Centro de Massa de Uma Caneca em Rotação com Nível de Líquido Variável

((Center of Mass of a Rotating Can with a Varying Level of Liquid)

José Pedro Rino e Christovam Mendonça
Departamento de Física,
Universidade Federal de São Carlos
Via Washington Luiz, Km 235, 13565-905, São Carlos, SP

Trabalho recebido em 26 de outubro de 1996

Foi determinado o centro de massa de uma caneca girante parcialmente cheia com líquido. Apresenta-se uma discussão relacionando o nível do líquido e a altura mínima do centro de massa para o conjunto em rotação.

The center of mass of a rotating can, partially filled with a liquid, was determined. A discussion relating the level of the liquid and the minimum position of the center of mass for this rotating system is presented.

I. Introdução

A análise de máximos e mínimos de funções e cálculo de centro de massa de corpos são alguns dos tópicos comumente estudados nos cursos introdutórios de física e matemática. A determinação da localização do centro de massa de um sistema não é um problema novo, mas seu estudo propicia a discussão de resultados bastante interessantes e muitas vezes não óbvios.

Neste artigo discutimos a localização do centro de massa de uma caneca cilíndrica parcialmente cheia de líquido, girando com velocidade angular constante em torno de seu eixo vertical. A questão de interesse é: **Para qual nível do líquido a altura do centro de massa do sistema será mínima?**

Quando analisamos o sistema em repouso é facil ver que o centro de massa está situado a meia altura tanto para a caneca totalmente vazia quanto totalmente cheia (a massa da base não é considerada neste problema). Ao se introduzir algum líquido o centro de massa desloca-se inicialmente para baixo, e logicamente passa por um mínimo antes de retornar à meia altura. Demonstra-se que a altura do centro de massa é mínima quando coincide com o nível do líquido [1].

Ao considerar a caneca em rotação chega-se a uma solução análoga a do caso estático: o centro de massa de uma caneca contendo líquido e estando em rotação tem seu centro de massa na altura mais baixa quando o nível do líquido, na condição estática, coincidir com a altura do centro de massa do sistema girante (caneca + líquido).

O sistema e discussão

Na Fig. 1 mostramos a caneca nas duas situações, parada e em rotação. As quantidades de interesse são definidas por:

H_C - altura da caneca

R - raio da caneca

Z_0 - altura da coluna do líquido em repouso

ω - velocidade angular

Z_I - nível inferior do líquido em rotação

Z_S = nível superior do líquido em rotação

M_C - massa da caneca (sem os tampos)

M_L - massa do líquido que enche a caneca

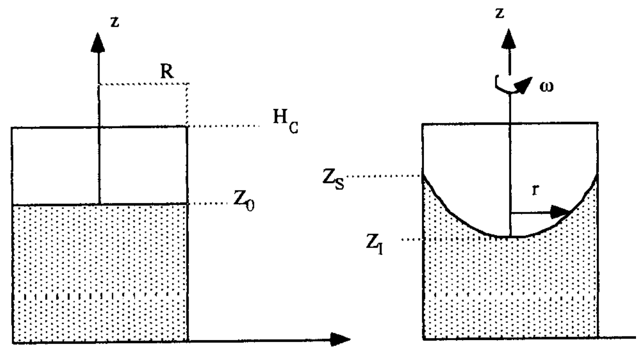

Figura 1. Caneca em (a) repouso e (b) rodando com uma certa quantidade de líquido.

Considerando a densidade do líquido constante e a simetria da distribuição de massa, o centro de massa estará localizado ao longo do eixo vertical na posição dada por

$$C_{Sist.} = \frac{M_C C_C + M_{Z_0} C_L}{M_C + M_{Z_0}} \qquad (1)$$

onde C_C é o centro de massa da caneca vazia, sendo igual a $H_C/2$ quando ignoramos os tampos. C_L é o centro de massa do líquido, o qual será $Z_o/2$ quando não estiver em rotação. M_{Z_0} é a massa de líquido de altura Z_o, de modo que $M_{Z_o} = M_L(Z_0/H_C)$.

