

# A Dedução das Transformações de Lorentz em 1905

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

*Estrada de São Francisco, 1668, apto. 14, bloco 2*

*06765-000, Taboão da Serra, SP*

*aluno de graduação do IFUSP*

Trabalho recebido em 15 de abril de 1994

Expõe-se criticamente a dedução das transformações de Lorentz feita por Einstein em 1905. As transformações de Lorentz são deduzidas seguindo-se um método parecido com o de Einstein.

## I. Introdução

EINSTEIN (1905), em seu artigo sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, deduziu da cinemática as transformações de Lorentz usando o princípio da constância da velocidade da luz e aplicou-as na interpretação de alguns fenômenos (efeito Doppler, aberração da luz, pressão de radiação), dando origem à Teoria da Relatividade. Assim, fundamentando-as teoricamente, foram retiradas da mera artificialidade estas transformações que 13 anos antes LORENTZ (1892) começou a buscar. LORENTZ (1904) obteve a forma final das suas transformações no ano que antecedeu ao artigo de Einstein, e existiram controvérsias sobre o fato de Einstein conhecer ou não estas transformações em 1905. Em VILLANI (1981) cita-se que E. Whittaker e W. Pauli acreditavam que o trabalho de Einstein era uma continuidade das teorias de Lorentz e Poincaré sobre o éter e o elétron, enquanto G. Holton e G. Battimelli disseram que Einstein não conhecia o trabalho de Lorentz do ano de 1904, sendo esta a opinião hoje aceita; a primeira delas pode ser considerada “anti-histórica”, ou seja, uma violência à história. Foi VOIGT (1887), entretanto, 18 anos antes de Einstein, o primeiro a considerar a variação do tempo em transformações de coordenadas, ao estudar o efeito Doppler.

Independentemente do fato de Einstein ter tido ou não conhecimento prévio das transformações de Lorentz, ou de que soubesse na época da existência de transformações lineares nas quais o tempo não era o mesmo em outro sistema inercial de coordenadas, o que se pretende mostrar aqui é que a dedução feita por ele

em 1905 das transformações de Lorentz não foi uma boa dedução, porque introduziu desnecessariamente uma equação diferencial parcial, derivando em relação a valores considerados infinitamente pequenos, cometeu um erro de mudança de variáveis na sua “teoria de transformação das coordenadas e do tempo na passagem de um sistema em repouso para outro que está animado em relação ao primeiro de uma translação uniforme” (§3 do original alemão, página 900) e deu uma definição inadequada para sincronismo de relógios. Não fosse isso, o tratamento que deu à dependência entre posição e tempo também foi inadequado, o que tentará se mostrar na seção IV, embora possa ser este um assunto sem novidades e exaustivamente discutido.

Na seção II será mostrado que a solução linear da primeira equação da teoria de Einstein, uma equação funcional para o tempo relativístico, poderia ser encontrada de maneira mais simples e rigorosa que a utilizada por ele, a derivação de uma equação diferencial parcial linear e de primeira ordem equivalente à equação funcional para comprimentos infinitamente pequenos.

Na seção III será mostrado como Einstein chegou às transformações de Lorentz a partir da solução encontrada para o tempo relativístico e na seção IV será mostrado que deve ser considerado como um postulado que estas transformações valham para tempos e posições independentes entre si, conforme a dedução analisada.

A seção V provará que Einstein realmente cometeu um erro em seu artigo sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento e na seção VI serão deduzidas as transformações de Lorentz através de um raciocínio parecido com o de Einstein, mas sem utilizar mudança

de variáveis.

A seção VII analisará a definição de sincronismo dada por Einstein e a seção VIII trará algumas referências sobre outras maneiras de se deduzirem as transformações de Lorentz, concluindo-se o presente trabalho.

## II. A dedução do tempo relativístico

Einstein, no §3 do seu artigo sobre corpos em movimento, definiu um sistema fixo  $K$  ( $K$  maiúsculo) de coordenadas cartesianas onde cada acontecimento era determinado completamente neste sistema através da coordenada de posição  $(x, y, z)$  e instante  $t$ , correspondendo à coordenada de posição  $(\xi, \eta, \zeta)$  e instante  $\tau$  num outro sistema cartesiano  $k$  ( $k$  minúsculo) animado de velocidade constante  $v$  ( $v$  minúsculo) no sentido do  $x$  crescente. Os eixos  $X$  dos dois sistemas eram coincidentes e os eixos  $Y$  e  $Z$  eram respectivamente paralelos (“Die  $X$ - Achsen beider Systeme mögen zusammenfallen, ihre  $Y$ - und  $Z$ -Achsen bezüglich parallel sein”).

Introduziu régua e relógios rigorosamente idênticos em ambos os sistemas (uma régua por sistema) e pôs-se o problema de encontrar o conjunto das equações que

ligam entre si as posições e instantes medidos por  $K$  e  $k$ . Todos os relógios de cada sistema estavam sincronizados inicialmente, de acordo com a convenção adotada.

Supôs que no instante  $\tau_0$  era emitida pela origem das coordenadas do sistema  $k$  em movimento uma partícula (raio) de luz sobre o eixo  $X$  que percorria uma distância  $x'$  (em relação à origem do sistema em movimento  $k$ , mas medida com a régua do sistema fixo  $K$ , tal que  $x' = x - vt$ ) e atingia um determinado ponto (ponto imóvel em relação ao sistema móvel, ponto móvel em relação ao sistema fixo), refletia-se nesse ponto no instante  $\tau_1$  e regressava à origem das coordenadas do sistema  $k$  em movimento no instante  $\tau_2$ . Então teria-se

$$1/2(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1, \quad (1)$$

já que, em relação a esse referencial, a duração  $\Delta\tau_{01}$  de ida da partícula,  $\Delta\tau_{01} = \tau_1 - \tau_0$ , deve ser igual à duração  $\Delta\tau_{12}$  de volta,  $\Delta\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1$ , em conformidade com o sincronismo dos relógios.

