

## O Modelo da Dilatação Térmica e os Erros Sistemáticos

Jürgen W. Precker e Wilton P. da Silva

*Departamento de Física*

*Centro de Ciências e Tecnologia*

*Universidade Federal da Paraíba*

*58109-970, Campina Grande, PB, Brasil*

Trabalho recebido em 8 de maio de 1996

Quaisquer dados experimentais estão sujeitos a erros, comumente divididos em sistemáticos e estatísticos. Comparando dados experimentais com previsões teóricas, nós precisamos saber de alguma coisa sobre as exatidões de ambos. Neste artigo, discutimos um erro sistemático cometido pelo uso de expressões lineares descrevendo a dilatação térmica. Num primeiro exemplo, mostramos que o uso impróprio das fórmulas da dilatação térmica implica numa perda contínua de massa devido a uma variação cíclica de temperatura; num segundo exemplo, o erro sistemático leva a uma previsão falsa do comportamento de um gás ideal, violando a lei dos gases ideais.

### Abstract

Any experimental data are subject to errors, commonly divided into systematic and statistical ones. Comparing experimental data with theoretical predictions, we need to know something about the accuracies of both. In this paper, we discuss a systematic error committed by the use of linear expressions describing thermal expansion. In a first example, we show that an improper use of the formulae of thermal expansion results in a continuous loss of mass due to a cyclic variation of temperature; in a second example, the systematic error leads to a wrong prediction of the behaviour of an ideal gas, violating the ideal gas law.

### I. Introdução

Em um experimento, os dados e os resultados experimentais podem ser afetados por erros de causas diversas, que são classificados<sup>[1]</sup> como grosseiros, estatísticos e sistemáticos.

Os erros grosseiros são causados pela imperícia ou displicência do experimentador. Como exemplos, podemos citar enganos de leituras, erros na calibração de instrumentos, erros de contas, etc. Esses erros não são admissíveis e devem ser totalmente eliminados.

Os erros estatísticos são aqueles que tanto variam para mais quanto para menos, de uma medida para outra, mesmo quando estas são realizadas em condições similares. Estes erros são ligados à precisão dos instrumentos ou a modificações instantâneas nas condições

de leitura e, em geral, obedecem a leis estatísticas bem determinadas.

Os erros sistemáticos são aqueles que sempre ocorrem num mesmo sentido e são ligados à exatidão dos instrumentos ou à utilização inapropriada de procedimentos experimentais ou de conceitos físicos.

Este artigo discute um erro sistemático introduzido pela utilização inapropriada de um conceito físico: a fórmula de dilatação, dada na maioria dos textos de física básica, aplicada a um processo sucessivo de aquecimento e resfriamento de um corpo, à pressão constante. Muito embora o tema possa ter sido objeto de algumas discussões no passado, até hoje os textos de física básica não tratam desse assunto em seus conteúdos.

## II. Definição do coeficiente de dilatação térmica

Em geral, observamos que quando a temperatura de um corpo se eleva, o corpo se expande. A partir de resultados experimentais acerca desse fenômeno, podemos definir o coeficiente de dilatação volumar médio  $\bar{\beta}$  como sendo a variação relativa do volume do corpo por unidade da elevação de temperatura. Assim, à pressão constante, definimos<sup>[2]</sup>:

$$\bar{\beta} = \Delta V / (V_0 \Delta T) \quad (1)$$

onde  $\Delta T$  é a elevação de temperatura e  $\Delta V = (V - V_0)$  é o aumento do volume do corpo, sendo  $V_0$  o volume inicial.

Podemos utilizar a definição dada na Eq.(1) para expressar o volume  $V$  de um corpo com volume inicial  $V_0$ , numa temperatura  $T_0$ , e que sofreu um aumento  $\Delta T$  de temperatura:

$$V = V_0(1 + \bar{\beta}\Delta T) . \quad (2)$$

Essa é uma fórmula bastante comum nos textos de física básica e é utilizada para resolver os problemas de dilatação dos sólidos ( $\bar{\beta}$  da ordem de  $10^{-6} \text{K}^{-1}$ ), geralmente de forma satisfatória. Vamos aplicá-la também a um problema específico, envolvendo um líquido para o qual  $\bar{\beta}$  é da ordem de  $10^{-3} \text{K}^{-1}$ .

## III. Um problema proposto e a solução dada pela equação (2)

Vejamos como a equação (2) se aplica ao problema que consiste na determinação do volume de um corpo, submetido a variações sucessivas de temperatura entre o dia e a noite, e também entre a noite e o dia. Para simplificar a discussão, vamos supor que essas variações tenham o mesmo módulo  $|\Delta T|$ . De acordo com a equação (2), podemos resolver o problema da forma apresentada a seguir.

