

O Oscilador Linearmente Amortecido

(The damped linearly oscillator)

Janir S. Hickmann

*Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
91509 900 - Campus do Vale, Porto Alegre, RS, Brasil
e-mail: janir@if.ufrgs.br*

Helena Libardi

*Departamento de Física e Química - CCET, Universidade de Caxias do Sul
95001-970 - Rua Francisco Getúlio Vargas 1130, Caxias do Sul, RS, Brasil
e-mail: helena@if.ufrgs.br*

Trabalho recebido em 26 de junho de 1996

Neste trabalho, estudamos o oscilador harmônico amortecido (OHA) admitindo uma força de atrito de contato, que depende somente do sinal da velocidade. Apresentamos a solução deste sistema e uma comparação com a solução do OHA usual.

The damped harmonic oscillator (OHA) with a contact friction force which only depends on the sign of the velocity is studied in this work. We present the solution of this system and a comparison with the usual OHA solution.

I - Introdução

O oscilador harmônico simples (OHS) é abordado nos livros textos de física usados no ciclo básico das universidades^[1] e inclusive em cursos mais avançados^[2], a partir de um sistema massa-mola que desliza sobre uma superfície “ideal” sem atrito. Entretanto, para apresentar o oscilador harmônico amortecido (OHA), é normalmente usado um sistema massa-mola vertical com uma superfície submersa em um fluido ou um pêndulo composto de um fio longo e uma esfera de pequena densidade. Neste caso é suposta uma força viscosa proporcional a velocidade ($f = -b\dot{x}$), embora isto dependa do escoamento ser laminar ou turbulento^[2,3]. Na realidade esta escolha para a força de atrito é feita de modo a se recair em uma equação diferencial linear de solução fácil.

Neste trabalho, será mantido o sistema massa-mola do oHS e admitiremos a existência de uma força de atrito de contato, não viscosa, da forma usualmente definida ao se estudar o coeficiente de atrito. Esta é uma

força que depende apenas do sinal da velocidade e não do seu módulo. Denominaremos este sistema de oscilador linearmente amortecido (OLA), salientando porém que ele também pode ser considerado harmônico. A suposta linearidade ficará mais clara ao se obter a solução do problema. Apresentaremos a solução do OLA que é relativamente simples e se constitui num bom exercício de resolução de equações diferenciais. Também discutiremos a solução obtida e faremos uma comparação com a solução do OHA.

II - Forças no OLA

O OLA, apresentado na fig. 1, está sujeito a duas forças:

a) uma força restauradora dada pela lei de Hooke ($f = -kx$) onde k é a constante elástica da mola e x é o deslocamento medido em relação à posição em que a mola não está esticada ou comprimida;

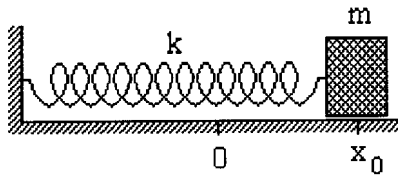


Figura 1: Esquema do sistema massa-mola. - O corpo de massa m , preso a uma mola de constante elástica k , desliza sobre um plano horizontal com atrito. o corpo parte do repouso e está numa posição inicial x_0 .

