Nascimentos da Física

José Maria Filardo Bassalo
Departamento de Física da UFPA
66075-900 - Belém, Pará
http://www.amazon.com.br/bassalo

Trabalho recebido em 7 de março de 1996

Com este trabalho, iniciamos uma nova saga. Desta vez, a exemplo do escritor uruguaio Eduardo Hughes Galeano (1940-) em sua fantástica trilogia **Memória do Fogo (Nascimentos,** 1986; **As Caras e as Máscaras**, 1985; **O Século do Vento,** 1988 - Editora Nova Fronteira), apresentaremos em forma de verbetes, e na ordem cronológica (seguindo a divisão clássica das idades históricas), os principais fatos (nascimentos) referentes aos conceitos físicos, os quais serão apresentados por temas separados. Para isso, basicamente, usaremos os dados que coletamos nos quatro tomos de nossas **Crônicas da Física** (EUFPA: 1987, 1990, 1992, 1994) e nas referências ai indicadas.

Abstract

With this work, we begin a new saga. This time, as the Uruguayan writer Eduardo Hughes Galeano (1940 -) made in his fantastic trilogy **Memória do Fogo (Nascimentos**, 1986; **As Caras e as Máscaras,** 1985; **O Século do vento,** 1988 - Editora Nova Fronteira), we present in entries, and in chronological order (following the classical division of historical ages), the main events *(births)* concerned to the physical concepts, which will be presented in separated subjects. For that, basically, we use the data that we gather in our four books Crônicas da Física (EUFPA: 1987, 1990, 1992, 1994) and in the references therein.

IDADE MODERNA: MECÂNICA

Primeira Metade do Século 18 (1701-1750)

Em 1703, foi publicado o livro póstumo do físico holandês Christiaan Huygens (1629 1695) intitulado *Opuscula Posthuma,* no qual há uma descrição do papel das forças centrífugas nos movimentos curvilíneos (tema que já havia estudado em 1659, por ocasião em que tratou da teoria turbilhonar cartesiana sobre o sistema planetário), bem como a demonstração de que aquelas forças, além de variar na razão direta do quadrado da velocidade e na razão inversa do raio (conforme demonstrou em 1659), ela dependia, também, das **quantitates solidas** de um corpo, ou seja, a massa do corpo, conforme se verificou posteriormente.

Em 1703, o matemático suíço James (Jakob, Jacques) Bernoulli (1654-1705) publicou na *Histoire de l'Académit Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris* um trabalho no qual calculou o centro de oscilação do pêndulo composto, usando o princípio estático da alavanca, o princípio das acelerações reversas, estas tomadas como forças. Nesse trabalho, que havia também sido publicado em 1691, no *Acta Eruditorum Lipsiensium,* James corrigiu alguns erros que havia cometido em seu primeiro trabalho sobre a teoria do centro de oscilação, escrito em 1686, erros esses que haviam sido apontados pelo matemático francês, o Marquês Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704), en 1690, no *Journal de Rotterdam.*

Em 1704, James Bernoulli demonstrou que quando uma peça é fletida sob a ação de uma força, a resposta da mesma poderia ser descrita como uma relação entre a força de tensão por unidade de área e a elongação por unidade de comprimento, relação essa hoje conhecida como **relação tensão-distensão** ("stress-strain relation").

Em 1706, o professor de Direito, o italiano Giuseppe Averani (1663-1738) realizou, em Toscana-(e com a colaboração de Thomas Dereham e Henry Newton), experiências sobre a determinação da velocidade do som.

Em 1708, o matemático inglês Brook Taylor (1685-1731) estudou o problema da determinação do centro de oscilação do pêndulo composto, de modo um pouco diferente do que James Bernoulli havia feito em 1703, ao considerar separadamente as forças e as massas envolvidas nesse problema.

Em 1712, o matemático suíço John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748) estudou o problema da determinação do centro de oscilação do pêndulo composto, de modo análogo ao que havia sido feito por Taylor, em 1708.

Em 1713, o matemático francês Joseph Sauveur (1653-1716) - o criador da **Acústica Musical** - apresentou à Academia Francesa de Ciências uma *Mémoire* na qual calculou a freqüência vibracional de uma corda musical. Para esse cálculo, Sauveur considerou uma corda esticada horizontalmente em um campo gravitacional, e sujeita a pequenas vibrações horizontais.

Em 1713, o físico francês Antoine Parent (1666-1716) fez um estudo sobre as tensões em peças sujeitas à flexão, ocasião em que, pela primeira vez, considerou o equilíbrio unidimensional de forças internas. Assim, ao representá-las em um diagrama, demonstrou que a área do triângulo de compressão é igual à área do triângulo de tração. Parent observou ainda que as forças tangentes à secção transversal, isto é, as **forças de cisalhamento**, também estão em equilíbrio.

Em 1713, na *Philosophical Transactions Royal Society of London 28 (1713),* Taylor publicou o artigo intitulado De *motu nervi tensi (Sobre o movimento de uma corda tensa),* no qual deduziu a equação da corda vibrante, apresentando-a na forma: $a^2\ddot{x} = \dot{s}\dot{y}y$, onde $\dot{s} = ds/dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $a = \ell/\pi$ e ℓ é o comprimento da corda. (Na notação atual, essa equação tem o seguinte aspecto: $\sigma\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, sendo T a tensão na corda e σ sua massa por unidade de comprimento.) Ao admitir que $y = A\ sen\ (x/a)$, ele obteve para a freqüência fundamental da corda a expressão (na notação atual): $\nu = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{Tg}{\sigma}}$, sendo **g** a aceleração da gravidade.

Em 1715, Taylor publicou o livro *Methodus Inclementorum Directa et Inversa (Métodos Direto e Inverso de Incrementações)* no qual há uma versão revisada do problema da corda vibrante que havia estudado em 1713-1714. Ainda nesse livro, Taylor incluiu seu trabalho realizado em 1708, sobre o centro de oscilação do pêndulo composto. E oportuno notar que esse livro tornou-se muito conhecido por apresentar a famosa **fórmula de Taylor** (na notação de hoje): $f(x+a) = f(a)+f'(a)x+f"(a)\ \frac{x^2}{2!}+...+f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!}+....$ Também nesse livro, Taylor apresentou seus estudos pioneiros sobre a compressibilidade dos fluidos, nos quais analisou a ação elementar exercida por uma força (F) sobre uma superfície (A) horizontal a uma certa altura (h) no interior de um fluido. Em decorrência dessa análise, Taylor postulou que (na linguagem atual): $dF \propto \sigma Adh$, onde σ é a gravidade específica do fluido.