Quando a caneca gira uniformemente a superfície do líquido atinge o equilíbrio sob a ação das forças gravitacional e centrífuga (quando visto no sistema de coordenadas girante), resultando para sua seção transversal uma forma parabólica dada por

$$Z(r,\omega) = Z_I + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \qquad (2)$$

onde Z e r são as coordenadas de um ponto na superfície do líquido e g a aceleração da gravidade. Pode-se facilmente mostrar que um parabolóide sólido tem seu volume igual à metade do volume do cilindro reto que o circunscreve, e como o líquido não tem seu volume variado ao entrar em rotação, podemos deduzir as relações

$$Z_S = Z_0 + \omega^2 \frac{R^2}{4g} \qquad (3a)$$

e

$$Z_I = Z_0 - \omega^2 \frac{R^2}{4g}\ , \qquad (3b)$$

que são as posições superior e inferior do nível do líquido quando em rotação (ver Fig.1).

O centro de massa do líquido é dado por

$$C_L = \frac{1}{M_{Z_0}} \int Z' dm = \frac{2}{R^2 Z_0} \int_0^R r' dr \int_0^{Z(\omega)} Z' dZ' \qquad (4)$$

que pode ser diretamente integrado, resultando em

$$C_L = \frac{Z_0}{2} + \frac{\omega^4 R^4}{96 g^2 Z_0} \qquad (5)$$

e após substituição na Eq. (1) obtemos a expressão para o centro de massa de todo sistema (caneca + líquido):

$$C_{Sist.} = \frac{1}{2} \frac{M_C H_C^2 + M_L Z_0^2 + M_L(\omega^4 R^4/48g^2)}{M_C H_C + M_L Z_0} \qquad (6)$$

Introduzindo as grandezas adimensionais $\mu = M_C/M_L$, $x = Z_0/H_C$ e $\Omega^2 = \omega^2 R^2/(4gH_C)$, podemos reescrever a equação acima na forma mais compacta

$$C_{Sist.} = \frac{1}{2} H_C \frac{\mu + x^2 + \Omega^4/3}{\mu + x}. \qquad (7)$$

A fim de se achar o mínimo de $C_{sist.}$ fazemos $(dC_{sist.}/dx) = 0$ para x igual a um valor particular x_{min}, e da expressão resultante extraimos a identidade

$$x_{min} = \frac{1}{2} \frac{\mu + x^2 + \Omega^4/3}{\mu + x}\Big|_{x=x_{min}} \qquad (8)$$

que é equivalente a Eq. (7).

A altura minima Z_0^{min} correspondente é dada pela raiz positiva da Eq. (8)

$$Z_0^{min} = H_C\ x_{min} = H_C\{\sqrt{\mu + \mu^2 + \Omega^4/3} - \mu\}. \qquad (9)$$

A solução estática [1] é obtida se fizermos $\Omega = 0$. A rotação do sistema, no que se refere à localização do centro de massa, somente eleva a posição do seu mínimo.

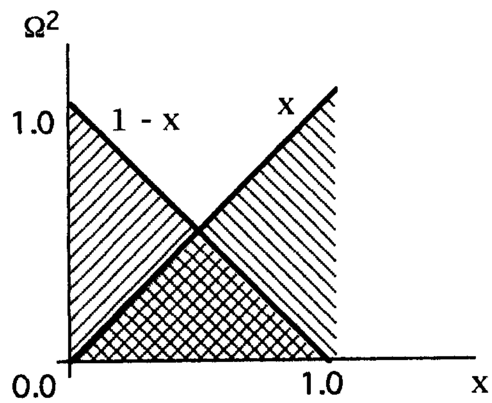

Figura 2. Região de restrição para a velocidade angular baseado nas condições $Z_S \leq H_C$ e $Z_I \geq 0$.