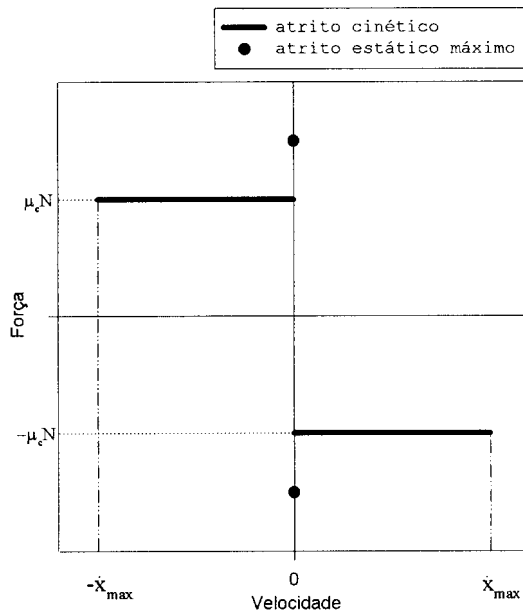


Figura 2: Gráfico da força de atrito em função da velocidade do corpo - A força de atrito, que é independente do valor da velocidade, só dependendo da direção do movimento, tem uma descontinuidade quando a velocidade (\dot{x}) se anula (pontos de retorno). Os dois pontos em $v=0$ indicam o valor máximo e mínimo da força de atrito estático.

b) uma força dissipativa, representada na fig. 2, que é sempre contrária ao movimento do bloco. Esta força tem uma descontinuidade quando a velocidade (\dot{x}) se anula. Para $\dot{x} \neq 0$ o módulo da força de atrito pode ser escrito como:

$$f_a = \mu_c N = \mu_c mg \quad (1)$$

onde μ_c é o coeficiente de atrito cinético e N é a força normal à superfície que, para um plano horizontal, é igual ao peso mg . Para $\dot{x} = 0$, o módulo da força de atrito ainda é dado pela equação (1) desde que a força feita pela mola supere o valor máximo da força de atrito estático $f_{e-max} = \mu_e N$. Estes valores dependem dos coeficientes de atrito cinético μ_c e estático μ_e , que em geral é maior que μ_c , e da força normal.

Como a força de atrito é contrária ao movimento, teremos duas equações distintas para $\dot{x} \neq 0$, dadas pela

2ª lei de Newton $\sum F = m\ddot{x}$:

$$m\ddot{x} + kx = +\mu_c mg \quad \text{se } \dot{x} < 0$$

$$m\ddot{x} + kx = -\mu_c mg \quad \text{se } \dot{x} > 0. \quad (2)$$

Estas são duas equações diferenciais lineares não homogêneas.

III - Solução do OLA

OLA apresenta dois tipos de soluções que dependem das condições iniciais do movimento. Suponha que o sistema satisfaça as seguintes condições iniciais (CI): tenha velocidade inicial nula $\dot{x}(0) = 0$ e esteja em uma posição inicial $\dot{x}(0) = x_0 > 0$ (amplitude inicial), além de satisfazer as condições \dot{x} e x contínuas em todos os instantes, pois as forças atuantes são finitas.

Neste caso, o sistema terá o seguinte comportamento:

a) se, para $\dot{x}(t) = 0$, o módulo da força elástica $|fx|$ for menor que a máxima força de atrito estático $\mu_e mg$, o sistema irá permanecer em repouso;

b) caso $|kx|$ for maior que $\mu_e mg$, o sistema irá oscilar até que a condição (a) seja estabelecida.

No caso em que o sistema não permanece em repouso, a equação de movimento deve satisfazer as equações (2).

Definindo-se $\omega = \sqrt{k/m}$ pode-se reescrever as equações. (2) na forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 = \pm \mu C g \quad (3)$$

onde o sinal (+) corresponde à solução para $\dot{x} < 0$ e o sinal (-) à solução para $\dot{x} > 0$. A solução para uma equação linear não homogênea pode ser obtida da solução da equação homogênea adicionada de uma solução particular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (4)$$

A solução homogênea corresponde a solução do OHS:

$$x_h(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

ou

$$x_h(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (5)$$

onde as constantes C_1 e C_2 ou A e ϕ são obtidas a partir das CI.

