

Conexão de Blindagem Eletrônica no Espalhamento Rutherford

Humberto Filomeno da Silva, Raul Habesch, Vanderlei Salvador Bagnato

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo

Caixa Postal 369, São Carlos, SP 13560-970, Brazil

Trabalho recebido em 10 de fevereiro de 1996

Calculamos a correção no ângulo de espalhamento de Rutherford devido ao efeito dos elétrons. Este é um problema interessante normalmente não abordado nos livros textos.

No começo deste século o físico inglês Ernest Rutherford desenhou um experimento para avaliar a estrutura atômica com respeito a distribuição de seus constituintes. Para isto usou partículas α como feixe de prova. Essa partícula corresponde ao núcleo do Átomo de Hélio e normalmente é produzida pelo decaimento do Radio. Rutherford não conhecia a estrutura da partícula α , mas assumiu que suas dimensões espaciais eram extremamente pequenas quando comparadas ao tamanho do Átomo.

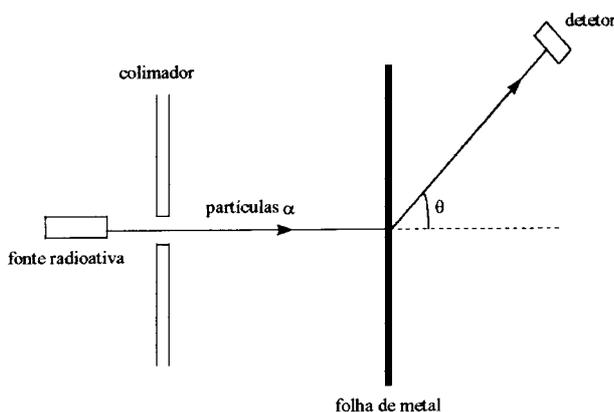


Figura 1. Representação esquemática do experimento de Rutherford.

O esquema do experimento de Rutherford esta indicado na Fig.(1). Uma fina folha de um metal é bombardeada com partículas α e o ângulo de espalhamento (θ) é medido. Desta forma, a distribuição angular do grande número de partículas α espalhadas fornece detalhes importantes sobre a estrutura do Átomo. Na época do experimento já se sabia que os Átomos eram eletricamente neutros e que continham elétrons.

Também já se sabia que os Átomos tinham carga positiva mas não era conhecido como estas cargas estavam distribuídas no seu interior.

Para explicar os resultados experimentalmente observados, Rutherford assumiu um modelo onde a carga positiva do Átomo estava concentrada em uma pequena região do espaço chamada núcleo, dando origem ao Átomo nucleado até hoje usado com modelo.

Os resultados quantitativos do experimento foram obtidos através do espalhamento de uma partícula de carga positiva submetida ao potencial de Coulomb criado pelo núcleo. O núcleo era considerado positivo e fixo no centro do Átomo. É bem estabelecido que em um problema de potencial central, o momento angular é uma constante de movimento (Ref.[1]). Usando a formulação Lagrangeana da mecânica clássica aplicada a este problema é possível mostrar que a equação diferencial para a trajetória da partícula a é a seguinte (Ref.[2])

$$\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = -\frac{D}{2b^2} \quad (1)$$

onde b é o parâmetro de impacto, D é a distância de mínima aproximação ao núcleo para uma colisão frontal e $u(\theta) = 1/r(\theta)$.

A solução geral para a eq. (1) é da seguinte forma

$$\frac{1}{r(\theta)} = A\cos(\theta) + B\sin(\theta) - \frac{D}{2b^2} \quad (2)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno. Definindo o ângulo de espalhamento de tal forma que $\psi + \theta = \pi$, é possível mostrar que (Ref. [2])

$$\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{D}{2b} \quad (3)$$

Como foi originalmente concebido o modelo de Rutherford não leva em consideração a existência de uma densidade de carga negativa ao redor do Átomo. Nesta solução será abordado duas situações que tornam esse modelo mais realista. A primeira situação considera que uma carga negativa de módulo igual a do núcleo esta distribuída em uma camada de espessura infinitesimal, distante R do núcleo. Na segunda situação a carga está distribuída uniformemente dentro de uma esfera de raio R . Este segundo caso é adequado para descrever Átomos que possuem orbitais s na última camada eletrônica como os metais alcalinos.