Em 1715, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em *Correspondência com Clarke,* criticou a interpretação que o matemático e físico inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) havia dado, em seu *Principia* de 1687, de que a forma parabolóide que a água toma em um balde quando este é girado, era devido à forca centripeta "criada" pelo espaço absoluto. Para Leibniz, o espaço só representava as posições possíveis de um corpo, ele, portanto, não pode exercer ação física.

Em 1716, na *Acta Eruditorum Lipsiensium,* o matemático suíço Jakob Hermann (1678-1733) apresentou um estudo sobre tensão e compressão em peças sujeitas à flexão, tema que já havia sido estudado por seu professor James Bernoulli. Ainda nesse trabalho, tratou também da corda vibrante tentando (sem sucesso) considerar seus movimentos como sendo os de um oscilador harmônico simples.

Em 26 de janeiro de 1717, John Bernoulli escreveu uma carta ao matemático francês Pierre Varignon (1654-1722) no qual afirmou que: - "Quando forças quaisquer são aplicadas (direta ou indiretamente) de uma maneira também qualquer em um corpo, há equilíbrio quando a soma das energias positivas é igual à soma das energias negativas". Para John, o termo energia significava o produto da força pela **velocidade virtual** dessa mesma força. Por seu lado, essa velocidade representava a projeção do deslocamento do ponto de aplicação da força sobre sua direção. Essa projeção seria positiva se fosse no sentido da força e negativa, no sentido contrário. Essa afirmação ficou conhecida como **princípio da velocidade (deslocamento) virtual.**

Em 1725 foi publicado o livro de Varignon intitulado *Nouvelle Mécanique ou Statique (Nova Mecânica ou Estática)* no qual aplicou o **princípio do paralelograma das forças** a todos os tipos de problemas mecânicos. Por exemplo, através dele, demonstrou que o equilíbrio de uma alavanca é obtido por intermédio de um sistema de forças paralelas que pode ser considerado como um caso limite de um sistema de forças concorrentes. Ainda nesse livro, Varignon demonstrou existir uma relação entre aquele princípio e o princípio da velocidade (deslocamento) virtual, cuja descoberta havia sido realizada por John Bernoulli, em l717.

Em 1727, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) esclareceu os trabalhos de Parent sobre as forças transversais (cisalhamento) e longitudinais (tração e compressão) decorrentes de uma viga fletida. Para isso, considerou-a como um corpo deformável, seccionou a mesma em duas partes e representou a ação de uma parte sobre a outra, por uma força que atua na junção das mesmas. Ainda em 1727, Euler analisou o movimento de um haste vibrante circular supondo que um elemento da mesma se comportava (na linguagem moderna) dinamicamente como uma partícula com um grau de liberdade e acelerada por urma força decorrente de uma energia potencial igual a energia interna do elemento considerado.

Em outubro e dezembro de 1727, John Bernoulli escreveu cartas para seu filho Daniel que se encontrava em São Petersburgo, nas quais anunciou seus estudos sobre cordas vibrantes. Nesses estudos, John considerou uma corda vibrante sem peso, carregada com **n** massas iguais e igualmente espaçadas, sendo que essas massas satisfaziam à equação diferencial do oscilador harmônico simples: $\ddot{x} + kx = 0$, cuja solução ele a obteve por métodos analíticos. Na continuação de seu trabalho, John estudou a corda vibrante contínua e, ao resolver sua equação diferencial $y" + ky = 0$, encontrou que sua forma é sempre senoidal (esse tipo de curva era chamada de **trochoides socia** - "a companheira da ciclóide" - pelo matemático francês Gilles Personne de Roberval (1602-1675)), bem como determinou sua freqüência fundamental, que já havia sido obtida por Taylor.

Em 1730, o matemático suíço Daniel Bernoulli (1700-1782) escreveu uma carta ao matemático russo Christian Goldbach (1690-1764) na qual descreveu seus estudos sobre o fluxo de fluidos em tubos horizontais, e que lhe permitiu descobrir o seguinte Teorema (mais tarde conhecido como **Teorema** ou **Princípio de Bernoulli**): - "Quando a velocidade do fluxo dos fluidos aumenta, sua pressão diminui".

Em 1731, Euler preparou o manuscrito do livro *Tentamen Novae Musicae ex Certisimis Harmoniae Principiis Dilucide Expositae (Um Investigação sobre uma Nova e Clara Teoria da Música Baseada sobre Inconstestáveis Principios de Harmonia)* no qual demonstrou que uma corda vibrante de espessura variável (ou densidade não uniforme $\sigma(x)$) emite tons não-harmônicos.

Em 1732, nos *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 3 (1728),* foram publicados os trabalhos de John Bernoulli sobre as cordas vibrantes, realizados em 1727.

Em 1732, o engenheiro francês Henri Pitot (1695-1771) inventou um dispositivo para medir a velocidade do fluxo de um fluido. Ele consiste de dois tubos, um com uma extremidade aberta na direção do fluxo e um outro com uma extremidade também aberta, porém na direção perpendicular a esse mesmo fluxo. Esses tubos são conectados aos lados opostos de um manômetro de modo que a diferença entre a pressão dinâmica (P_2) no primeiro tubo e a pressão estática (P_1) no segundo tubo pode então ser medida. Portanto, a velocidade **v** do fluxo de um fluido incompressível de densidade ρ, é dada por: $v = \sqrt{2 \cdot (P_2 - P_1)/\rho}$.