A solução particular pode ser obtida por integração^[4] ou por substituição de uma solução tentativa na equação diferencial. Em geral, a solução particular tem um comportamento semelhante ao termo não homogêneo, neste caso uma constante. Supondo $x_p = \pm D$ onde D é uma constante, substituindo na equação (3) obtemos:

$$D = \frac{\mu_c g}{\omega^2} = \frac{\mu_c m g}{k} \quad (6)$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$x(t)^\pm = A^\pm \cos(\omega t + \phi) \pm D \quad (7)$$

onde o índice (+) corresponde a $\dot{x} < 0$ e o índice (-) corresponde a $\dot{x} > 0$. Derivando em relação ao tempo obtemos:

$$\dot{x}(t)^\pm = -\omega A^\pm \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

usando a CI $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \phi = 0$ e a solução será dada por:

$$x(t)^\pm = A^\pm \cos(\omega t) \pm D \quad (9)$$

com a velocidade dada por:

$$\dot{x}(t)^\pm = -\omega A^\pm \sin(\omega t). \quad (10)$$

A mudança da solução (-) para (+) e vice-versa ocorre nos pontos em que $\dot{x} = 0$ (pontos de retorno), ou seja: com

$$\omega t = n\pi \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3... \quad (11)$$

Neste caso, n representa o número de semi-oscilações já completadas e pode ser obtido de:

$$n = \text{int} \left(\frac{\omega t}{\pi} \right) \quad (12)$$

onde int é a parte inteira do número. Lembrando que $\cos(n\pi) = \pm 1$ pode-se rescrever (9) como:

$$x_n(t) = A_n \cos(\omega t) + D \cos(n\pi) \quad (13)$$

onde as soluções $x^+(t)$ correspondem aos n pares e as soluções $x^-(t)$ correspondem aos n ímpares. Os A_n serão obtidos usando a CI $x(0) = x_0$ e a continuidade da função $x(t)$ nos pontos de retorno, como segue:

$$x_0(0) = x_0 = A_0 + D \Rightarrow A_0 = x_0 - D$$

$$\begin{aligned} x_0 \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = x_1 \left(\frac{\pi}{\omega} \right) &= \Rightarrow -A_0 + D = -A_1 - D \\ &\Rightarrow A_1 = x_0 - 3D \\ x_1 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = x_2 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) &= \Rightarrow -A_1 + D = -A_2 - D \\ &\Rightarrow A_2 = x_0 - 5D \\ x_2 \left(\frac{3\pi}{\omega} \right) = x_3 \left(\frac{3\pi}{\omega} \right) &= \Rightarrow -A_2 + D = -A_3 - D \\ &\Rightarrow A_3 = x_0 - 7D \\ &\vdots \\ A_n = x_0 - (2n + 1)D \quad n = 0, 1, 2... & \quad (14) \end{aligned}$$

Em resumo, podemos expressar a posição, velocidade e aceleração do OLA pelas seguintes equações:

$$x(t) = [x_0 - (2n + 1)D] \cos(\omega t) + D \cos(n\pi) \quad (15)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega [x_0 - (2n + 1)D] \sin(\omega t) \quad (16)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 [x_0 - (2n + 1)D] \cos(\omega t) \quad (17)$$

com

$$n = \text{int} \left(\frac{\omega t}{\pi} \right) = 0, 1, 2...$$

Nas figuras 3, 4 e 5, estão representadas a posição, velocidade e aceleração do OLA para o caso em que $\omega = 10$ rad/s, $\mu_c = 0,15$, $\mu_e = 0,25$ e $x_0 = 15D$. Estes gráficos estão normalizados em relação a amplitude

máxima e em relação ao período de oscilação. Nestes gráficos, podemos notar que a posição e a velocidade são contínuas embora a modulação da amplitude (linha pontilhada) não seja, e que a aceleração tem uma descontinuidade de $2\omega^2 D$ ou $2\mu_c g$ nos pontos de retorno. Esta descontinuidade se deve à mudança no sentido da força de atrito nestes pontos. Também notamos que suas amplitudes decrescem linearmente com o tempo, o que justifica o nome OLA.