1) Sistema “Blindado” por uma casca esférica

Imaginemos que ao redor de cada núcleo exista uma casca esférica de carga $-Ze$. De acordo com a lei de Gauss existem duas situações distintas. Para $r > R$, o potencial é constante e a partícula α não “vê” carga no sistema se $b > R$. Isto faz com que sua trajetória seja retilínea. Se $b < R$, até a partícula encontrar a superfície em $r = R$, também não sentirá a presença de carga no sistema. Para $r < R$ o potencial sentido pela partícula será do tipo $\Phi = Ze/r$ devido a ação do núcleo de carga positiva Ze colocado na origem.

Quando a partícula caminha em direção ao sistema núcleo-casca com parâmetro de impacto $b < R$, haverá três regiões distintas de movimento. Antes de entrar na blindagem ($r < R$), a trajetória será retilínea com $y = b$ e $V = Vi$. Dentro da blindagem ($r < R$) a partícula sofre a ação da carga $+Ze$. Após a blindagem ($r > R$), o movimento volta a ser retilíneo. Como a espessura da camada de carga negativa é considerada desprezível, deverá existir uma continuidade entre a trajetória interna e externa a esfera de raio R .

A equação da trajetória para $r < R$ será dada pela eq. (2) onde A e B devem ser determinados de acordo com as condições de contorno em $r = R$ que são

$$\theta_0 = \arcsen\left(\frac{b}{R}\right), \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \frac{\cos(\theta_0)}{b} \quad (4)$$

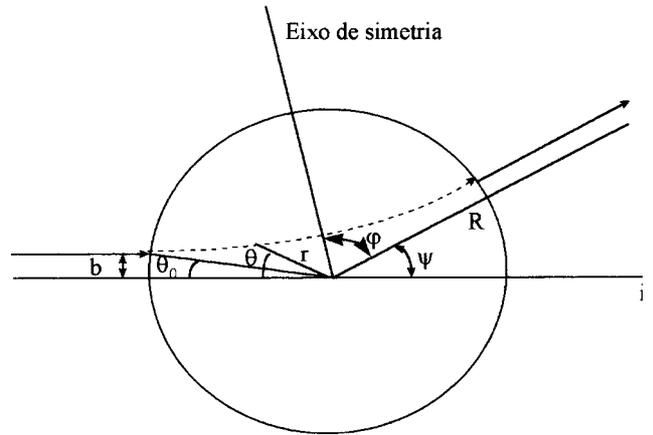


Figura 2. Geometria utilizada para o problema com a blindagem.

Em $r = R$, $\theta = \theta_0$ e a eq. (2) poderá ser escrita como

$$\frac{1}{R} = A\cos(\theta_0) + B\sin(\theta_0) - \frac{D}{2b^2} \quad (5)$$

Usando a definição de θ_0 de acordo com a eq.(4), a eq.(5) torna-se

$$\frac{1}{R} = A\frac{b}{A} + B\frac{(R^2 - b^2)^{1/2}}{R} - \frac{D}{2b^2} \quad (6)$$

Utilizando a segunda condição de contorno fornecida na eq. (5), encontra-se que a outra equação satisfeita por A e B será

$$\frac{\cos(\theta_0)}{b} = A\frac{(R^2 - b^2)^{1/2}}{R} - B\frac{b}{R} \quad (7)$$

Resolvendo as eqs.(6) e (7) para A e B e substituindo o resultado na eq.(2) é encontrado que

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \left(\frac{1}{b} + \frac{D}{2bR}\right)\sin(\theta) + \frac{D}{2}\frac{(R^2 - b^2)^{1/2}}{b^2R}\cos(\theta) - \frac{D}{2b^2} \quad (8)$$

