Sobre o Efeito Aharonov-Bohm

(On the Aharonov-Bohm effect)

J.C. de Mello e M.A. dos Santos
Departamento de Física,
Instituto de Física, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro,
Antiga Rodovia Rio-São Paulo, Km 47, Seropédica
23851-970, Rio de Janeiro - RJ

Trabalho recebido em 3 de setembro de 1996

Entendemos que este trabalho poderá auxiliar os estudantes de graduação em Física quando do estudo da Mecânica Quântica, especialmente em livros ou cursos que focalizem o efeito Aharonov-Bohm.

I. Introdução

Desde a publicação do artigo clássico de Aharonov e Bohm [1], onde o significado dos potenciais eletromagnéticos na Mecânica Quântica é discutido, um grande número de trabalhos tem surgido na literatura [2], e também em livros-texto [3], os quais tratam de vários aspectos relativos a este efeito. Do nosso ponto de vista duas questões essenciais estão envolvidas nestas discussões. Em primeiro lugar, é necessário que se estabeleça a existência ou não do efeito numa situação idealizada (solenóide impenetrável e de comprimento infinito, etc..). Em caso afirmativo, é necessário então, em segundo lugar, verificar se o efeito ocorre apenas em uma situação idealizada. Neste trabalho tratamos principalmente a primeira questão, com o propósito de mostrar a consistência formal do efeito Aharonov-Bohm numa situação idealizada. Na seção II utilizamos uma analogia com uma situação familiar do Eletromagnetismo Clássico que a nosso ver serve para eliminar uma sensação de desconforto que o efeito Aharonov-Bohm tende a gerar nos estudantes de maneira geral, já que os potenciais eletromagnéticos não possuem significado físico na Física Clássica. A seguir, na seção III, através de um resultado bem conhecido da Análise Complexa, esperamos elucidar o aspecto misterioso que envolve o efeito Aharonov-Bohm. Nossas conclusões encontram-se na seção IV.

II. Um argumento clássico

Um aspecto essencial concernente à existência do efeito Aharonov-Bohm numa situação idealizada refere-se a avaliação da integral

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad (1)$$

onde C é um caminho que circula o solenóide (de comprimento infinito e raio R) e o potencial vetor $\vec{A}$ (em coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z) é dado por [4]

$$\left(\frac{\mu_0 n I a^2}{2}\right) \frac{1}{\rho} \hat{e}_\phi \equiv \vec{\nabla}_\chi \; ; \rho > R \qquad (2)$$

$$\vec{A} = \hat{e}_\phi A =$$

$$\left(\frac{\mu_0 n I}{2}\right) \rho \hat{e}_\phi \quad ; \quad \rho < R \qquad (3)$$

onde n é o número de voltas do solenóide e I é a corrente que o percorre.

Se (1) é diferente de zero ou não implica diretamente na existência ou não do efeito na situação idealizada. Bem, pode-se argumentar que o fato de A em (2) ser o gradiente de uma função escalar desde já garante que a integral em (1) se anula. Propomos então que se recorde uma situação do eletromagnetismo clássico familiar a todo estudante de Física Básica e que se encontra a décadas em todos os livros-texto sem ser molestada. Nos referimos a uma ilustração da lei de Ampére onde se calcula o campo magnético produzido por uma corrente elétrica que percorre um fio infinitamente longo. Neste caso a lei de Ampére

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{4}$$

serve para calcular $\vec{B}$, que em coordenadas cilíndricas se escreve

$$\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\right) \hat{e}_\phi \equiv \vec{\nabla}\Lambda \;; \Lambda = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \quad \rho > R \tag{5}$$

$$\vec{B} = \hat{e}_\phi B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\rho\hat{e}_\phi \quad \rho < R \tag{6}$$

Se alguém tem dificuldades em aceitar (4) com $\vec{B}$ dado por (5), certamente dificilmente aceitará a existência do efeito Aharonov-Bohm, ou vice-versa. Realmente, existem dificuldades de ordem prática em se medir o efeito Aharonov-Bohm em laboratório, mas, sabidamente, não é este o caso quando da verificação experimental da lei de Ampére.

III. Um pouco de matemática

O fato peculiar a ser mostrado é que a expressão (1) (ou (4)) não se anula na região onde é calculada, muito embora o campo em (2) (ou (5)) seja o gradiente de uma função escalar. Este resultado ocorre devido a, como veremos, χ (ou Λ) não ser uma função unívoca. Veremos que

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi \tag{7}$$

onde $\Phi = \mu_0 \pi I n a^2$ é o fluxo do campo magnético, como assegura o teorema de Stokes.

As duas situações provêm, de fato, da seguinte expressão familiar da Análise Complexa [3]:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{z} = N \tag{8}$$

onde N é o número de voltas. Separando a parte real e a parte imaginária desta expressão, resulta

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \vec{K} \cdot d\vec{l} = N \tag{9}$$

onde $\vec{K} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{e}_y$ (em coordenadas cartesianas). Como $\vec{\nabla} \times \vec{K} = \vec{O}$ podemos escrever $\vec{K} = \vec{\nabla}\Gamma$ onde, $\Gamma = arctg(y/x)$. A correspondência destas expressões em coordenadas cilíndricas é:

$$\vec{K} = \frac{1}{\rho}\hat{\phi} \tag{10}$$

$$\Gamma = \phi \tag{11}$$

Multiplicando a expressão (9) por $\mu_0 n I a^2/2$ ou $\mu_0 I/2\pi$ (com $N = 1$) temos respectivamente (7) ou (4).

IV. Conclusões

Deve ser observado que o fato de a integral (2) não se anular esta relacionado com a estrutura multiplamente conexa do espaço acessível ao elétron. Isto pode levar a especulação de que este efeito não ocorreria numa situação real, ou seja, com um solenóide finito. Entretanto, experiências realizadas com solenóide toroidal, que é um objeto finito, e simula uma estrutura multiplamente conexa, confirmaram a existência do efeito Ahronov-Bohm [2].

Referências

1. Y. Aharonov e D.Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
2. M. Peshkin e A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm effect*, Lectures Notes in Physics, 340-Springer-Verlag, 1989.
3. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics,* Wiley, New York (1970). R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands,*The Feynman Lectures on Physics,* vol.III: Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass.(1965).
4. A. Shadowitz, *The Electromagnetic Field,* McGraw-Hill Book Company.
5. N. Levinson e Bedheffer, *Complex Variables,* Holden-Day, Inc.