

A Origem Física do Ângulo de Brewster

(The Physical Origin of the Brewster Angle)

M.L. Bedran*, B. Lesche

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro

C.P. 68528, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Trabalho recebido em 6 de setembro de 1996

O fenômeno de Brewster pode ser explicado pelas características de emissão de um dipolo oscilante. Mostra-se que esta interpretação também é válida no caso de materiais magnéticos, se tanto os dipolos elétricos como os magnéticos forem considerados. Este cálculo pode ser dado como exercício num curso de Eletrodinâmica.

The Brewster phenomenon can be explained by the emission characteristics of an oscillating dipole. It is shown that this interpretation is also valid in the case of magnetic materials if both electric and magnetic dipoles are considered. The corresponding calculation may be given as an exercise in an electrodynamics course.

Quando a luz incide na superfície de um dielétrico com seu vetor elétrico oscilando no plano formado pelo raio incidente e a normal à superfície, existe um ângulo de incidência tal que a luz é completamente transmitida para o material dielétrico. Este único ângulo de incidência, que anula o feixe refletido, é conhecido como ângulo de Brewster. Em alguns livros de Graduação^[1,2] encontra-se uma explicação para a falta do feixe refletido em termos da característica de emissão de um dipolo elétrico oscilante. O argumento usado é o seguinte: Qualquer onda refletida deve-se a alguma emissão dos dipolos induzidos no material dielétrico. É um fato bem conhecido que um dipolo elétrico oscilante não emite na direção do eixo do dipolo. Portanto, se a direção de reflexão coincidir com a direção deste eixo, não haverá luz refletida. Correspondentemente, o ângulo de Brewster é aquele para o qual a direção de reflexão é perpendicular ao feixe transmitido. A Fig. 1 ilustra esta situação. De fato, para o caso de materiais não magnéticos e isotrópicos, o ângulo de Brewster é caracterizado corretamente por esta condição. Entretanto, poder-se-ia argumentar que, no caso de materiais magnéticos, o ângulo de Brewster não mais seria dado pela condição de ortogonalidade entre o feixe transmitido e a direção de reflexão. De fato, resolvendo as equações de Max-

well com as condições de contorno apropriadas na interface vácuo-dielétrico, encontra-se para o ângulo de Brewster^[3]

$$(\sin\theta_B)^2 = \frac{n^2(1 - \beta^2)}{1 - n^2\beta^2} \quad (1)$$

onde

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad \text{e} \quad \beta = n\frac{\mu_0}{\mu}. \quad (2)$$

Para o ângulo φ_B entre o feixe transmitido e a direção de reflexão na condição de Brewster, obtém-se (veja a fig. 2):

$$\begin{aligned} \cos\varphi_B &= \cos(\pi - (\theta_B + \theta_T)) = \\ &= -\cos\theta_B\cos\theta_T + \sin\theta_B\sin\theta_T \end{aligned} \quad (3)$$

Combinando a equação (3) com a lei de Snell ($\sin\theta_B = n\sin\theta_T$), obtém-se após algumas passagens algébricas:

$$\cos\varphi_B = \frac{n - \beta}{1 - n\beta}. \quad (4)$$

Isto é zero ($\varphi_B = \pi/2$) somente se $n = \beta$, ou seja, para materiais não-magnéticos. Neste trabalho mostraremos que, mesmo para materiais magnéticos, a explicação do fenômeno de Brewster em termos das características de emissão dos dipolos é correta. Entretanto, no caso de

*E-mail: bedran@if.ufrj.br

materiais magnéticos, deve-se também levar em conta a contribuição da emissão dos dipolos magnéticos.

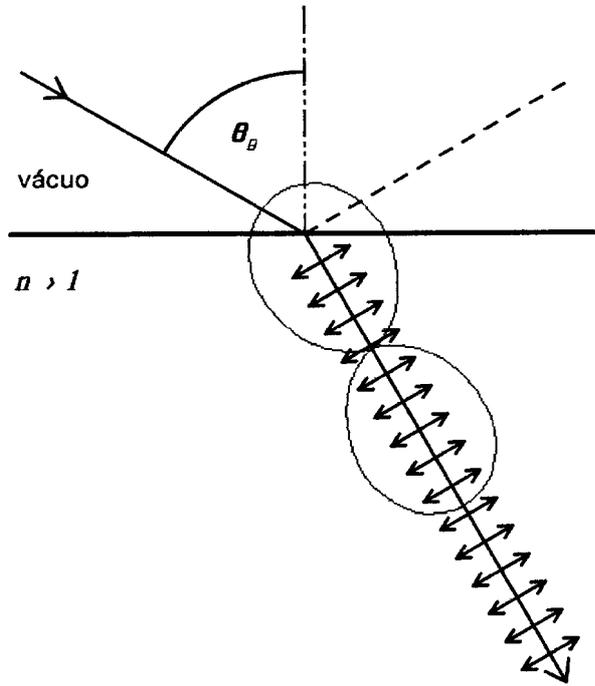


Figure 1. Luz incidindo numa superfície dielétrica na condição de Brewster. As setas no feixe transmitido indicam os dipolos elétricos oscilantes. A figura em forma de 8 representa a característica de emissão de um dos dipolos.