Em 1732-1733, Daniel Bernoulli comunicou à Academia de Ciências de São Petersburgo seus estudos sobre as pequenas vibrações de uma corda sem peso, pendurada em uma extremidade e carregada com **n** massas igualmente espaçadas, bem como as vibrações de pêndulos acoplados. No caso da corda, demonstrou que os deslocamentos horizontais **y**, a uma distância **x** de sua extremidade livre, satisfazem à equação diferencial $\alpha \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + y = 0$, cuja solução (na notação atual) é dada por: $y = AJ_o(2\sqrt{x/\alpha})$ onde α satisfaz à equação $J_o(2\sqrt{\ell/\alpha}) = 0$, onde ℓ é o comprimento da corda e J_o e a **função de Bessel de ordem zero.** (Um resultado análogo a esse também foi obtido por Euler. É interessante registrar que tanto Daniel quanto Euler observaram que J_o tinha muitas raízes (zeros).)

Desse modo, Daniel encontrou que a vibração da corda suspensa poderia ser obtida por uma sucessão de um grande número de vibrações simples. Ainda em seu estudo das cordas vibrantes Daniel tratou de cordas vibrantes suspensas de espessura não-uniforme, para as quais apresentou a seguinte equação diferencial (na notação de hoje): $\alpha\frac{d}{dx}(g(x)\frac{dy}{dx}) + y\frac{dg(x)}{dx} = 0$, onde $g(x)$ é a distribuição do peso da corda ao longo de seu comprimento ℓ. Considerando $g(x) = \frac{x^2}{\ell^2}$, Daniel obteve a seguinte solução (ainda em notação de hoje): $y = 2A(\frac{2x}{\alpha})^{-1/2}J_1(2\sqrt{2x/\alpha})$, com $J_1(2\sqrt{2\ell/\alpha}) = 0$.

Em 1734, Daniel Bernoulli concluiu seus estudos sobre movimento dos fluidos e os reuniu no manuscrito *Hydrodinâmica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii.* Neste, estudou, com auxílio do **princípio da força viva (vis viva),** o fluxo estacionário de um fluido incompressível em um tubo horizontal fixo, relacionou a pressão que o mesmo exerce sobre as paredes desse tubo e a sua própria velocidade **v**, obtendo a seguinte equação: $v\frac{dv}{dx} = \frac{a-v^2}{2c}$, onde $\sqrt{a}$ é uma velocidade de referência, **dv** é o incremento da velocidade **v** do fluido ao atravessar uma distância **dx** no tubo, e $v\frac{dv}{dx}$ representa a pressão. Nessa equação, as unidades são escolhidas de tal maneira que $g = 1/2$ sendo **g** a aceleração da gravidade. Esse resultado traduz, portanto, o Teorema que havia descoberto em 1730. É interessante destacar que nesse manuscrito, Daniel apresentou a idéia de que uma força pode ser deduzida de uma "função potencial", expressão essa, aliás, que empregou nesse mesmo manuscrito.

Em dezembro de 1734, Daniel Bernoulli escreveu para Euler dizendo-lhe que estava estudando as pequenas vibrações transversais de uma barra elástica com uma extremidade engastada na parede e a outra livre.

Em maio de 1735, Daniel Bernoulli escreveu para Euler, e disse-lhe que as pequenas vibrações transversais de uma barra elástica com uma extremidade engastada na parede e a outra livre satisfaziam à equação diferencial (na notação atual): $k^4\frac{d^4y}{dx^4} = y$ (onde **k** é uma constante, **y** são os deslocamentos da barra numa posição **x** marcada a partir de sua extremidade livre), mas que a solução dessa equação (que havia encontrado na forma de seno e exponencial), era inapropriada. Logo em junho de 1735, Euler respondeu a Daniel dizendo-lhe que havia encontrado uma equação semelhante, mas que somente as séries serviam como solução para a mesma.

Em 1736, Euler publicou o livro *Mechanica, sive Motus Scientia Analytice Exposita* no qual a mecanica newtoniana é desenvolvida pela primeira vez na forma analítica. Nesse livro, Euler apresentou de maneira clara e precisa os conceitos de ponto material e de aceleração, bem como considerou, também nesse livro, um sistema de coordenadas móvel. (Observe-se que nesse livro, aparece pela primeira vez a notação **e**, para representar a base dos logaritmos neperianos.)

Em 1738, nos *Commentarii Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae 6 (1732-1733)*, Daniel Bernoulli publicou seus trabalhos sobre as pequenas vibrações de uma corda sem peso, assim como as vibrações de pêndulos compostos acoplados. Ainda nesse mesmo ano, publicou seu famoso *Hydrodinamica.*

Em 1738 Euler escreveu o manuscrito *Scientia Navalis (Ciência Naval)* no qual formulou o seguinte axioma: - "As pressões em todas as direções em um dado ponto no interior de um fluido são iguais e são normais aos elementos de superfície sobre os quais elas atuam". Esse axioma baseou-se no conceito que Euler tinha sobre **pressão interna** num fluido, isto é, ela "representa a força exercida pelo mesmo sobre uma superfície hipotética no seu interior, qualquer que seja sua posição ou forma".

Em 1739, Euler preparou um trabalho no qual resolveu a equação diferencial do oscilador harmônico simples ($m\ddot{x} + kx = 0$) e forçado ($m\ddot{x} + kx = F\ sen(w_\alpha t)$). No caso do forçado Euler descobriu o fenômeno da **ressonância,** ao observar que quando a freqüência normal $w_0 = (\sqrt{k/m})$ se aproxima da freqüência externa (w_α), as oscilações forçadas tornam-se cada vez maiores e suas amplitudes tendem para o infinito.

Em 1739, Euler publicou seu livro *Tentamen Novae Theoriae Musicae.*

Em 1739, Daniel Bernoulli apresentou à Academia de Ciências de São Petersburgo um trabalho contendo um estudo (no plano bi-dimensional) do equilíbrio de um corpo rígido flutuando em um fluido incompressível.

