra espontânea de supersimetria em mecânica quântica quando existir uma função de onda normalizável associada ao menor valor de energia de um potencial, desde que a respectiva energia seja maior do que zero.

## IV. Conclusão

A mecânica quântica supersimétrica tem sido uma técnica algébrica bastante usada em resoluções espectrais e para se construir novos potenciais iso-espectrais em mecânica quântica [10] e com fases equivalentes [18]. Recentemente, foi construído uma nova classe de potenciais isoespectrais em mecânica quântica e em teoria de campos bidimensionais (1+1 dimensões) [11]. Neste trabalho, investigamos a lagrangeana com supersimetria (SUSI) $N = 2$. Vimos que neste caso da supersimetria estendida (SUSI $N = 2$) pode-se introduzir um termo de potencial $V(\phi)$ na super-ação de dimensão par, a qual é invariante para as seguintes translações no super-espaço $(t; \Theta_1; \Theta_2)$: $t \rightarrow t' = t + i\epsilon_1\Theta_1 + i\epsilon_2\Theta_2$, $\Theta_1 \rightarrow \Theta_1' = \Theta_1 + \epsilon_1$, e $\Theta_2 \rightarrow \Theta_2' = \Theta_2 + \epsilon_2$. Essas transformações nos fornece os geradores da SUSI que são denominados de supercargas, cujos símbolos são Q e $\bar{Q}$, em mecânica clássica e $Q_{\pm}$, em mecânica quântica (MQ). Consideramos uma síntese do procedimento de quantização canônica de Dirac [2], devido a presença de vínculos inerentes a hamiltoniana SUSI, cujos detalhes o leitor pode encontrar nas referências [5, 12]. Barcelos *et al* [12] empregaram a derivação à esquerda, para as variáveis de Grassmann, de modo que os parênteses de Dirac resultartam em um sinal negativo, ou seja, $\{\psi, \bar{\psi}\}_D = -i$. Neste trabalho, adotamos a regra de derivação à direita [dada pela equação (24)], o que nos forneceu este parêntese de Dirac com um sinal positivo, conforme evidenciado em (24). Devido o *teorema de spin-estatística* para férmions, o respectivo parêntese de Dirac foi substituído por um anticomutador.

Por outro lado, quando já se conhece o hamiltoniano em MQ, a SUSI N=2 pode ser construída seguindo o tratamento de Witten [3,4], 98-10] e [13-22]. Mostramos ainda as principais características da SUSI em mecânica quântica não-relativística, inclusive a realização da super-álgebra de Lie, a qual é uma álgebra graduada de Lie contendo dois comutadores e um anticomutador, o que possibilita uma mistura de estados bosônico e fermiônico num mesmo multipleto. Vimos que na descrição de Schrödinger da MQ o estado quântico SUSI (41) é descrito por uma função de onda de duas componentes. Mostramos também que o hamiltoniano supersimétrico é uma matriz diagonal 2x2, cujos elementos são denominados de hamiltonianos dos setores bosônico e fermiônico, com o espectro de energia maior ou igual a zero. Analisamos a energia do estado fundamental e vimos que se ela for positiva ocorre quebra espontânea da supersimetria em mecânica quântica. Portanto, a SUSI é uma simetria exata em MQ quando a função de onda que descreve o estado fundamental SUSI estiver associada a energia zero.

## Agradecimentos

ANV agradece ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico Tecnológico (CNPq)* pelo auxílio financeiro parcial. Os autores agradecem também ao Centro de Formação de Profesrores e aos Departamentos de Física do CCEN e CCT da Universidade Federal da Paraíba, pelo apoio. RLR agradece aos Professores Jambunatha Jayaraman ( do DF-CCEN), João Barcelos Neto (do Instituo de Física da UFRJ), Maria Teresa Thomaz (do IF-UFF), Victor Riveles (do IF-USP), Hugo Montani (ex-professor visitante do Instituto de Física da UFRJ), Nathan Berkovits (do IFT-

SP), José Abdalla Helaÿel Neto (do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF) e Pedro Barbosa da Silva Filho do DCEN-UFPB pelas discussões esclarecedoras. Os autores agradecem também ao árbitro deste periódico pelas sugestões e pela oportunidade de se efetuar mais uma revisão deste trabalho.

# References

[1] R. de Lima Rodrigues, *Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger*, Rev. Bras. de Ens. de Física, **19**, N$^{\underline{o}}$1, 68 (1997).

[2] P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129, (1950); P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N. Y.), (1964); A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).