Do dia para noite, teremos uma diminuição no volume do corpo, dado por:

$$V = V_0(1 - \bar{\beta}|\Delta T|) . \quad (3)$$

Da noite para o dia, o corpo se expande e a expressão (3) passa a ser o volume inicial no processo de aquecimento. Assim, ao final do primeiro dia, teremos:

$$V = V_0(1 - \bar{\beta}|\Delta T|) \cdot (1 + \bar{\beta}|\Delta T|),$$

ou

$$V = V_0[1 - (\bar{\beta}\Delta T)^2]. \quad (4)$$

Aplicando o mesmo raciocínio sucessivamente e generalizando para  $n$  dias, teremos:

$$V = V_0[1 - (\bar{\beta} \cdot \Delta T)^2]^n, \quad (5)$$

Veja que a expressão (5), que é resultado da aplicação sucessiva da equação (2), nos conduz a um absurdo: com o passar dos dias, o volume do corpo vai, sistematicamente, diminuindo.

Como  $|\bar{\beta}\Delta T| \ll 1$ , é óbvio que, para  $n$  pequeno, uma aplicação numérica da equação (5) não detecta claramente esse absurdo e a fórmula (2) funciona bem apesar de não obedecer às leis de conservação. Entretanto, à medida que  $n$  aumenta, fica bem evidente, numa aplicação numérica, um erro sistemático associado à expressão (2). Apenas como exemplo, observe que se um certo volume de acetona ( $\bar{\beta} = 1,5 \times 10^{-3} \text{K}^{-1}$  entre 15 e 30°C) for armazenado durante 1 ano, sofrendo variações diárias de 15°C de temperatura, chegaria, ao final desse ano, com apenas 83,1% de seu volume original. Isso, sem dúvida, evidencia um erro sistemático grave embutido na fórmula em questão.

Um problema com a fórmula (2) reside na verificação experimental de que o coeficiente de expansão volumar depende da temperatura. No sentido de incluir essa dependência, a expressão (2) é então dada da seguinte forma<sup>[3]</sup>:

$$V = V_0 \left( 1 + \int_{T_0}^T \beta dT \right) . \quad (6)$$

Apesar dessa expressão incluir a dependência do coeficiente de expansão com a temperatura, podemos verificar facilmente que a falha do erro sistemático da equação (2), evidenciado nas equações (4) e (5), permanece. Em vista disso, vamos discutir um outro modelo para a dilatação volumar, mais consistente com as observações experimentais e com as leis de conservação.

## IV. Um outro modelo para a dilatação térmica

Na verdade, de forma geral, podemos verificar que o limite de validade da expressão (1) deve se restringir aos casos em que a variação de temperatura tende

a zero:  $\Delta T \rightarrow 0$ . Então, uma melhor definição para  $\beta$  deve ser dada através da seguinte expressão<sup>[4]</sup>:

$$\beta = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} [\Delta V / (V \Delta T)],$$

ou

$$\beta = (1/V)(dV/dT). \quad (7)$$

Apesar de alguns autores<sup>[4]</sup> definirem o coeficiente de expansão volumar através da equação (7), terminam por fazer uma equivalência desta com a equação (1), o que leva ao resultado da expressão (2) que, conforme vimos, embute um erro sistemático. No sentido de eliminar este erro, podemos desenvolver o raciocínio a seguir.

Da equação (7), podemos escrever

$$dV/V = \beta dT.$$

Integrando a última expressão, com os limites de integração do primeiro membro indo de  $V_0$  a  $V$ , correspondendo a uma variação de temperatura no segundo membro de  $T_0$  a  $T$ , obteremos:

$$\ln(V/V_0) = \int_{T_0}^T \beta dT. \quad (8)$$

Devemos observar que a integral do segundo membro da equação (8) pode ser dada por

$$\int_{T_0}^T \beta dT = \bar{\beta}' \Delta T \quad (9)$$

onde  $\bar{\beta}'$  é definido como o coeficiente de expansão volumar médio entre  $T_0$  e  $T$ . Assim, a equação (8) nos conduz à seguinte expressão:

$$V = V_0 \exp(\bar{\beta}' \Delta T), \quad (10)$$

onde  $\bar{\beta}'$  foi definido na equação (9).

A equação (10) não implica em erros sistemáticos como aqueles discutidos em III, onde utilizamos a equação (2) e obtivemos o resultado dado pela equação (5). Isso nós podemos perceber claramente através de uma elevação e de um rebaixamento da temperatura de um corpo, em  $|\Delta T|$  graus. Em consequência da elevação de tempetura, o novo volume do corpo será dado conforme (10):

$$V = V_0 \exp(\bar{\beta}' |\Delta T|).$$

Ao resfriá-lo até a temperatura original, o novo volume inicial é dado pela expressão anterior. Então, teremos:

$$V = [V_0 \exp(\bar{\beta}' |\Delta T|)] \cdot \exp(-\bar{\beta}' |\Delta T|)$$

ou

$$V = V_0,$$

o que é o resultado esperado.