Inserindo argumentos na função  $\tau$  e aplicando o princípio da constância da velocidade  $V$  ( $V$  maiúsculo) da luz medida no sistema em repouso obteve a primeira equação da Teoria da Relatividade, a equação funcional

$$1/2[\tau(0, 0, 0, t) + \tau(0, 0, 0, \{t + x'/(V - v) + x'/(V + v)\})] = \tau(x', 0, 0, t + x'/(V - v)), \quad (2)$$

de incógnita  $\tau(x', 0, 0, t)$ .

A fim de resolver esta equação tomou  $x'$  infinitamente pequeno (“unendlich klein”), expandiu  $\tau(x', 0, 0, t)$  em uma série de Taylor, desprezou os termos de ordem superior a 1 e chegou à equação diferencial parcial linear e de primeira ordem

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(V - v)} + \frac{1}{(V + v)} \right] \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + 1/(V - v) \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

ou

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + v/(V^2 - v^2) \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

a segunda equação da Teoria da Relatividade. Einstein diz que esta equação deve ser válida para todos os valores de  $x', y, z$ , já que, em vez da origem das coordenadas, poderia-se ter tomado qualquer outro ponto para ponto de partida da luz.

Aplicou um raciocínio “análogo” aos eixos dos  $\eta$  e  $\zeta$  e obteve, tendo em conta que a luz, observada do sistema em repouso, se propaga “sempre” com velocidade constante  $((V^2 - v^2)^{1/2})$  ao longo desses eixos,

$$\partial \tau / \partial y = 0; \quad (4.1)$$

$$\partial \tau / \partial z = 0. \quad (4.2)$$

É claro que observada do sistema em repouso a luz também se propaga com velocidade constante ( $V$ ) ao longo do eixo dos  $\xi$ , quando emitida sobre ele, contudo,  $\partial \tau / \partial x' \neq 0$  e  $\partial \tau / \partial x \neq 0$ .

Admitindo ser  $\tau$  uma função linear, devido às propriedades de homogeneidade que se atribui ao espaço e ao tempo, encontrou por solução,

$$\tau = a[t - vx'/(V^2 - v^2)], \quad (5)$$

onde  $a$  era uma função desconhecida da velocidade  $v$  do sistema em movimento, e supôs que no ponto origem de  $k$  (onde  $x' = 0$ ) é  $t = 0$  para  $\tau = 0$ .

Embora (5) seja, de fato, solução de (3) e de (2), a restrição de ser  $x'$  infinitamente pequeno não pode ser aceita, já que se admite o uso dessa teoria para quaisquer distâncias. Por outro lado, a restrição de ser  $x'$  infinitamente pequeno retirou deste argumento o status de variável, que pode assumir qualquer valor, proibindo derivações em relação a  $x'$ . Isso invalidaria todo o raciocínio de Einstein sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, não fosse seu objetivo de encontrar uma solução linear para o sistema de equações.

A solução (5) pode ser encontrada diretamente a partir de (2), e em conformidade com as equações (4), impondo-se que  $\tau$  seja da forma  $\tau = At + Bx' + C$ , onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes do movimento, ou seja, uma função linear, e assim a restrição de ser  $x'$  infinitamente pequeno pode ser desprezada, bem como a equação (3), e (5) passa a ser válida para qualquer valor de  $x'$  (exceto se razões de ordem física impedissem tal liberdade, mas nem o artigo de Einstein, nem a ciência atual, apontam tais razões). Basta aplicar a citada forma de  $\tau$  em (2) para obtermos  $B = -Av/(V^2 - v^2)$ , e  $A$  passa a ser a nossa constante a determinar. Como se supôs que  $\tau(x' = 0, t = 0) = 0$  então  $C = 0$ .

Mesmo levando-se em consideração que Einstein disse que a equação (3) deve ser válida para todos os valores de  $x', y, z$  a explicação dada por ele não assegura a validade da passagem do infinitamente pequeno para o intervalo dos números reais. Foi dito apenas que em vez da origem das coordenadas (do sistema  $k$ ) poderia-se ter tomado qualquer outro ponto para ponto de partida da luz, ou seja, se tivéssemos

$$\tau_0 = \tau(x'_0, y'_0, z'_0, t);$$

$$\tau_1 = \tau(x'_0 + x', y'_0, z'_0, t + x'/(V - v));$$

$$\tau_2 = t(x'_0, y'_0, z'_0, \{t + x'/(V - v) + x'/(V + v)\});$$

a equação (3) obtida a partir de (1) independeria do valor de  $(x'_0, y'_0, z'_0)$ , o ponto de partida do raio de luz, o que pode ser provado facilmente, mas ainda levando-se em consideração que  $x'$  é pequeno.

A inutilidade da equação (3) provavelmente foi percebida por SHAMOS (1987) pois ele, ao fazer uma tradução comentada dos primeiros parágrafos do “Zur Elektrodynamik Bewegter Körper” (EINSTEIN, 1905), não mencionou esta equação em sua tradução.

Nota-se em (2) que a partícula de luz, numa situação idealizada, tem uma aceleração de magnitude infinita em  $\tau_1$ , alterando sua velocidade de  $V$  para  $-V$  num intervalo de tempo  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , mesmo na ausência de substâncias perfeitamente refletoras, e não sofre interferência com outras partículas de luz. O valor  $x'$  usado em  $\tau_2$  não corresponde ao argumento  $x'$  de  $\tau_2$ , que é igual a zero, mas corresponde ao argumento  $x'$  de  $\tau_1$ , e assim seria possível supôr que (5) não é solução de (2).