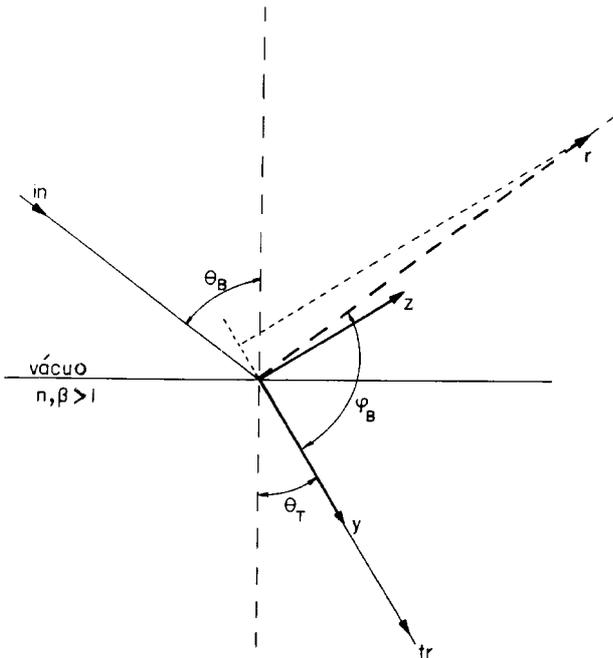


Figure 2. Definição dos ângulos θ_B , φ_B , θ_T e dos eixos y , z . A projeção ortogonal do vetor \vec{r} no eixo y ilustra a equação (14): $\cos\varphi_B = \frac{y}{r} = -\alpha$.

Para calcular os campos criados pelos dipolos oscilantes induzidos, vamos orientar os eixos coordenados

x, y, z de tal modo que o eixo y aponte na direção de propagação do feixe transmitido e o eixo z fique no plano de incidência. Suporemos que o campo elétrico da onda transmitida oscile na direção z e o campo magnético na direção x . O campo elétrico de um dipolo elétrico oscilante $\vec{p}(t) = p_0 \hat{z} \cos(\omega t)$ é dado por

$$\vec{E}_p = -\hat{\theta} \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (5)$$

onde \hat{z} e $\hat{\theta}$ são vetores unitários nas direções z e θ respectivamente e r, θ são duas das coordenadas esféricas usuais. Em coordenadas Cartesianas esta expressão tem a forma:

$$\vec{E}_p = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{f(t, r)}{r^3} \right) [z(x\hat{x} + y\hat{y}) - (x^2 + y^2)\hat{z}] \quad (6)$$

onde

$$f(t, r) = \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (7)$$

O campo elétrico de um dipolo magnético oscilante $\vec{m}' = m_0 \hat{z} \cos(\omega t)$ é dado por

$$\vec{E}_{m'} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (8)$$

que, em coordenadas Cartesianas, tem a forma:

$$\vec{E}_{m'} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{f(t, r)}{r^2} \right) [-y\hat{x} + x\hat{y}] \quad (9)$$

No material transparente, o dipolo magnético induzido estará de fato perpendicular ao dipolo elétrico. Por isso calcularemos agora o campo de radiação de um dipolo magnético na direção x , $\vec{m}(t) = m_0 \hat{x} \cos(\omega t)$. O resultado pode ser lido facilmente da equação 9 permutando-se x, y , e z ciclicamente:

$$\vec{E}_m = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{f(t, r)}{r^2} \right) [-z\hat{y} + y\hat{z}] \quad (10)$$

Em seguida, precisamos relacionar o momento de dipolo magnético induzido com o correspondente elétrico. Sabemos que as amplitudes dos dipolos estão relacionadas com as amplitudes dos campos elétrico e magnético através das susceptibilidades:

$$p_0 = \frac{\epsilon_0}{\rho} \chi_\epsilon E_T$$

e

$$m_0 = \frac{1}{\rho} \chi_m H_T = \frac{1}{\rho} \chi_m \frac{B_T}{\mu} \quad (11)$$

onde ρ é a densidade de dipolos, χ_e e χ_m são as susceptibilidades elétrica e magnética e E_T , B_T são as amplitudes dos campos da onda transmitida. Por outro lado, tem-se da equação de Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -(\partial \vec{B} / \partial t)$, relação bem conhecida entre as amplitudes: $B_T = \frac{n}{c} E_T$. Combinando esta última relação com as equações

11 obtém-se que

$$\frac{m_0}{c} = \frac{\chi_m n}{\chi_e c^2 \mu \epsilon_0} p_0 = \frac{n - \beta}{n\beta - 1} p_0 \equiv \alpha p_0 \quad (12)$$

A equação 12 nos permite combinar as equações 6 e 10 para encontrar o campo elétrico total de radiação de um único dipolo induzido:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{f(t, r)}{r^3} [-z(y + \alpha r)\hat{y} + y(y + \alpha r)\hat{z}] \quad (13)$$

Este campo é zero se $y + \alpha r = 0$. Então o ângulo que a direção de emissão zero faz com o eixo y (a direção do feixe transmitido) satisfaz a relação

$$\cos \varphi_B = \frac{y}{r} = -\alpha = \frac{n - \beta}{1 - n\beta} \quad (14)$$

Ela é idêntica à condição de Brewster (equação 4) para materiais magnéticos. O cálculo acima pode ser dado como exercício num curso de Eletrodinâmica e fornece uma abordagem interessante ao fenômeno de Brewster.

Agradecimentos

B.L. agradece ao CNPq pela ajuda financeira.

Referências

1. P.A. Tipler, *Physics*, Vol. 2b Worth Publishers Inc. 1982.
2. Chr. Gerthsen, H.O. Kneser, *Physik*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
3. D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 2nd ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981.