Podemos observar que a fórmula (10), expandida, pode ser escrita assim:

$$V = V_0 [1 + \bar{\beta}' \Delta T + (1/2) \cdot (\bar{\beta}' \Delta T)^2 + (1/6) \cdot (\bar{\beta}' \Delta T)^3 + \dots].$$

Então, para casos não cíclicos envolvendo sólidos e líquidos, devemos lembrar que  $|\bar{\beta}' \Delta T| \ll 1$  e que, portanto, os termos a partir da segunda ordem podem ser desprezados. Nesses casos, a equação (10) se reduz a equação (6), com a integral do segundo membro resultando em  $\bar{\beta}' \Delta T$ , conforme vimos na equação (9).

É interessante aplicar a equação (6) (que é a equação (2) “melhorada”) aos gases ideais para evidenciar o erro sistemático abordado neste artigo. Suponha um gás ideal numa temperatura  $T_0$ , aquecido isobaricamente até à temperatura  $T$ . Substituindo a equação de estado dos gases ideais na equação (7), o coeficiente de expansão volumar é <sup>[2]</sup>:

$$\beta = (1/T) \quad (11)$$

Substituindo esse coeficiente de expansão em (6), percebemos que o volume final a ser encontrado num processo de aquecimento é dado por

$$V = V_0 [1 + \ln(T/T_0)]$$

que é diferente daquele que seria obtido diretamente pela equação de estado:

$$V = V_0 (T/T_0).$$

E mais: no resfriamento, também nos deparamos com a violação das leis de conservação:

$$V = V_0 [1 + \ln(T/T_0)] [1 + \ln(T_0/T)]$$

ou

$$V = V_0 \{1 - [\ln(T/T_0)]^2\}.$$

Novamente, a definição de  $\beta$  dada na equação (1), e que leva a equação (6), falha. Vejamos então como o modelo discutido nesse artigo resolve o problema da dilatação dos gases a pressão constante.

Substituindo a expressão (11) em (9), encontraremos o coeficiente de expansão volumar médio para o gás ideal entre  $T_0$  e  $T$ :

$$\bar{\beta}' = (1/\Delta T) \ln(T/T_0).$$

Substituindo a expressão obtida para  $\bar{\beta}'$  na equação (10), teremos

$$V = V_0 \exp[(1/\Delta T) \ln(T/T_0)\Delta T],$$

o que nos dá

$$V = V_0(T/T_0).$$

Veja que este é um resultado idêntico àquele que seria obtido se utilizássemos a equação de estado para gases ideais aplicada a um processo isobárico. Novamente, o modelo para a dilatação dado pela equação (10) é coerente com as leis de conservação e não introduz erros sistemáticos nos resultados obtidos. A propósito, ao ser resfriado de  $T$  para  $T_0$ , o volume final ocupado pelo gás será:

$$V = [V_0(T/T_0)] \exp[(1/\Delta T) \ln(T_0/T)\Delta T],$$

o que resulta em  $V = V_0$ , que é o resultado esperado.

## V. Conclusões

Desse estudo, concluímos que a definição de  $\bar{\beta}$  dada pela equação (1) introduz um erro sistemático na equação (2) por considerar diferenças finitas para as variações de  $T$  e de  $V$ . Este erro, num processo de aquecimento e resfriamento, é facilmente detectado através das expressões (4) e (5).

Na equação (6), o cálculo de  $\bar{\beta}'$  é mediado através de diferenças infinitesimais de temperatura mas a diferença no volume é finita, o que mantém um erro análogo ao introduzido pela equação (2).

A correção para o erro ocorre na equação (10), resultado da consideração de diferenças infinitesimais tanto para as variações de temperatura quanto para as de volume, conforme a definição dada na equação (7). A expressão para a dilatação dada pela equação (10) é coerente com as observações experimentais e é válida, conforme vimos, para sólidos, líquidos e gases.

## Agradecimentos

Agradecemos à professora Cleide M. D. P. S. e Silva, do DF/CCT/Campus II/UFPb, pela sugestão de estendermos as discussões da primeira versão do presente artigo aos gases ideais.

## Referências

1. Wilton P. Silva, Cleide M. D. P. S. Silva e Memnandro S. Nascimento, *Tratamento de Dados Experimentais*, 1a. Ed. UFPb/Editora Universitária (1995) pag. 45.
2. A maioria dos livros que tratam do problema da dilatação.
3. Robert Resnik e David Halliday, *Física*, 2a. Ed. (vol. 1-2), Livros Técnicos e Científicos S.A. (1977) pag. 603.
4. Robert Eisberg e Lawrence Lerner, *Física: Fundamentos e Aplicações*, 1a. Ed. (vol. II), Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, (1982) pag. 392.