Como o potencial é esfericamente simétrico, o problema apresenta um plano de simetria conforme indicado na Fig.(2). Se a partícula inverter sua velocidade, deve voltar pela mesma trajetória descrita pelas equações acima após um rebatimento que leva a assíntota de saída para a de entrada. O plano de simetria forma um ângulo φ com as assíntotas. O ponto da trajetória que corta o plano de simetria não deve ter velocidade radial. Desta forma em $\theta = \varphi$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=\varphi} = 0 \quad (9)$$

Como $\pi - \psi = 2\varphi$, implica que $\text{sen}(\varphi) = \cos(\psi/2)$ e $\cos(\varphi) = \text{sen}(\psi/2)$. Usando a eq.(8) na eq. (9), é encontrado que o ângulo de espalhamento é dado por

$$\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{D}{2b} \frac{\left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right)^{1/2}}{1 + \frac{D}{2R}} = \frac{D}{2b} f \quad (10)$$

onde f é chamado de fator de blindagem. Este fator é tanto menor quanto mais b estiver próximo de R , ou seja, quanto menos a partícula viaja dentro da esfera blindada.

2) Blindagem por uma distribuição uniforme de carga

Como segundo modelo, vamos considerar uma distribuição de carga volumétrica e uniforme blindando o núcleo. Neste caso as cargas elétricas negativas estão distribuídas uniformemente dentro de uma esfera de raio R . A densidade de carga será dada pela carga total dividido pelo volume de uma esfera de raio R

$$\rho = -\frac{eZ}{\frac{4\pi}{3}R^3} = -\frac{3eZ}{4\pi R^3} \quad (11)$$

Quando a partícula α está dentro da esfera em uma posição r , a carga positiva do núcleo será blindada por aqueles elétrons dentro desta esfera. Portanto uma carga de sinal contrário e de igual valor deverá ser retirado da carga original do núcleo para que o problema possa ser descrito da mesma forma que no caso anterior. Se isso é feito, na posição r a partícula α sentirá uma carga efetiva dada por

$$q_{ef} = Ze + \left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)\rho = Ze\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \quad (12)$$

fazendo com que o potencial gerado pela carga efetiva sobre a partícula seja dado por

$$V(r) = \frac{Ze}{r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \quad (13)$$

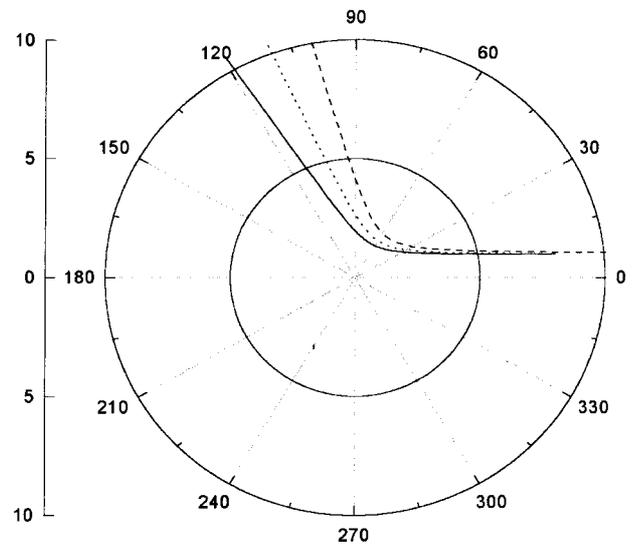


Figura 3. Comparação dos modelos para $b=0.5$, $D=2.0$ e $R=10.0$. - - - - Rutherford Sistema blindado — Distribuição uniforme.

Seguindo o procedimento da Ref. (2), a nova equação diferencial para a trajetória será dada

$$\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = -\frac{D}{2b^2} \left(1 - \frac{2}{u^3 R^3}\right), \quad (14)$$

onde $u(\theta)$, D e b possuem a mesma identificação dos casos anteriores. A eq. (14) foi resolvida numericamente para que a trajetória da partícula pudesse ser determinada e o resultado obtido mostra também uma correção no ângulo de espalhamento. Para comparação, a Fig. (3) mostra diferentes trajetórias da partícula a nas várias aproximações usadas na solução deste problema.

Referências

1. Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, 2a. Edição.
2. Eisberg e Resnick, *Física Quântica-Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, 7a. edição, Editora Campus Ltda, 1979.