Em 1740, John Bernoulli concluiu o livro intitulado *Hydraulica, nunc Primum Detecta ac Demonstrata ex Fundamentis Pure Mechanics*, escrito com o objetivo de criticar o *Hydrodinamica* (1734-1738) de seu filho Daniel. Nesse livro, John estudou o movimento das águas separando cuidadosamente a cinemática da dinâmica do fluxo líquido; introduziu uma "força interna" atuando nas secções retas do fluido em movimento no conduto (como se fosse uma pressão interna), idéia essa que não havia sido considerada por seu filho Daniel. Com isso, generalizou o Teorema de Bernoulli e o apresentou quase na forma hoje conhecida: $p+DV^2/2+DgH=$ constante, onde **p** é a pressão, **D** é a densidade do fluido, **V** a sua velocidade e **H** é a altura em relação a um determinado referencial. (Registre-se que John datou esse manuscrito de 1732, um ano antes de seu filho Daniel entregar o manuscrito do *Hydrodinamica* à Academia de Ciências de São Petersburgo, pois queria se apropriar das idéias de seu filho.)

Em 1740, o matemático francês Pierre Louis Moureau de Maupertuis (1698-1759) usou o princípio da velocidade (deslocamento) virtual, com o nome de **lei do repouso**, ao tratar o problema do equilíbrio de um corpo quando sofre deslocamentos infinitesimais.

Em 1741-1743, Daniel Bernoulli realizou trabalhos nos quais estudou as vibrações de uma barra e os sons emitidos por ela, bem como separou os diversos modos dessas vibrações e observou que os sons correspondentes (os diversos harmônicos) podem existir juntos. Parece ser essa a primeira observação da co-existência das pequenas oscilações harmônicas. Apesar de entender fisicamente esse problema, Daniel não foi capaz de formulá-lo matematicamente.

Em 1742, John Bernoulli reuniu seus trabalhos no *Opera Omnia*, em 4 Volumes. Nessa obra, John incluiu trabalhos que havia feito em 1740, sobre sistemas vibrantes, principalmente pêndulos compostos acoplados e hastes penduradas.

Em 1742, o matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) publicou o livro *Treatise of Fluxions (Tratado das Fluxões)* no qual demonstrou que as formas estáveis de equilíbrio para uma massa fluida homogênea em rotação são os elipsóides oblatados de revolução. Em vista disso, esses sólidos ficaram conhecidos como **elipsóides de Maclaurin**.

Em 1742, o engenheiro inglês Benjamin Robbins (1707-1751) publicou o livro intitulado *New Principles of Gunnery (Novos Princípios de Artilharia)* no qual há a descrição da invenção do **pêndulo balístico** destinado a medir as velocidades dos projéteis de canhão. Esse pêndulo é constituído de uma grande massa (de material relativamente mole) suspensa e quando a mesma é atingida por um projétil, ela se eleva de um certo angulo. Medindose esse angulo e, usando-se considerações de conservação de energia e momento. é possível estimar a velocidade do projétil.

Em 1743, o matemático francês Alexis Claude Clairaut (1713-1765) publicou o livro *Théorie de la Figure de la Terre (Teoria da Forma da Terra)* no qual apresentou um estudo sobre referenciais não-inerciais, ocasião em que demonstrou que "um corpo visto de um referencial em rotação (não-inercial), experimenta uma **força aparente** por unidade de massa, igual e de sentido contrário à aceleração que esse referencial tem em relação a um referencial inercial". Nesse livro, Clairaut fez a distinção entre força e peso, apresentou pela primeira vez os conceitos de **campo vetorial geral** e de **função potencial**, bem como formulou a **teoria geral das superfícies de nível.** Ainda nesse livro, Clairaut estudou as possíveis formas de equilíbrio dos **elipsóides de Maclaurin**, quando sujeitos a ação de forças arbitrárias. Muito embora não haja conseguido resolver completamente esse problema, Clairaut concluiu que um sistema de forças será compatível com o equilíbrio se o equivalente ao conceito de **trabalho** (conceito esse somente esclarecido no século XIX) realizado por essas forças for um diferencial exato, isto é, não depender do caminho escolhido para realizar esse "trabalho".

Em 1743, o matemático francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) em seu famoso livro *Traité de Dynamique (Tratado de Dinâmica)* resolveu a controvérsia entre a *quantidade de movimento* (mv) cartesiana e a **vis-viva** ("força-viva") (mv^2) leibniziana. Com efeito, como um corpo sob a ação de uma certa força leva um certo tempo para percorrer determinada distancia, d'Alembert mostrou que a ação dessa força poderia ser calculada por seu efeito no tempo ou no espaço. No primeiro caso, a medida da força se faz através da quantidade de movimento cartesiana e, no segundo caso, por intermédio da "força-viva" leibniziana. Ainda nesse livro, d'Alembert usou o **princípio da velocidade (deslocamento) virtual** ou **princípio das acelerações reversas** para estudar problemas práticos da Dinâmica, através da

Estática, usando para isso as forças de inércia ($-m\vec{a}$), ou seja, ele escreveu a Segunda Lei de Newton na forma: $\vec{F} - m\vec{a} = 0$. Desse modo, o corpo em movimento é então levado ao repouso por intermédio das "acelerações reversas". Em vista disso, aquele princípio ficou conhecido como **princípio de d'Alembert**. Observe-se que, para d'Alembert, os princípios da Dinâmica devem ser obtidos pelos efeitos da força e não pela força em si, já que está jamais é vista. Portanto, para ele, o efeito de uma força no tempo sobre um corpo pode ser calculado por intermédio da quantidade de movimento produzida no mesmo por essa força.

Em 1743, John Bernoulli apresentou sua idéia sobre **pressão interna** num fluido. Assim, para John, um determinado fluido, mesmo em movimento, e para particulares espécies de fluxos pressiona normalmente sobre si mesmo.

Em 1744, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique, Paris*, Maupertuis apresentou a sua versão do **Princípio Variacional**, considerando a grandeza física **ação**, definida como o produto da massa **m** da velocidade **v** e da distância **s**, como sendo minimizável, ou seja: mvs = mínimo.

Em 1744, Euler publicou o livro *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimae proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti (Um método de descobrir linhas curvas que apresentam a propriedade de máximo ou mínimo ou a solução do problema isoperimétrico tomado em seu sentido mais amplo)*, no qual reuniu estudos realizados em 1739 e 1741 sobre a flexão elástica de um corpo e sua correspondente **vis potentialis** (esta, mais tarde reconhecida como **energia potencial**). Ainda nesse livro, Euler escreveu o **Princípio da Mínima Ação de Maupertuis** da seguinte forma (na notação de hoje): $\delta \int v ds = \delta \int v^2 dt = 0$, expressão essa que indicava ser a **ação de Maupertuis** mínima para movimentos de partículas ao longo de curvas planas. (É oportuno destacar que além de razões físicas, Maupertuis e Euler alegavam razões teológicas para o seu Princípio pois diziam eles, as leis do comportamento da natureza possuem a perfeição digna da criação de Deus.)