### III. As transformações de Lorentz

Utilizando (5) e de considerações adicionais Einstein deduziu suas leis de transformações. Seguindo seu pensamento, para um raio de luz emitido no instante  $\tau = 0$  no sentido de  $\xi$  crescente, tem-se

$$\xi = V\tau = aV[t - vx'/(V^2 - v^2)], \quad (6)$$

de acordo com o princípio da constância da velocidade da luz em combinação com o princípio da relatividade, definidos por ele (conforme definições atuais, bastaria apenas o princípio da constância da velocidade da luz para justificar o uso de (6); em 1905 esse princípio dizia respeito somente à constância da velocidade da luz medida no sistema “em repouso”).

Como o raio de luz em relação ao ponto origem de  $k$  se move com a velocidade  $V - v$ , medida no sistema em repouso, tem-se

$$x'/(V - v) = t. \quad (7)$$

Nota-se que aqui  $x'$  e  $t$  mantém uma dependência linear (já que  $\xi$  e  $\tau$  também mantêm), com  $t(x' = 0) = 0$ , contrariando os significados originais de  $x'$  e  $t$ , compatíveis com a equação funcional (2).

Introduzindo este valor de  $t$  na equação (6) para  $\xi$  vem

$$\xi = aV^2x'/(V^2 - v^2). \quad (8)$$

De modo análogo, considerando raios de luz que se movam ao longo dos outros dois eixos, encontra-se

$$\eta = V\tau = aV[t - vx'/(V^2 - v^2)],$$

sendo

$$y/(V^2 - v^2)^{1/2} = t; x' = 0;$$

e por isso,

$$\eta = aVy/(V^2 - v^2)^{1/2};$$

$$\zeta = aVz/(V^2 - v^2)^{1/2}.$$

Aqui  $y$  e  $t$  e  $z$  e  $t$  também são dependentes, com  $y/t = z/t \leq V$ .

Substituindo, em (5) e (8),  $x'$  pelo seu valor como função de  $x$ ,

$$x' = x - vt,$$

obtém-se equações de transformação para  $\tau$  e  $\xi$ . Expressando  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  em termos de  $\beta = 1/[1 - v^2/V^2]^{1/2}$  chega-se a

$$\tau = \varphi(v)\beta(t - vx/V^2); \quad (9.1)$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt); \quad (9.2)$$

$$\eta = \varphi(v)y; \quad (9.3)$$

$$\zeta = \varphi(v)z; \quad (9.4)$$

para  $\varphi(v) = a\beta$ . Einstein nos lembra que se não se fizer qualquer suposição sobre a posição inicial do sistema móvel e sobre a origem adotada para a medição de  $t$  haverá que se escrever no segundo membro de cada uma dessas equações uma constante aditiva.

Introduzindo um terceiro sistema de coordenadas,  $K'$ , que se move sobre o eixo  $\Xi$ , suporte dos  $\xi$ , com velocidade  $-v$  em relação à origem de  $k$  e cujos eixos são coincidentes aos de  $K$  e  $k$  em  $t = 0$  e aplicando duas vezes as equações de transformação para relacionar as grandezas medidas em  $K'$ ,  $k$  e  $K$  obtém-se das equações (9)

$$t' = \varphi(-v)\beta\{\tau + v\xi/V^2\} = \varphi(v)\varphi(-v)t; \quad (10.1)$$

$$x' = \varphi(-v)\beta\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x; \quad (10.2)$$

$$y' = \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y; \quad (10.3)$$

$$z' = \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)\zeta; \quad (10.4)$$

onde  $t', x', y', z'$  são o tempo e as coordenadas de posição medidas em  $K'$ .

Visto serem independentes do tempo as transformações entre  $K'$  e  $K$  estão estes sistemas em repouso um em relação ao outro, e são idênticos, donde

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1,$$

e chega-se a

$$\varphi(v) = \varphi(-v),$$

da evidência de que não depende do sentido do movimento sobre o eixo dos  $x$  o comprimento de uma haste medido no sistema em repouso, quando disposta paralelamente ao eixo dos  $y$ , e então se conclui que deve ser

$$\varphi(v) = 1,$$

i.e.,  $a = 1/\beta$ . O caso  $\varphi(v) = -1$  é excluído, e assim  $y$  e  $\eta$  e  $z$  e  $\zeta$  têm o mesmo sinal.

As transformações (9) ficam, finalmente,

$$\tau = \beta(t - vx/V^2); \quad (11.1)$$

$$\xi = \beta(x - vt); \quad (11.2)$$

$$\eta = y; \quad (11.3)$$

$$\zeta = z; \quad (11.4)$$

que são as transformações de Lorentz, anotadas na página 902 do *Annalen der Physik*.

Se fosse utilizado  $\varphi(v) = a$ , seguindo-se o que parece sugerido na página 899 do artigo alemão (“wobei a eine vorläufig unbekante Funktion  $\varphi(v)$ ”), encontraria-se  $\varphi(v) = 1/\beta$ , excluindo-se novamente a solução negativa, e seriam as mesmas as transformações assim obtidas. Os segundos membros das segundas igualdades de cada uma das equações (10) foram obtidos introduzindo-se os valores dados em (9) nos respectivos primeiros membros destas igualdades.

Nota-se que embora tenha-se suposto apenas que os eixos  $X$  dos dois sistemas eram coincidentes e que os eixos  $Y$  e  $Z$  eram respectivamente paralelos, permitindo-nos concluir que inicialmente as origens dos dois sistemas poderiam estar distanciadas arbitrariamente, os cálculos usados obrigam que todos os eixos sejam respectivamente coincidentes em  $t = 0$ . Somente assim vale sempre a relação  $x' = x - vt$ .