É importante salientar que estes resultados estão limitados para valores de ω tal que o líquido não transborde ($Z_S \leq H_C$) ou que o fundo da caneca não fique visível ($Z_I \geq 0$). Utilizando da Eq. (3), estas condições implicam que ω deverá satisfazer simultaneamente às condições

$$\omega^2 \leq 4gZ_0/R^2 \quad e \quad \omega^2 \leq 4g(H_C - Z_0)/R^2 \qquad (10a)$$

ou em termos das variáveis adimensionais,

$$\Omega^2 \leq x \quad , \quad e \quad \Omega^2 \leq 1 - x \; . \qquad (10b)$$

Na Fig. 2 ilustramos estas restrições: para um dado valor Z_0 para o nível inicial do líquido, a velocidade angular pode ser aumentada somente até o valor tal que $\Omega^2(x)$ esteja dentro da área delimitada pelo triângulo hachurado de quadrados.

O comportamento de $C_{sist.}$ como função de Z_0 para alguns valores dos parâmetros μ e Ω^2 é mostrado na Fig. 3. Somente estão traçados os pontos que satisfazem as restrições da Eq. (10). Pode-se observar que para canecas consideravelmente leves em relação ao líquido que a encheria, a condição do centro de massa mínimo só pode ser realizada com rotações lentas e baixos níveis iniciais de líquido.

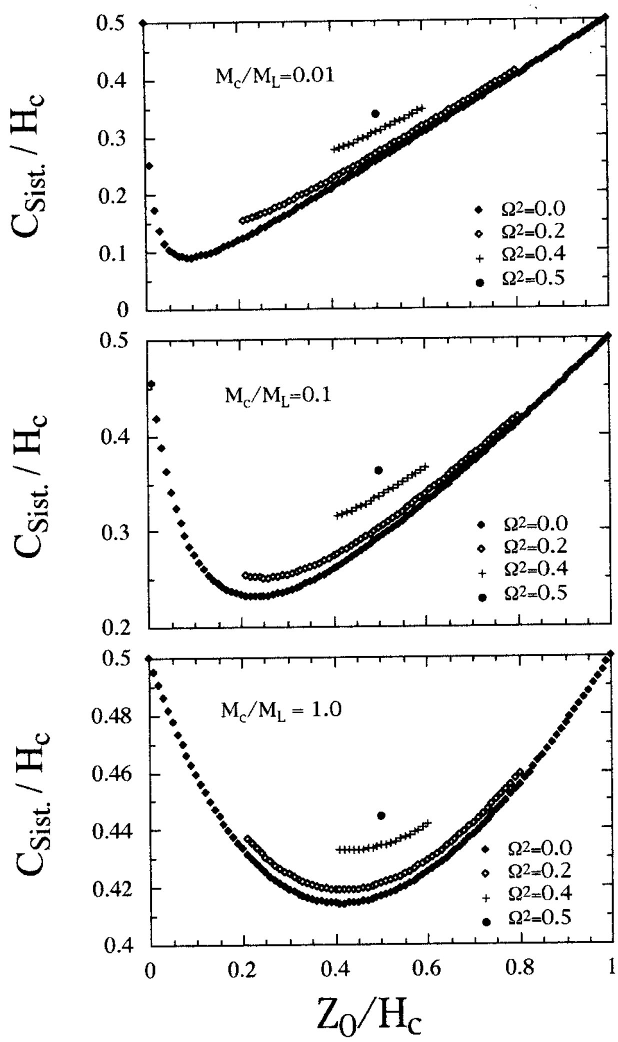

Figura 3. Centro de massa como função da altura do líquido para várias velocidades angulares e (a) $M_C/M_L = 0.01$, (b) $M_C/M_L = 0.1$, e (c) $M_C/M_L = 1.0$.

Referências

1. Marie Baehr, Phys. Teach. **30**, 3436 (1992).