Em 1744, Euler publicou o livro *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum (Teoria do Movimento Planetário e Cometário)* no qual demonstrou que o movimento de **n** massas puntuais sujeitas a qualquer força, poderia ser formulado em termos de um sistema de equações diferenciais referido a um sistema cartesiano ortogonal.

Em 1744, d'Alembert publicou o livro *Traité de l'Équilibre et du Mouvement des Fluides (Tratado do Equilíbrio e do Movimento dos Fluidos)* no qual usou a "hipótese das secções paralelas", segundo a qual todas as partículas de um fluido em movimento têm a mesma velocidade, bem como o seu famoso princípio (1743), para estudar os fluidos. Essa hipótese havia sido utilizada por Daniel Bernoulli em seu *Hydrodinamica,* de 1738. (Observe-se que como essa hipótese não considerava as forças exercidas por fluidos em movimento no qual há obstáculos a contornar a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio a quem resolvesse o problema da resistência ao movimento dos fluidos.)

Em 1745 no trabalho intitulado *Artillerie (Artilharia),* Euler foi o primeiro cientista a estudar o fluxo de fluidos através de obstáculos, ao dividir esse fluxo em linhas (filetes) de corrente líquida. Nesse trabalho, sem utilizar a idéia de pressão interna de um fluido, Euler demonstrou que o fluido que passa por um obstáculo não exerce nenhuma força sobre o mesmo. (É interessante registrar que Euler preparou esse trabalho para incluir na tradução que fez do livro *New Principles of Gunnery*, publicado por Benjamin Robbins, em 1742.)

Em 1746, d'Alembert preparou dois trabalhos intitulados *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (Pesquisas sobre a forma tomada por uma corda tensa em vibração) e Suite des Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (Continuação das Pesquisas sobre a forma tomada por uma corda tensa em vibração),* nos quais deduziu a equação diferencial parcial da corda vibrante (na notação atual): $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, onde $a^2 = T/\sigma$, sendo T a tensão na corda e σ sua massa por unidade de comprimento. Para essa equação, d'Alembert encontrou uma solução da forma $y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)]$, com $f(x)(= y(x,0))$ uma "função arbitrária", representando a posição inicial (t = 0) da corda.

Em 1747, d'Alembert publicou o livro intitulado *Reflexions sur la cause générale des vents (Reflexões sobre* *a causa geral dos ventos)*, com o qual ganhou o prêmio de 1746, da Academia de Ciências e Letras de Berlim, proposto a quem resolvesse o problema da resistência dos fluidos. Nesse livro, d'Alembert fez pela primeira vez o uso geral das equacões diferenciais parciais na Física-Matemática.

Em 1747, Euler preparou um trabalho no qual estudou a propagação de pulsos através de um meio elástico, com o objetivo de entender a transmissão do som no ar. Nesse trabalho, tomou um conjunto de **n** massas **m** conectadas por molas de massa desprezível, e ao considerar que elas se movimentavam longitudinalmente, determinou a freqüência dos modos harmônicos simples individuais de vibração de cada uma dessas massas, bem como demonstrou que o movimento geral delas é a soma desses modos.

Em 16 de maio de 1748, Euler apresentou à Academia de Ciências e Letras de Berlim um trabalho sobre a equação diferencial da corda vibrante, no qual demonstrou que se a forma inicial da corda fosse periódica, isto é (na notação atual): $y(x,0) = \sum A_n \ sen \ \frac{n\pi x}{\ell}$, então a solução dessa equação, ou seja, todos os possíveis movimentos posteriores da corda também seriam periódicos (também na notação de hoje): $y(x,t) = \sum A_n \ sen \frac{n\pi x}{\ell} \ cos \frac{n\pi a t}{\ell}$. No entanto, nessa solução, Euler não informou se o somatório envolvia um número finito ou infinito de termos, apesar de ele já considerar a idéia da superposição dos modos vibracionais da corda.

Em 1748-1749, o matemático francês Marquês Gaspard Courtivron (1715-1785) apresentou suas *Mémoires* à Academia Francesa de Ciências, nas quais utilizou o princípio da velocidade (deslocamento) virtual para estudar as condições de equilíbrio (estável e instável) de um corpo, relacionando com trabalho e com a **vis-viva.**

Em 1749, d'Alembert concluiu o trabalho intitulado *Essai dúne nouvelle Théorie de la Résistance des Fluides (Ensaio sobre uma nova Teoria da Resistência dos Fluidos)* no qual apresentou diversas idéias originais sobre os fluidos. Por exemplo, ao considerar o ar como um fluido elástico e incompressível composto de pequenas velocidades, d'Alembert fez uma primeíra análise de um **campo de velocidade**, ao considerar a velocidade dessas partículas variando de ponto para ponto. Ainda nesse artigo d'Alembert apresentou uma nova generalização de seu princípio dinâmico e exprimiu, sob a forma de equações em derivadas parciais, as equações da Hidrodinâmica, equações essas que expressam a conservação da massa, a condição de fluxo potencial e, o que hoje se reconhece como a condição de conservação da vorticidade em fluxos gerais (fluxo irrotacional). Por outro lado ao considerar o fato de que a resistência das partículas constituintes de um fluido é relacionada com a perda do momento por ocasião do impacto de corpos móveis, ele demonstrou o surpreendente resultado de que essa resistência é nula, resultado esse conhecido desde então como o **paradoxo de d'Alembert**. Muito embora d'Alembert utilize idéias novas nesse trabalho ele, no entanto, não usa o conceito de pressão interna, apesar de se referir a "forças" no interior do fluido, porém, as trata como "acelerações reversas". Suas equações dinâmicas só envolviam o "campo de.velocidades", sendo que a pressão não aparece nas mesmas. Registre-se que d'Alembert preparou esse trabalho para concorrer ao prêmio de 1750 oferecido pela Academia de Ciências e Letras de Berlim a quem resolvesse o problema da resistência dos fluidos. No entanto, essa Academia recusou devolvendo-o para que fossem comparados os resultados teóricos obtidos com medidas experimentais.