#### IV. A dependência entre posição e tempo

Viu-se que na equação (6) para  $\xi = V\tau$  fez-se  $t = x'/(V - v)$  e, após esta substituição, usou-se  $x' = x - vt$ , encontrando-se então a equação (9.2) para  $\xi$ , com  $\varphi(v) = a\beta$ . Se  $t = x'/(V - v)$  então a igualdade  $x' = x - vt$  é válida apenas para  $x = Vt$ , i.e., apenas para os pontos onde se encontra a partícula de luz, isto desde que a partícula não tenha sofrido a reflexão usada na equação funcional (2). Assegura-se, assim, que para  $\xi = V\tau$  tenha-se sempre  $x = Vt$ , conforme o princípio da constância da velocidade da luz.

De acordo com a dedução de Einstein, deve ser considerado como um postulado que as transformações de Lorentz valham para valores de  $x$  e  $t$  independentes entre si, já que durante parte dessa dedução usa-se a dependência entre  $\xi$  e  $\tau$  e entre  $x$  e  $t$ , através da velocidade  $V$  da luz, mas a seguir tal dependência deixa de ser usada, sem esclarecimentos ao leitor. Vejamos quais seriam as expressões para  $\tau$  e  $\xi$  se mantivéssemos em sua demonstração esta dependência.

Fazendo  $x' = x - vt$  em (5), sem criticar a maneira como foi obtida, vem

$$\tau = a\beta^2(t - vx/V^2). \quad (12)$$

Para  $\xi = V\tau$  e  $x = Vt$  tem-se

$$\xi = V\tau = a\beta^2(Vt - vx/V) = a\beta^2(x - vt) = a\beta^2 x', \quad (13)$$

conforme a equação (8) obtida por Einstein, validando-se assim o uso da igualdade  $x = Vt$ . Continuando, usando novamente o fato de ser  $x = Vt$ , ou seja, desprezando-se o postulado que agora teria sido introduzido implicitamente de que posição e tempo são independentes, (12) e (13) ficam

$$\tau = aVt/(V + v); \quad (14.1)$$

$$\xi = V\tau = aV^2t/(V + v). \quad (14.2)$$

O valor de  $a \equiv a(v)$  pode ser obtido a partir da inversa de (14.1), exigindo-se que  $t$  e  $\tau$  sejam simétricos em relação à velocidade  $v$ . Assim,

$$t = (V + v)/V \times 1/a(v) \times \tau = a(-v) \times V/(V - v) \times \tau,$$

donde

$$a(v)a(-v) = 1 - v^2/V^2.$$

Se o sistema em movimento e (inicialmente) a partícula de luz se movem no sentido decrescente dos  $x$  deve-se ter

$$\tau(-v, -V, t) = \tau(v, V, t);$$

$$\xi(-v, -V, t) = -\xi(v, V, t);$$

donde

$$a(v) = a(-v),$$

e então

$$a(v) = \pm(1 - v^2/V^2)^{1/2} = \pm 1/\beta.$$

Como deve ser  $\tau > 0$  e  $\xi > 0$  para  $v > 0$  e  $V > 0$  então  $a(v) = 1/\beta \geq 0$ , conforme o valor encontrado para as transformações de Lorentz, e assim as equações (14) ficam

$$\tau = [(V - v)/(V + v)]^{1/2}t; \quad (15.1)$$

$$\xi = [(V - v)/(V + v)]^{1/2}Vt; \quad (15.2)$$

sendo  $v = -V$  a velocidade que tornará  $\tau$  e  $\xi$  infinitamente grandes (indicando que após a reflexão usada na equação funcional (2) a partícula de luz jamais alcançará novamente a origem do sistema em movimento). Para  $v = V$  tem-se  $\tau = \xi = 0$  (indicando que a partícula de luz permanece na origem do sistema em movimento, não havendo a reflexão mencionada) e para velocidades  $v$  pequenas em valor absoluto, comparadas com o valor absoluto da velocidade da luz, tem-se  $\tau \cong t$  e  $\xi \cong Vt$ . No caso geral, para  $V$  positivo ou negativo, se  $v > 0$  então  $\tau < t$ , e se  $v < 0$  então  $\tau > t$ . Os valores de  $\tau$  e  $\xi$  serão reais para  $-|V| \leq v \leq |V|$ .

Como era de se esperar, as equações (15) podem ser obtidas diretamente das transformações de Lorentz (11.1) e (11.2) fazendo  $x = Vt$ .

Outra análise pode ser feita para as variáveis  $y$  e  $z$ . Se a luz é emitida ao longo do eixo  $Y$  móvel (onde  $x' = 0$ ) desde a origem e no sentido crescente de  $\eta$  então a equação horária do seu movimento é  $\eta = V\tau = aVy/(V^2 - v^2)^{1/2} = a\beta y$ , conforme visto na seção III. Usou-se o fato de que a luz, observada de qualquer ponto do sistema em repouso, tem componente de velocidade ao longo do eixo  $Y$  fixo igual a  $(V^2 - v^2)^{1/2}$ .

Como  $a = 1/\beta$ , valor obtido, por exemplo, nas transformações (11.1) e (11.2) para  $\tau$  e  $\xi$ , respectivamente, então  $\eta = y$ , conforme (11.3). Mas deve-se lembrar que tal dedução usou a restrição de ser  $x' = 0$ , i.e.,  $x = vt$ , e portanto é válida apenas para os pontos do plano que contém a origem do sistema móvel e é paralelo ao plano  $yz$ . Nada se pode dizer sobre a relação entre  $\eta$  e  $y$  das coordenadas espaço-temporais  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  e  $(x, y, z, t)$  se  $x \neq vt$ ; a dedução apresentada limitou-se ao eixo  $Y$  móvel apenas, e não a qualquer eixo paralelo a ele. Crítica idêntica pode ser feita para a dependência entre  $z$ ,  $x$  e  $t$ . Uma demonstração mais completa das transformações de Lorentz (11.3) e (11.4) é dada na seção VI.