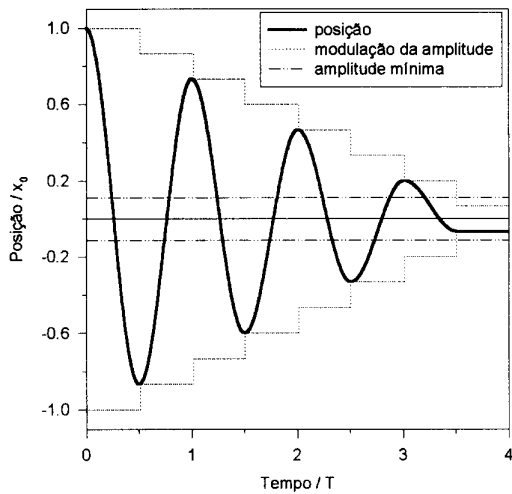


Figura 3. Gráfico da Posição x Tempo do OLA - A linha contínua representa a oscilação do corpo, que se mantém até que a força feita pela mola em um ponto de retorno seja menor que a força de atrito estático máxima. A linha -.- delimita a região onde o corpo para de oscilar. A linha pontilhada representa a modulação da amplitude de oscilação que tem uma descontinuidade de $2D$ em cada ponto de retorno do corpo.

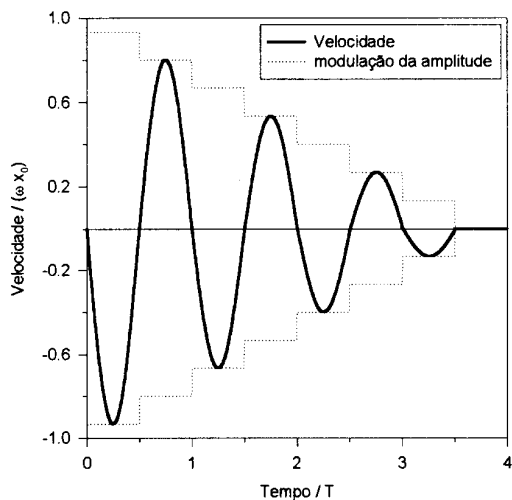


Figura 4: Gráfico da Velocidade x Tempo do OLA - Podemos notar que a velocidade máxima em cada semi-ciclo decresce linearmente com o tempo, tem a forma senoidal e a mudança de amplitude ocorre nos pontos em que a velocidade é nula.

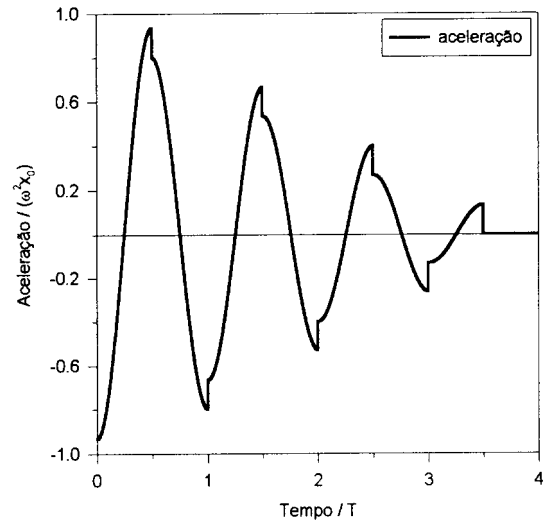


Figura 5: Gráfico da Aceleração x Tempo do OLA - Note que a amplitude da aceleração decresce linearmente em cada semi-ciclo e sofre uma descontinuidade de $2\omega^2 D$ ou $2\mu_c g$ em cada ponto de retorno.