Em 1749, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 3 (1747)*, d'Alembert publicou os dois artigos escritos em 1746, sobre o problema da corda vibrante.

Em 1749, na *Nova Acta Eruditorum* foi publicado o trabalho de Euler sobre a corda vibrante, realizado em 1748. Nesse mesmo ano de 1749, foi publicado o livro *Scientia Navalis*, escrito por Euler em 1738.

Em 1749, o físico e matemático alemão Johann Andreas von Segner (1704-1777) projetou uma turbina hidráulica.

Em 1750, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 4 (1748)* foi publicado o trabalho de Euler sobre a corda vibrante, realizado em 1748.

Em 1750, d'Alembert apresentou um novo trabalho à Academia de Ciências e Letras de Berlim no qual voltou ao problema da corda vibrante, corroborando suas idéias anteriores sobre o mesmo, porém, afirmou, sem demonstrar, que o tempo de vibração da corda era independente de sua forma inicial.

Em 1750, foi publicado nos *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 11 (1739)* o trabalho de Euler sobre a solução da equação diferencial do oscilador harmônico simples e forçado, realizado em 1739.

Em 1750, foi publicado nos *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1 (1747-1748)* o trabalho de Euler sobre o modelo de propagação do som no ar, realizado em 1747.

Em 1750, Euler preparou um trabalho no qual enunciou o famoso **princípio do balanço do momento linear** como uma extensão da Segunda Lei de Newton, e segundo o qual a aceleração de cada parte infinitesimal de qualquer corpo é igual à força por unidade de massa atuando no mesmo. Tal princípio, ainda segundo Euler, deve aplicar-se a sistemas mecânicos discretos e contínuos, já que sua formulação em termos de equações diferenciais em coordenadas cartesianas retangulares permite sua aplicação a qualquer configuração de corpos no espaço tri-dimensional. Em vista disso, Euler apresentou a forma analítica da Segunda Lei de Newton (na notação atual): $F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$, $F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$, $F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$.

Segunda Metade do Século 18 (1751-1800)

Em 1751, Euler utilizou o princípio da velocidade (deslocamento) virtual ao tratar o problema do.equilíbrio de um corpo quando sofre deslocamentos infinitesimais.

Em 1751, nos *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 13 (1741-1743)* foram publicados os trabalhos de Daniel Bernoulli sobre as relações entre as vibrações de uma barra e os correspondentes sons emitidos.

Em 1751, Euler começou a estudar o problema da precessão dos equinócios e da nutação terrestre, isto é, uma oscilação periódica irregular dos pólos da Terra. Essa oscilação causa uma irregularidade do círculo precessional traçado pelos pólos celestes, provocando uma variação nas distâncias e direções do Sol e da Lua em relação ao nosso planeta. Ainda nesse mesmo ano de 1751, Euler comecou a estudar o movimento da Lua, no artigo intitulado *Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates,* no qual elaborou um método original para uma solução aproximada do problema de três corpos.

Em 1752, Euler escreveu o artigo intitulado *Principia Motus Fluidorum (Principio do Movimento dos Fluidos)* no qual estudou os fluidos incompressíveis perfeitos (não viscosos). Nesse trabalho, ao tratar com as componentes **u**, **v** e **w** da velocidade de qualquer ponto em um fluido, demonstrou (na linguagem atual) que udx + vdy + wdz deveria ser uma diferencial exata (dS) e, portanto, deveria ter: $u = \frac{\partial S}{\partial x}$, $v = \frac{\partial S}{\partial y}$ e $w = \frac{\partial S}{\partial z}$. Sendo o fluido considerado incompressível, demonstrou então que: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, que representa a **Equação da Continuidade**, e que $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$. Euler não soube como encontrar a solução geral dessa equação, e sim, apenas em casos especiais em que S era um polinômio em **x, y** e **z**.

Em 1752, na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 6 (1750)* foi publicado o trabalho de Euler sobre o **princípio do balanço do momentum linear** e suas conseqüências, realizado em 1750.

Em 1752, d'Alembert publicou o *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides.*

Em 1753, Daniel Bernoulli comunicou à Academia de Ciências e Letras de Berlim seu trabalho no qual apresentou a solução da equação diferencial parcial da corda vibrante (na notação atual): $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, onde $a^2 = T/\sigma$, sendo T a tensão na corda e σ sua massa por unidade de comprimento. Para d'Alembert, se a posição inicial da corda fosse representada pela função (na notação atual) $y(x,0) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \ sen \ \frac{n\pi x}{\ell}$, então, a solução da equação diferencial referida acima seria dada por (na notação atual): $y(x,t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \ sen \ \frac{n\pi x}{\ell} \ cos \frac{n\pi at}{\ell.}$

Em 1753, Euler publicou o trabalho intitulado *Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates,* no qual elaborou um método original para uma solução aproximada do problema de três corpos.

Entre 1753 e 1755, Euler escreveu três artigos *(Principes généraux de l 'état d 'équilibre des fluides (Principios gerais do estado de equilibrio dos fluidos), Principes genéraux du mouvement des fluides (Principios gerais do movimento dos fluidos) e Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides (Continuação das pesquisas sobre a teoria do movimento dos fluidos))* nos quais generalizou sua pesquisa sobre o movimento dos fluidos realizada em 1752, estendendo-a aos fluidos perfeitos compressíveis. Nesses trabalhos, o fluido é tomado como um contínuo e suas partículas constituintes são consideradas como pontos matemáticos. Ao admitir a força $\vec{F}$ (por unidade de massa) atuando sobre um pequeno volume do fluido de densidade ρ, e sujeito a uma pressão $\mathbf{p}$, Euler demonstrou a hoje ainda célebre **Equação de Euler** (na notação atual): $\Delta p + \rho\vec{F} = \rho\dot{\vec{v}}$.