## V. O erro de Einstein

Por menos rigoroso que tenha sido o raciocínio de Einstein mostrado até aqui, há um erro ainda não mostrado e que compromete a sua tentativa de deduzir teoricamente as transformações de Lorentz. Primeiramente, está claro que os argumentos de  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  nas equações de transformação (11) são  $x, y, z$  e  $t$ , pois era isso que Einstein se propôs a resolver, i.e., encontrar um sistema de equações que ligam entre si as posições e instantes medidos por  $K$ , o sistema fixo, nas variáveis  $(x, y, z, t)$ , e  $k$ , o sistema móvel, nas variáveis  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ .

Quando da passagem de (5) para (9.1) usando-se  $x' = x - vt$  e  $\varphi(v) = a\beta$  não se transformou corretamente os argumentos da função  $\tau(x', y, z, t)$ , pois do lado esquerdo da igualdade (5) substituiu-se implicitamente  $x'$  por  $x$ , mas do lado direito usou-se  $x' = x - vt$ , o que é matematicamente reprovável. Para esta delicada questão sobre composição de funções pode-se consultar, v.g., OSTROWSKI (1981, p.228).

Se  $\tau(x', y, z, t) = a[t - vx'/(V^2 - v^2)]$ , conforme (5) e para que  $\tau$  seja solução de (2), então, obviamente,

$$\tau(x, y, z, t) = a[t - vx/(V^2 - v^2)], \quad (16)$$

sendo a uma função da velocidade  $v$  do sistema móvel, mas não das coordenadas de posição ou do tempo.

É necessário, para que a solução final dada por Einstein para a função  $\tau$  esteja correta, encontrar um outro valor para a que só dependa de  $v$  e tal que

$$\tau(x, y, z, t) = \beta(t - vx/V^2), \quad (17)$$

conforme a transformação de Lorentz (11.1) para o tempo.

Igualando (16) e (17) obtemos

$$a = 1/\beta \times (V^2t - vx)/(V^2t - vx - v^2t),$$

ou seja, o valor encontrado para  $a$  não é uma função independente das coordenadas de posição e do tempo, contrariando o que era necessário, e, portanto, Einstein realmente cometeu um erro na dedução das transformações de Lorentz em 1905.

## VI. Dedução alternativa das transformações de Lorentz

Vamos agora deduzir as transformações de Lorentz sem usar a variável  $x'$ . Poderíamos continuar a demonstração de Einstein de maneira bem rápida definindo uma variável  $T = T(x, y, z, t)$  tal que  $T(x, y, z, t) = \tau(x - vt, y, z, t)$ , mas, numa tentativa de auxiliar na compreensão destas transformações, optou-se por uma nova demonstração.

Identifiquemos a seguinte sucessão de eventos:

1) no ponto  $(x_0, 0, 0)$  e no instante  $t_0$  é emitido um raio (partícula) de luz ao longo do eixo  $X$ , indo em direção a um ponto  $P$ . A origem do sistema móvel é coincidente com o ponto de emissão da luz no instante  $t_0$ . O sistema móvel e o raio de luz tomam a direção do eixo  $X$  no sentido crescente dos  $x$ .

2) no instante  $t_1$  a luz atinge o ponto  $P$  na posição  $x_1$ , após percorrer uma distância total  $L$ , muda instantaneamente o sentido de seu movimento e vai em direção à origem do sistema em movimento. Suponhamos a existência de espelhos perfeitamente refletivos em  $P$ .

3) a luz atinge a origem do sistema em movimento no instante  $t_2$  e na posição  $x_2$ . Os valores para  $t_0, t_1, t_2, L, x_0, x_1$  e  $x_2$  foram medidos em relação ao sistema fixo.

É fácil ver que  $x_1 = x_0 + L$  e  $t_1 = t_0 + L/c$ . Do instante  $t_0$  até o instante  $t_1$  a origem do sistema móvel se deslocou de  $x_0$  para  $x_0 + vL/c$ . Resolvendo um simples problema de “encontro de 2 móveis” se obtém  $x_2 = x_0 + 2vL/(c + v)$  e  $t_2 = t_0 + 2L/(c + v)$ . Aqui se usou  $c$  para indicar a velocidade da luz e  $v$  para a velocidade do sistema móvel em relação ao sistema fixo.

Se  $\tau(x, y, z, t)$  mede o instante observado na origem do sistema móvel em que ocorreu um determinado evento na posição  $(x, y, z)$  e instante  $t$ , medidos pelo sistema fixo, então, de acordo com o princípio da constância da velocidade da luz,

$$\tau(x_1, 0, 0, t_1) = 1/2[\tau(x_0, 0, 0, t_0) + \tau(x_2, 0, 0, t_2)],$$

donde, para  $\tau(x, 0, 0, t) = At + Bx + C$ , sendo  $A, B$  e  $C$  constantes do movimento, obtém-se  $B = -Av/c^2$  e

$$\tau(x, 0, 0, t) = A(t - vx/c^2) + C.$$

Supondo que  $\tau(x = 0, t = 0) = 0$  então  $C = 0$ .

Vamos agora obter a expressão geral relativística para a coordenada das abscissas,  $\xi$ .

Como o raio de luz parte da origem do sistema em movimento no instante  $t_0$  e retorna a este mesmo ponto no instante  $t_2$  então

$$\xi(x_0, 0, 0, t_0) = \xi(x_2, 0, 0, t_2),$$

donde, para  $\xi(x, 0, 0, t) = Dt + Ex + F$ , sendo  $D, E$  e  $F$  constantes do movimento, obtém-se  $D = -Ev$  e

$$\xi(x, 0, 0, t) = E(x - vt) + F.$$

Supondo que  $\xi(x = 0, t = 0) = 0$  então  $F = 0$ .

Vamos agora determinar a relação entre  $E$  e  $A$ .

Para o movimento da luz no sentido crescente do eixo  $X$  desde  $x = 0$  e a partir do instante  $t = 0$  devemos ter  $\xi = ct$  e  $x = ct$ . Assim,

$$Et(c - v) = cA(t - vt/c),$$

donde  $E = A$ .

