

## O Alcance Máximo de um Projétil: uma Derivação Algébrica

Christovam Mendonça e José Pedro Rino

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade Federal de São Carlos*

*Via Washington Luiz Km 235, São Carlos, SP 13565-905, Brazil*

Trabalho recebido em 20 de julho de 1996

Sugere-se um método que permite derivar a expressão do ângulo de disparo que resulta no máximo alcance no problema geral do movimento de projéteis sem atrito, sem o uso do cálculo diferencial.

### Abstract

One suggests a procedure for the derivation of the launching angle yielding the maximum range in the general problem of frictionless projectile motion, without resorting to differential calculus.

Este artigo sugere um esquema para contornar o uso do cálculo diferencial no problema da determinação do ângulo  $\theta$  que maximiza o alcance  $A$  de um projétil disparado com velocidade inicial  $\nu_0$  a partir de uma altura  $h$  acima do nível do chão, desprezando forças de atrito. A operação usual de colocar  $dA/d\theta$  igual a zero não é assimilada facilmente por estudantes novatos, e além disso a equação trigonométrica resultante não é resolvida em poucas passagens. Na sua totalidade o procedimento pode assustar os calouros, principalmente aqueles que alegam entender a física mas se atrapalham com a matemática.

Ao tratar o movimento de projéteis em cursos introdutórios, temos adotado uma abordagem muito simples que não usa mais do que a condição para a existência de raízes reais de uma equação algébrica do segundo grau. Este método é conveniente para ilustrar a ponte entre a análise abstrata da existência de raízes e sua interpretação física.

Começamos com a equação para a trajetória

$$y = h + \tan\theta x - \frac{g}{2\nu_0^2 \cos^2\theta} x^2 \quad (1)$$

O projétil atinge o solo em  $x = A$ , onde  $y = 0$ . Esta condição leva à equação do segundo grau para  $\tan \theta$ :

$$\tan^2\theta - \frac{2\nu_0^2}{gA} \tan\theta + 1 - \frac{2\nu_0^2 h}{gA^2} = 0 \quad (2)$$

Uma vez que se especifique a velocidade inicial  $\nu_0$  e o alcance  $A$  desejado, esta equação pode ter i) duas raízes complexas, ii) duas raízes reais distintas, ou iii) duas raízes reais e idênticas. No primeiro caso  $A$  está além do máximo alcance atingível por este projétil, e nenhum ângulo de elevação fará com que ele atinja o alvo. O segundo caso mostra que se um ponto no nível do solo está abaixo do nível máximo ele pode ser atingido por duas inclinações diferentes do canhão. Finalmente, o terceiro caso corresponde ao colapso das duas raízes reais em uma única, quando o discriminante da Eq. (2) é nulo (ver Fig.1). A analogia com o caso mais simples do ponto de disparo e alvo colocados no mesmo nível, onde ângulos complementares de lançamento resultam no mesmo alcance, é útil para efeito de comparação.

Chamando de  $A_m$  o valor máximo de  $A$ ,  $\theta_m$  o ângulo correspondente, e fazendo o discriminante  $\Delta = 0$ :

$$\Delta = \left( \frac{2\nu_0^2}{gA_m} \right)^2 - 4 \left[ 1 - \frac{2\nu_0^2 h}{gA_m^2} \right] = 0 \quad (3)$$

Esta equação pode ser resolvida para  $A_m$  e o resultado é

$$A_m = \frac{\nu_0}{g} \sqrt{\nu_0^2 + 2gh} . \quad (4)$$

O ângulo de disparo  $\theta_m$  é dado pela Eq. (2) quando  $\Delta = 0$ :