Em 1762, foi publicado na *Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis 2₂ (1760-1761)* o trabalho de Lagrange sobre o "método das variações". Ainda nesse trabalho, Lagrange trabalhou com as equações, hoje conhecidas como **Equação da Continuidade** e **Equação de Laplace,** que haviam sido apresentadas por Euler em seus trabalhos sobre movimento dos fluidos, realizados entre 1752 e 1755. Registre-se que Laplace não fez nenhuma referência a Euler.

Em 1764, Euler preparou um trabalho no qual demonstrou que a oscilação de uma membrana circular era descrita por uma equação diferencial do tipo (na moderna linguagem): $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + (\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}) = 0$, e que foi resolvida por ele por intermédio de uma série infinita. (Observe-se que no século XIX, foi visto que essa equação nada mais era do que a **equação de Bessel,** e que, a solução em série apresentada por Euler nada mais era do que a função $J_\beta(r)$, a menos de um fator dependente de β.

Em 1765, Euler publicou o livro *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primer nostrae cognitionis principiis stabilita* no qual apresentou uma nova formulação da Mecânica, usando para isso o artifício matemático (inventado por Maclaurin, em 1742) de projetar forças sobre eixos de um sistema retilíneo ortogonal fixo. Desse modo, ao estabelecer que o movimento instantâneo de um corpo sólido pode ser considerado como composto de uma translação retilínea e uma rotação instantânea, Euler dedicou-se ao estudo do movimento rotatório. Assim, usando as projeções da velocidade angular instantânea de um corpo sólido, em movimento, projeções essas tomadas sobre os eixos principais de inércia desse corpo, considerados como eixos coordenados, Euler obteve as equações diferenciais desse movimento - as hoje famosas **equações de Euler** -, bem como as seis componentes do que mais tarde foi reconhecido como o **tensor de inércia** (que é simétrico). Euler aplicou esse resultado para estudar o movimento de um corpo sólido pesado em torno de seu centro de gravidade, sendo este considerado como um ponto fixo. Para esse tipo de movimento. Euler demonstrou que suas leis são descritas por meio de integrais elípticas. É oportuno registrar que Euler foi levado a realizar esse estudo para poder resolver o problema da precessão dos equinócios e da nutação dos eixos terrestres, problema que lhe preocupava desde 1751. Registre-se, também, que nesse livro, Euler precisou a noção de **momento de inércia** (nome cunhado por ele próprio e hoje denotado por $\sum_i m_i r_i^2$), o que lhe permitiu fazer a distinção clara entre **peso** e **massa.**

Em 1766, foi publicado nas *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 10 (1764)* o trabalho de Euler sobre a membrana circular vibrante.

Entre 1770 e 1772, Euler desenvolveu um trabalho no qual apresentou sua segunda teoria do movimento lunar. Esse trabalho foi publicado em 1772, com o título *Theoria motuum lunae, nova methodo pertractata.*

Em 1772, Lagrange estudou o problema de três corpos, no artigo intitulado *Essai sur le Problème de Trois Corps (Ensaio sobre o Problema de Três Corpos)* e publicado na *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique 9, Paris*, para o qual apresentou três soluções. Numa dessas soluções demonstrou ser possível ajustar três corpos em movimento, uma vez que suas órbitas são similares a elipses descritas todas ao mesmo tempo e tendo o centro de massa deles como um foco comum. Numa outra solução assumiu que os três corpos situavam-se nos vértices de um triângulo equilátero, que gira em torno do centro de massa desses corpos (posições L_4 e L_5). Por fim, na terceira solução considerou que os três corpos são projetados em movimento a partir de suas posições sobre uma linha reta e que, por condições iniciais apropriadas, os três corpos permanecem fixos sobre a reta enquanto esta gira em um plano em torno do centro de massa desses corpos (posições L_1, L_2 e L_5). (Enquanto estas três últimas posições são instáveis, as duas primeiras são estáveis e situam-se, respectivamente, cerca de 60^o adiante do planeta e cerca de 60^o por detrás do mesmo, e na sua órbita). Contudo, para

Lagrange, esses três casos não tinham realidade física.

Em 1773, o físico francês Charles Augustin Coulomb (1736-1806) demonstrou pela primeira vez que as tensões na flexão atuam em diferentes planos através de um ponto. Desse modo, calculou as tensoes de cisalhamento em planos arbitrariamente inclinados em relação à força externa aplicada, chegando mesmo a demonstrar que esse tipo de tensão é máxima num plano inclinado de 45^o.

Em 1776, nas *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 20,* Euler enunciou o famoso **Princípio do Balanço do Momento do Momentum (Momento Angular),** juntamente com as hoje conhecidas **Leis da Mecânica de Euler:** 1ª LEI - "A força total (F) atuando em um corpo é igual à taxa de variação do momentum total $(M) : F = \frac{dM}{dt}''$; 2ª LEI - "O torque total (L) atuando em um corpo é igual à taxa de variação do momento do momentum (momento angular) $(H) : L = \frac{dH}{dt}$, onde ambos L e H são tomados em relação a um mesmo ponto".

Entre 1779 e 1782, Euler estudou o comportamento das fibras de uma barra elástica fletida e, ao assumir que as mesmas obedecem à **lei de Hooke** (1678), demonstrou que a relação tensão-deformação é independente do tamanho do elemento considerado. E mais ainda, concluiu que essa relação fosse linear, ela deveria ser traduzida por uma constante.

Em 1781, Coulomb apresentou à Academia Francesa de Ciências uma *Mémoire* intitulada *Théorie des Machines Simples (Teoria das Máquinas Simples)*, na qual descreveu as experiências que realizou sobre atrito e, como resultado das mesmas, encontrou que havia diferença entre **atrito estático** e **atrito dinâmico**. Ainda nesse trabalho, Coulomb formulou o conceito de **força de torsão** ao estudar a torsão em fios, havendo demonstrado que essa força depende do comprimento e do diâmetro do fio.

Em 1782, o matemático e astrônomo francês Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827) estudou a atração gravitacional dos corpos esferoidais, ocasião em que introduziu a **função Potencial V,** bem como a equação que a mesma deve satisfazer - a famosa **Equação de Laplace**: $\Delta V = 0$ (na linguagem atual). Ao resolvê-la, demonstrou que a força gravitacional $(\vec{F})$ poderia ser obtida pela expressão: $\vec{F} = -\nabla V$. Observe-se que Laplace não utilizou a notação Δ e ∇ para representar, respectivamente, os operadores **laplaciano** e **gradiente** e sim, a notação em derivadas parciais (em notação atual): $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$, e $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, com $i = 1, 2, 3$.