Vamos agora, finalmente, obter o valor de  $A$ .

Em relação ao sistema móvel é o sistema fixo que se move com velocidade  $-v$ . Sendo assim,

$$t(\xi, 0, 0, t) = A(\tau + v\xi/c^2);$$

$$x(\xi, 0, 0, \tau) = A(\xi + v\tau).$$

Resolvendo o sistema acima, sabendo-se que

$$\tau = A(t - vx/c^2);$$

$$\xi = A(x - vt);$$

e que para  $x > vt$  devemos ter  $\xi > 0$ , obtemos

$$A = 1/[1 - v^2/c^2]^{1/2},$$

que é o valor de  $\beta$  nas transformações de Lorentz.

Se no instante  $t_0$  ao invés do ponto  $(x_0, 0, 0)$  o raio de luz parte de um ponto genérico  $(x_0, y_0, z_0)$  e segue sua trajetória paralelamente ao eixo  $X$  chega-se às expressões

$$\tau(x, y, z, t) = \beta(t - vx/c^2);$$

$$\xi(x, y, z, t) = \beta(x - vt);$$

supondo-se que todo evento no plano  $x = 0$  ocorre na posição  $\xi = 0$  e instante  $\tau = 0$  para  $t = 0$ .

O princípio da constância da velocidade da luz é satisfeito, pois verifica-se

$$(\xi_1 - \xi_0)/(\tau_1 - \tau_0) = c;$$

$$(\xi_2 - \xi_1)/(\tau_2 - \tau_1) = -c;$$

para  $\xi_i = \xi(x_i, y, z, t_i)$  e  $\tau_i = t(x_i, y, z, t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Tal verificação torna-se importante pois em nossa demonstração o raio de luz partiu do sistema fixo.

Para obtermos o conjunto completo das transformações de Lorentz precisamos ainda obter as expressões para a ordenada  $\eta$  e a cota  $\zeta$ .

Identifiquemos a seguinte sucessão de eventos:

1) no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e instante  $t_0$  é emitido um raio de luz paralelamente ao eixo  $Y$  fixo, no sentido crescente desse eixo.

2) no instante  $t_1$ , após percorrer uma distância total  $h$ , a luz muda instantaneamente o sentido de seu movimento, indo em direção ao ponto de partida. Suponhamos a existência de espelhos perfeitamente refletivos no ponto de inversão do sentido do movimento.

3) a luz chega ao ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  no instante  $t_2$ .

Os valores para  $t_0, t_1, t_2, h, x_0, y_0$  e  $z_0$  foram medidos em relação ao sistema fixo, e o sistema móvel, como anteriormente, segue a direção do eixo  $X$  com velocidade  $v$  em relação ao sistema fixo.

Façamos

$$\eta_0 = \eta(x_0, y_0, z_0, t_0);$$

$$\eta_1 = \eta(x_0, y_0 + h, z_0, t_0 + h/c);$$

$$\eta_2 = \eta(x_0, y_0, z_0, t_0 + 2h/c);$$

com  $\eta(x, y, z, t) = Ft + Gx + Hy + Iz + J$ , sendo  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$  e  $J$  constantes do movimento.

$\eta_0$  e  $\eta_2$  são as ordenadas dos pontos de emissão e de chegada, respectivamente, do raio (partícula) de luz, em relação ao sistema móvel, e  $\eta_1$  a ordenada do ponto, em relação a esse mesmo sistema, em que a luz muda instantaneamente o sentido de seu movimento.

Como  $\partial\tau/\partial y = 0$ , conforme (17), e, conseqüentemente,  $\partial t/\partial\eta = 0$  então  $\partial\eta/\partial t = 0$ , donde  $F = 0$ .

Sabendo-se que  $\partial\xi/\partial y = 0$  e  $\partial x/\partial\eta = 0$  então também teremos  $\partial y/\partial\xi = 0$  e  $\partial\eta/\partial x = 0$ , donde  $G = 0$ .

Supondo-se  $\eta(0, 0, 0, 0) = 0$  e  $\eta(0, 0, z, 0) = 0$  obtém-se  $J = 0$  e  $I = 0$ .

Resta-nos obter o valor de  $H$ .

Para o observador no centro do sistema em movimento o trajeto da luz obedece a seguinte equação,

$$(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 = c^2(\tau_1 - \tau_0)^2, \quad (18)$$

ou, equivalentemente,

$$(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 = c^2(\tau_2 - \tau_1)^2, \quad (19)$$

para

$$\xi_0 = \xi(x_0, y_0, z_0, t_0);$$

$$\xi_1 = \xi(x_0, y_0 + h, z_0, t_0 + h/c);$$

$$\xi_2 = \xi(x_0, y_0, z_0, t_0 + 2h/c);$$

e

$$\tau_0 = \tau(x_0, y_0, z_0, t_0);$$

$$\tau_1 = \tau(x_0, y_0 + h, z_0, t_0 + h/c);$$

$$\tau_2 = \tau(x_0, y_0, z_0, t_0 + 2h/c).$$

Resolvendo uma das duas equações anteriores, (18) ou (19), obtemos  $h^2 = H^2 h^2$ , donde  $H = \pm 1$ . Escolhe-se  $H = +1$  para que  $y$  e  $\eta$  tenham o mesmo sinal. Finalmente,

$$\eta(x, y, z, t) = y.$$

Repetindo-se o raciocínio anterior para a variável  $\zeta$  obtém-se

$$\zeta(x, y, z, t) = z,$$

e assim foram obtidas todas as equações das transformações de Lorentz.

## VII. Sincronismo de relógios

No §1 do artigo em estudo, onde se definiu simultaneidade, define-se tempo e sincronismo. Parece que Einstein opta pela visão em detrimento de todas as outras formas de percepção, já que apenas a luz é levada em consideração em suas definições. Sabe-se, v.g., que a velocidade do som também é independente da velocidade da fonte, entretanto, nada é mencionado sobre a audição ou a velocidade do som em seu artigo.