[3] E. Witten, Nucl. Phys. **B185**, 513, (1981); A. A. Andrianov, N. V. Borisov e M. V. Ioffe, Sov. Phys. JETP Lett. **39**, 93, (1984), Phys. Lett. **A105**, 19, (1984).

[4] R. de Lima Rodrigues, *Simetrias Dinâmicas de alguns Sistemas Quânticos*, tese de doutorado defendida no Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 16 de novembro de 1992, sob orientação do Prof. Dr. Arvind Narayan Vaidya. (Nesta tese o leitor poderá encontrar também aplicações da SUSI MQ para o caso relativístico.)

[5] C. A. P. Galvão e C. Teitelboim, J. Math. Phys. **21**, 1863, (1980).

[6] P. Salomonson e J. W. van Holten, Nucl. Phys. **B196**, 509, (1982); F. Cooper e B. Freedman, Ann. Phys. (N. Y.) **146**, 262, (1983); F. Ravndal, *Proc. CERN School of Physics*, (Geneva: CERN) página 300, (1984).

[7] R. de Lima Rodrigues, João Noilton da Costa, Israel Fonseca Neto e A. N. Vaidya, *Supersimetria em Mecânica Clássica: Caso Livre, preprint DF-CCT-UFPB/01/96.* (Trabalho em preparação para ser submetido à publicação em um periódico internacional. Neste preprint o leitor tem uma pré-versão escrica em português.)

[8] M. Bernstein e L. S. Brown, Phys. Rev. Lett. **52**, 1933, (1984); V. A. Kostelecky e M. M. Nieto, Phys. Rev. Lett. **53**, 2285, (1984); Phys. Rev. **A32**

[9] L. Gendenshtein, JETP Lett. **38**, 356, (1983); R. Dutt, A. Khave e U. P. Sukhatme, Am. J. Phys. **56**, 163, (1988).

[10] C. Sukumar, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, L57, 2917, 2937, (1985). (Esta página, 2937, tem um trabalho mostrando a conexão da SUSI com o método de espalhamento inverso.)

[11] R. de Lima Rodrigues, *New potential scalar models via the kink of the $\lambda\phi^4$ theory*, Modern Physics Letters **10A**, 1309, (1995).

[12] J. Barcelos-Neto e Ashok Das, Phys. Rev. **D33**, 2863, (1986); J. Barcelos-Neto, Ashok Das e W. Scherer, Acta Phys. Pol. **B18**, 267, (1987).

[13] R. de Lima Rodrigues, *Alguns estudos sobre a mecânica quântica supersimétrica e a álgebra de Wigner-Heisenberg para sistemas quânticos em conexões com osciladores*, tese de mestrado em física defendida no departamento de Física, UFPB, Campus I, João Pessoa-PB, 29 de agosto de 1988, sob orientação do Prof. Dr. Jambunatha Jayaraman. (Parte desta tese está contida nos dois trabalhos da ref. seguinte.)

[14] J. Jayaraman e R. de Lima Rodrigues, J. Phys. **A**: Math. Gen. **23**, 3123, (1990); J. Jayaraman e R. de Lima Rodrigues, Mod. Phys. Lett. **A9**, 1047, (1994).

[15] C. J. Lee, Phys. Lett. **A145**, 177, (1990); H. A. Schmitt e A. Mufti, Can J. Phys. **68**, 1454, (1990); Yin-Sheng Ling e Wei Zhang, Phys. Lett. **A193**, 47, (1994), para citar alguns .

[16] J. Casahorran e S. Nam, Int. J. Mod. Phys. **A6**, 2729, (1991); A. Jevicki e J. P. Rodrigues, Phys. Lett. **146B**, 55, (1984).

[17] E. Drigo Filho e R. M. Ricota, Mod. Phys. Lett. **A6**, 2137, (1991).

[18] B. TalukdaPhys. **A**: Math. Gen. **25**, 4073, (1992); R. de Lima Rodrigues, proceedings do *XVI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, Caxambu-MG, Brasil, páginas 410-413 (1993).

[19] L. E. Gendenshtein e I. V. Krive, Sov. Phys. Usp **28**, 645, (1985).

[20] A. Lahiri, P. K. Roy e B. Bagchi, Int. J. Mod. Phys. **A5**, 1383, (1990).

[21] Luc Vinet, *Proceeding da V escola de verão Jorge André Swieca, seção Teoria de Campos e Partículas*, página 291, realizada em Campos do Jordão-SP, (1989).

[22] R. W. Haymaker e A. R. P. Rau, Am. J. Phys. **54**, 928, (1986).

[23] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).

[24] F. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).

[25] A. Salam e J. Strathdee, Nucl. Phys., **B76**, 477, (1974); Phys. Rev. **D11**, 1521, (1975).