Em 1782, Lagrange estudou sistemas de massas puntuais, ocasião em que introduziu o conceito de **coordenadas generalizadas** $(q_i, \dot{q}_i)$, como qualquer conjunto de coordenadas que pode, sem ambigüidade, definir a configuração desses sistemas. Nesse mesmo ano de 1782, Lagrange estudou a força de atração de corpos esferoidais e ao aplicá-la à forma dos planetas, utilizou o conceito de **função potencial V** para obter essa força, através da equação (na notação atual): $\vec{F} = -\nabla V$.

Em 1782 o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) publicou o trabalho intitulado *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants (Pesquisas sobre a trajetória dos projéteis em meios resistentes).*

Entre 1782 e 1785, Legendre chegou aos seus célebres **polinômios de Legendre**, em seu estudo sobre a atração gravitacional entre esferóides.

Em 1784, o físico e matemático inglês George Atwood (1745-1807) publicou o livro intitulado *A Treatise on the Rectilinear Motion (Um Tratado sobre o Movimento Retilineo)* no qual descreveu um dispositivo - mais tarde conhecido como a **máquina de Atwood** composto de duas massas (**m**) iguais, ligadas por um fio muito leve e que passa pelo fulcro de uma roldana, também leve, e com o atrito desprezível em seu eixo de rotação. Quando uma terceira massa (**m'**) é adicionada a uma das extremidades da máquina, o sistema desloca-se com uma aceleração constante (**a**) dada por: $a = m'g/2m + m'$, expressão essa que concorda com as leis da queda livre descobertas pelo físico e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642), em 1632. Com essa máquina, Atwood determinou a aceleração da gravidade (**g**) com uma precisão melhor do que a obtida por intermédio do pêndulo.

Em 1785, o matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) publicou o livro *Nuove Ricerche su l'Equilibrio delle Vòlte* que trata da Estática.

Em 1786, Laplace e Lagrange estudaram a excentricidade total das órbitas planetárias do sistema solar e demonstraram então que ela era constante, ou seja, se a excentricidade de um planeta aumenta, a de outro deve diminuir. Em vista disso, observaram que como o sistema solar não foi perturbado após a sua formação, então sua estabilidade estaria assegurada *ad aeternum.* Concluíram, então, que as perturbações são apenas periódicas, e não seculares, como se supunha a princípio, e que se anulam ao longo do tempo, garantindo, dessa maneira, a estabilidade do sistema solar.

Em 1787, Laplace apresentou sua famosa equação (na notação de hoje): $\Delta V = 0$, em coordenadas cartesianas.

Em 1787, o físico alemão Ernst Florenz Friedrich Chladni (1756-1827) publicou o trabalho intitulado *Entdeckungen über die Theorie des Klanges,* no qual estudou as vibrações de placas (de várias formas geométricas) de vidro e de cobre, encobertas de areia, vibrações essas decorrentes do som de um violino tocado por ele e próximo das extremidades das placas. Chladni observou a estrutura dessas vibrações, analisando a areia reunida ao longo das linhas nodais, onde não havia movimento. Usando esse "método da areia", Chladni estudou, também, as vibrações de hastes prismáticas e cilíndricas.

Em 1788, Lagrange publicou o famoso livro *Mécanique Analytique (Mecânica Analítica)* no qual há uma completa demonstração do princípio da velocidade (deslocamento) virtual, que o tomou, inclusive, como o axioma básico da Estática. Aliás, esse princípio representou mais uma maneira de estudar o equilíbrio de determinadas máquinas simples, como a **balança de Roberval** (dispositivo inventado em 1669) formado de quatro hastes formando um paralelograma de ângulos variáveis; os lados opostos, o superior e o inferior, são capazes de girar em torno de seus pontos médios: nos outros dois verticais estão adaptados os pratos da balança, ou os sistemas envolvendo volantes e eixos de rotação, como, por exemplo, a **polia diferencial de Weston** (dispositivo constituído de duas polias coaxiais de raios diferentes, ligadas a um mesmo eixo, e uma polia móvel) e o **sarilho** ou **cabrestante** (dispositivo composto de um cilindro que gira em torno de um eixo por intermédio de uma manivela). Nesse livro, há um sumário de todo o trabalho no campo da Mecânica desde, sua primeira formalização por Newton em seu *Principia*, de 1687, até a edição do *Mécanique.* No entanto, nesse texto, Lagrange não utilizou nem as construções geométricas de Newton e nem os **princípios** mecânicos formulados por Euler, mas somente operações algébricas (analíticas) sujeitas a procedimentos regulares e uniformes, segundo, aliás, ele próprio advertiu no prefácio. Ainda no *Mécanique*, Lagrange apresentou o seu Princípio Variacional em termos das coordenadas generalizadas $(q_i, \dot{q}_i)$, e através dele e do Cálculo das Variações, obteve a hoje famosa **Equação de Euler-Lagrange**: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$, com $i = 1, 2, 3, ..., n$. Ainda nesse livro, Lagrange estudou o movimento espacial das partículas constituintes do fluido, através de suas trajetórias, estudo esse hoje conhecido como **descrição lagrangeana.**

Em 1789, ao estudar a atração gravitacional entre uma massa pontual que se encontra no interior de um corpo e esse próprio corpo, Laplace demonstrou que sua célebre equação ($\Delta V = 0$), não permanecia mais válida.

Em 1797 o engenheiro italiano Giovanni Battista Venturi (1746-1822) inventou um dispositivo para medir a velocidade do fluxo de um fluido. Ele consiste de um tubo no qual em determinada parte há uma redução de seu diâmetro; esse estreitamento provoca um aumento na velocidade do fluxo com uma respectiva diminuição da pressão. Essa queda de pressão pode ser medida por intermédio de manômetros colocados em três secções do tubo: dois colocados antes e depois do estreitamento e o terceiro colocado no próprio estreitamento.