Para descrever o *movimento* de um ponto material Einstein disse que basta dar o valor das suas coordenadas em função do tempo, sendo todas as nossas apreciações em que intervém o tempo baseadas em *acontecimentos simultâneos*. Quando se diz, v.g., “aquele comboio chega aqui as 7 horas” significa-se “a indicação 7 dada pelo ponteiro pequeno do meu relógio e a chegada do comboio são acontecimentos simultâneos”.

As dificuldades da definição do tempo no lugar onde se encontra um relógio podem ser eliminadas se em vez do tempo dissesse-se “posição do ponteiro pequeno do meu relógio” (Einstein, certamente, não conhecia os modernos relógios atuais, digitais, com 3 ponteiros e cronômetro). Tal definição, não obstante, não basta quando se pretende estabelecer uma relação temporal entre séries de acontecimentos que se desenrolam em lugares diversos, i.e., quando se trata de localizar no tempo acontecimentos que se produzem longe do relógio.

Uma ordenação temporal dos acontecimentos, feita por meio de um observador colocado na origem das coordenadas, munido de um relógio e que receberia os sinais luminosos enviados através do espaço vazio por cada um desses acontecimentos, ordenando-os segundo as indicações dadas pelo relógio à chegada dos respectivos sinais, tem a desvantagem de não ser independente da localização do observador. Percebe-se aqui que não se pretendia dar ao tempo uma definição que dependesse de posições, entretanto, as transformações de Lorentz mostram justamente o contrário.

Um processo de determinação do tempo mais prático, segundo Einstein, pode ser o seguinte: se num ponto A do espaço estiver situado um relógio torna-se possível para um observador alocalizado determinar

temporalmente os acontecimentos da vizinhança imediata de  $A$  recorrendo às posições do ponteiro desse relógio que sejam simultâneos a tais acontecimentos. Assim é determinado um “tempo  $A$ ”, ou, como usado aqui, instante  $\tau_A$ .

Façamos agora com que dois observadores distintos,  $A$  e  $B$ , munidos de relógios de idêntico e bom funcionamento estejam em repouso um em relação ao outro. Se um raio de luz parte de  $A$  no instante  $\tau_A$ , medido pelo relógio de  $A$ , chega em  $B$  no instante  $\tau_B$ , medido pelo relógio de  $B$ , reflete-se neste instante indo em direção a  $A$  e chega a  $A$  no instante  $\tau'_A$ , medido pelo relógio de  $A$ , então os relógios de  $A$  e  $B$  estarão síncronos, segundo Einstein, se

$$(\tau_A + \tau'_A)/2 = \tau_B. \quad (20)$$

Isto é bastante claro se  $A$  e  $B$  estão fixos em relação à Terra, considerada em repouso, pois o tempo que a luz leva para ir de  $A$  até  $B$  é o mesmo que a luz leva para ir de  $B$  até  $A$ . Neste caso, é óbvio que os relógios de  $A$  e  $B$  devem marcar o mesmo horário, em qualquer instante.

Passamos, assim, a ter um “tempo” comum a  $A$  e  $B$ . “Tempo” de um acontecimento (medido num sistema considerado em repouso) será então a indicação simultânea desse acontecimento que é fornecida por um relógio que satisfaz às seguintes condições: está colocado em repouso, no local do acontecimento; é síncrono de um outro relógio em repouso, mantendo-se esse sincronismo em todas as determinações do tempo.

Introduzamos a seguir nossos observadores  $A$  e  $B$  fixos um em relação ao outro, mas movendo-se com velocidade constante  $v$  em relação à Terra, considerada fixa e suficientemente plana na região do movimento. Cada um possui um relógio (ou cronômetro) e seus relógios possuem idêntico e bom funcionamento. Suponhamos que nossos observadores e relógios sejam pontuais, para que o movimento dos braços e corpos de  $A$  e  $B$  não interfira no funcionamento dos relógios, nem perca-se a condição de imobilidade relativa.

Em relação à Terra a equação horária de  $A$  é  $x = x_A + vt$  e a equação horária de  $B$  é  $x = x_B + vt$ , com  $x_B > x_A$ .  $x_A$  e  $x_B$  são a posição inicial de  $A$  e  $B$ , respectivamente, quando  $t = 0$ .

Aplicando estas equações na transformação de Lo-

rentz (11.1) obtemos

$$\tau_A = t/\beta - \beta v x_A/c^2; \quad (21.1)$$

$$\tau_B = t/\beta - \beta v x_B/c^2. \quad (21.2)$$

$\tau_A$  indica o tempo (ou instante) marcado no relógio de  $A$  e  $\tau_B$  o tempo (ou instante) marcado no relógio de  $B$ .

Nota-se claramente que os relógios de  $A$  e  $B$  não são síncronos. Ambos mantêm a mesma “marcha”, dada por  $t/\beta$ , mantém sempre a mesma distância um do outro (igual a  $\beta(x_B - x_A)$  (contração do espaço)), mas  $\tau_A > \tau_B$  para qualquer valor de  $t$ , inclusive para  $t = 0$ , pois  $x_B > x_A$ . Ou seja, o relógio de  $A$  está adiantado em relação ao de  $B$ , tal que  $\tau_A - \tau_B = \beta v(x_B - x_A)/c^2 > 0$ , e, conforme a Teoria da Relatividade Restrita, ambos os relógios têm uma marcha mais lenta que a de um relógio fixo na Terra (dilatação do tempo).