IV - Comparação da solução do OLA com a do OHA

O OHA, sujeito a uma força de atrito $f = -b\dot{x}$, é descrito pela equação diferencial:

$$\ddot{+}2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (18)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ corresponde a frequência angular do OHS e $\beta = b/2m$ é o fator de amortecimento. A solução desta equação está bem explicada nas referências^[2,5] e, para o caso de amortecimento subcrítico, pode ser escrita como:

$$x(t) = Ae^{\beta t} \cos(\omega t + \phi) \quad (19)$$

onde

$$\omega = [1 - (\beta/\omega_0)^2]^{1/2} \quad (20)$$

Usaremos esta solução para comparação com a solução do OLA. Podemos destacar as seguintes diferenças entre o OHA e o OLA:

a) **Número de soluções:** o OHA apresenta três tipos de solução além da trivial, que são os casos: sub-amortecido; super-amortecido e amortecimento crítico; enquanto que o OLA apresenta uma única solução, dada pela equação (15).

b) **Frequência angular:** A frequência angular do OHA depende do fator de amortecimento, conforme a

equação (20), enquanto o OLA tem frequência fixa independente do amortecimento.

c) **Amplitude da oscilação:** o OHA tem uma amplitude de oscilação que decresce exponencialmente no tempo, conforme a equação (19) e o sistema permanece oscilando eternamente, com a amplitude tendendo a zero. No caso do OLA, a amplitude decresce linearmente no tempo, considerando a linha que une os pontos de retorno, e o sistema tem um número de oscilações finito. A interrupção do movimento oscilatório se dá sempre em um ponto de retorno, quando a velocidade é nula. Isto só ocorrerá com amplitude zero, se a amplitude inicial x_0 corresponder a um múltiplo de $2D$.

V - Montagem experimental

Os dados usados na obtenção dos gráficos das figuras 3, 4 e 5 são realistas e uma frequência angular $\omega = 10$ rad/s implica em um período de oscilação $T \cong 0,63$ s e um coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0,15$ implica num fator $D \cong 0,015$ m e $x_0 \cong 0,22$ m. Nestas circunstâncias o sistema apresenta apenas 3,5 oscilações em um tempo de 2,2 s, o que torna difícil a obtenção das medidas de amplitude em função do tempo. Contudo, não é possível reduzir substancialmente o valor de ω pois isto acarreta num aumento de D , conforme a equação (6), que por sua vez provoca um aumento da amplitude inicial x_0 provocando dificuldades na obtenção de uma mola adequada.

As soluções sugeridas para a dificuldade de observação do movimento são as seguintes:

a) fazer a observação usando uma câmera de vídeo.

b) usar um plano inclinado, o que provoca uma redução do fator D e um conseqüente aumento do número de oscilações para um mesmo valor de x_0 . Neste caso a solução do OLA será a mesma, com a constante D dada por:

$$D = \frac{\mu_0 g \cos(\theta)}{\omega^2} = \frac{\mu_c m g \cos(\theta)}{k} \quad (21)$$

onde θ é o ângulo de inclinação do plano em relação à horizontal.

VI - Conclusões

Apresentamos a solução de um oscilador amortecido em que a força dissipativa depende apenas do sinal de velocidade e não de seu módulo. Este sistema pode ser montado facilmente em laboratório, consistindo em uma alternativa viável ao OHA tradicional.

Foram comparadas a solução do sistema proposto com a do sistema tradicional, enfatizando as principais diferenças.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Vitor Hugo Guimarães que, além de suas excelentes aulas, pela primeira vez propôs o problema aqui apresentado.

Referências bibliográficas

1. a) D. HALLIDAY e R. RESNICK, *Fundamentos de Física*, vol. 2, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1991. b) P. TIPLER, *Física*, vol. 2, 3a ed., Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1991.
2. J. B. MARION, *Classical Dynamics*, 2a ed., Academic Press, New York, 1965.
3. R. W. FOX e A. T. Mc DONALD, *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, 2a ed., Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.
4. M. R. SPIEGEL, *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática*, 2a ed., Makron, São Paulo, 1992.
5. A. S. CASTRO, Cad. Cat. Ens. Fís., v. 8, n. 2, p. 137-143, 1991.