Vamos verificar agora que, segundo a definição de Einstein,  $A$  e  $B$  têm relógios síncronos. Façamos um raio de luz partir no instante  $t = 0$  de  $A$ , na posição  $x = x_A$ , e ir em direção a  $B$ . Então, seguindo a notação dada em (20), a expressão (21.1) fica

$$\tau_A = -\beta v x_A/c^2 \quad (22)$$

(suponhamos que relógios e cronômetros podem marcar tempos negativos). Conforme visto, o relógio de  $B$  não marcará para o evento “início do movimento” o mesmo horário que o de  $A$ , embora ambos tenham começado a se mover ao mesmo tempo.

Precisamos agora calcular a posição inicial de  $B$  para obter o valor de  $\tau_B$ . Se  $x_B$  é a posição inicial de  $B$  então  $x_B + vt = x_A + ct$ , ou seja,  $x_B = x_A + (c - v)t$ , sendo  $t$  o tempo que a luz levou para ir de  $A$  até  $B$ . Se, em relação à Terra fixa, a distância de  $A$  até  $B$  é  $L$  então  $t = L/c$ , donde  $x_B = x_A + (c - v)L/c$ . Sendo assim, seguindo a notação dada em (20), a expressão (21.2) fica

$$\tau_B = L/(\beta c) - \beta v[x_A + (c - v)L/c]/c^2. \quad (23)$$

Resta-nos calcular o valor de  $\tau'_A$ . Quando a luz atingiu  $B$  o observador  $A$  estava na posição  $x_A + vL/c$  e  $B$  estava na posição  $x_A + L$ , ambas medidas em relação à Terra fixa. Resolvendo um simples problema de “encontro de 2 móveis” obtemos para o instante de encontro da luz e do observador  $A$  o valor  $t = 2L/(c + v)$ .

Seguindo a notação dada em (20), a expressão (21.1) fica

$$\tau'_A = 2L/[\beta(c+v)] - \beta vx_A/c^2. \quad (24)$$

Usando (22), (23) e (24) em (20) verifica-se que a relação é satisfeita, ou seja, relógios notadamente não síncronos (que não marcam o mesmo horário a qualquer instante) podem obedecer a definição de sincronismo dada por Einstein. Obviamente, deve-se concluir que a sua definição de sincronismo é inadequada para a dedução analisada.

### VIII. Comentários finais e conclusão

Claro que há ainda outras deduções alternativas para as transformações de Lorentz, e um trabalho sobre o assunto pode ser encontrado em LUCAS, HODGSON (1990, p.151-186), no qual 22 outras maneiras são esquematizadas em quadros e comentadas, incluindo-se aí a que Einstein fez em 1922, da invariância da forma quadrática  $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$  (EINSTEIN, 1922). Conforme citado em RON (1985), dentre outras possibilidades há derivações puramente eletromagnéticas (v.g., FOCK, 1959), puramente mecânicas (LEWIS, TOLMAN, 1909) e baseadas na propagação da luz (v.g., MILNE, 1935). O próprio Einstein mencionou em nota de rodapé no seu §3 que “*as equações da transformação de Lorentz deduzem-se diretamente, com mais simplicidade, a partir da condição de que, por virtude delas, a relação  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - V^2 \tau^2 = 0$  deve implicar esta outra:  $x^2 + y^2 + z^2 - V^2 t^2 = 0$* ”. Em LOPES (1992, p.622-628) há uma prova assim.

Da exposição feita conclui-se que a dedução das transformações de Lorentz em 1905 não foi boa porque:

- 1) introduziu desnecessariamente uma equação diferencial parcial, derivando em relação a valores considerados infinitamente pequenos;
- 2) não deixou claro quando posição e tempo são independentes;
- 3) cometeu um erro de mudança de variáveis;
- 4) utilizou-se de uma definição inadequada para sincronismo de relógios.

É evidente que o artigo de Einstein é tremendamente complicado, de difícil análise, pois rompeu com as noções mais familiares de tempo e espaço. Entretanto, se tudo o que foi exposto por ele a respeito de

tempo e espaço (posição) estivesse correto não poderia ocorrer o erro descrito na seção V do presente artigo, nem o fato de que relógios em movimento não síncronos sejam síncronos conforme a sua definição. Vê-se daqui as dificuldades em se aceitar o raciocínio de Einstein.

### Agradecimentos

Ao professor A.F.R. de Toledo Piza, do Instituto de Física da USP, por ter mostrado que (5) também é solução de (2), e não apenas de (3), como supus inicialmente.

### Referências bibliográficas

- EINSTEIN, A. 1905, *Zur Elektrodynamik Bewegter Körper*, Annalen der Physik, 17, 891-921.
- EINSTEIN, A. 1922, *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie*, p.21.
- FOCK, V.A. 1959, *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Oxford: Pergamon Press.
- LEWIS, G.N., TOLMAN, R.C., Phil.Mag., **18**, 510-523 (1909).
- LOPES, J.L. 1992, *A Estrutura Quântica da Matéria*. Rio de Janeiro: editora da U.F.R.J.
- LORENTZ, H.A., La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Arch. Néerl., **25**, 363 (1892).
- LORENTZ, H.A., Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity less than that of Light, Proc. Roy. Acad. Sc. Amsterdam, **6**, 809 (1904).
- LUCAS, J.R., HODGSON, P.E. 1990, *Spacetime & Electromagnetism*. Oxford: Clarendon Press.
- MILNE, E.A. 1935, *Relativity, Gravitation and World Structure*. Oxford: Oxford University Press.
- OSTROWSKI, A. 1981, *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, 4a.edição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- RON, J.M.S. 1985, *El origen y desarrollo de la relatividad*, 2a.edição. Madrid: Alianza Universidad.
- SHAMOS, M.H. (ed.) 1987, *Great Experiments in Physics*. New York: Dover Publications, Inc.
- VILLANI, A. 1981, *Confronto Einstein-Lorentz e suas interpretações*, publicação IFUSP.
- VOIGT, W. 1887, *Über das Dopplersche Prinzip*, *Göttinger Nachrichten*, p.41.