$$\tan\theta_m = \frac{\nu_0^2}{gA_m} \quad (5)$$

que pode ser combinada com a Eq. (4), resultando em

$$\tan\theta_m = \frac{\nu_0}{\sqrt{\nu_0^2 + 2gh}} \quad (6a)$$

ou

$$\cotan\theta_m = \sqrt{1 + \frac{2gh}{\nu_0^2}} . \quad (6b)$$

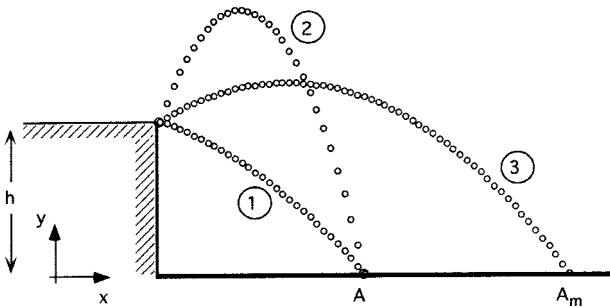


Figura 1. Um projétil disparado de uma elevação pode atingir o ponto  $x=A$  seguindo as trajetórias 1 ou 2, correspondente às duas soluções reais distintas da Eq. (2). Quando  $\Delta = 0$  as duas curvas coincidem em 3.

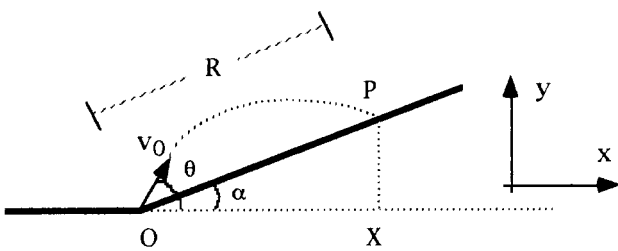


Figura 2. Um projétil é disparado do ponto O, na base da rampa, atingindo o ponto P.

Um problema mais difícil encontrado em livros textos que pode ser resolvido pelo mesmo procedimento é o de achar o ângulo que maximiza o alcance de um projétil disparado da base de uma rampa inclinada com ângulo  $\alpha$  (ver Fig. 2). Se chamarmos  $x$  a coordenada horizontal do ponto P, podemos combinar a equação da trajetória com a do plano da rampa, obtendo a relação

$$x \tan\theta - \frac{gx^2}{2\nu_0^2} (\tan^2\theta + 1) = x \tan\alpha \quad (7)$$

que se transforma na equação do segundo grau para  $\tan\theta$

$$\tan^2\theta - \frac{2\nu_0^2}{gx} \tan\theta + \frac{2\nu_0^2}{gx} \tan\alpha + 1 = 0 . \quad (8)$$

Pelo mesmo raciocínio concluímos que quando seu discriminante for nulo, seu deslocamento horizontal será máximo. Então, para  $x = x_m$

$$\Delta = \left( \frac{2\nu_0^2}{gx_m} \right)^2 - 4 \left[ \frac{2\nu_0^2 \tan\alpha}{gx_m} + 1 \right] = 0 . \quad (9)$$

Resolvendo para  $x_m$  chega-se a outra equação do segundo grau

$$x_m^2 + 2 \frac{\nu_0^2 \tan\alpha}{g} x_m - \left( \frac{\nu_0^2}{g} \right)^2 = 0 , \quad (10)$$

que possui uma raiz real positiva

$$x + m = \frac{\nu_0^2}{g} (\sec\alpha - tg\alpha) = \frac{\nu_0^2}{g} \frac{1 - \text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} . \quad (11)$$

É conveniente neste ponto reescrever a Eq. (11) primeiro em termos do complemento  $\beta = \pi/2 - \alpha$ ,

$$x_m = \frac{\nu_0^2}{g} \frac{1 - \text{cos}\beta}{\text{sen}\beta} , \quad (12)$$

e depois em termos de  $\beta/2$ ,

$$x_m = \frac{\nu_0^2}{g} \frac{2\text{sen}^2(\beta/2)}{2\text{sen}(\beta/2)\text{cos}(\beta/2)} = \frac{\nu_0^2}{g} \tan(\beta/2) . \quad (13)$$

O ângulo de disparo é dado pela Eq. (8), com as condições expressas pelas Eqs. (9) e (13), resultando em

$$\tan\theta_m = \frac{\nu_0^2}{g} x_m = \cotan(\beta/2) , \quad (14)$$

de modo que

$$\theta_m = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} . \quad (15)$$

A distância atingida rampa acima será

$$R_m = \frac{x_m}{\text{cos}\alpha} = \frac{x_m}{2\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\text{cos}\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\nu_0^2}{2g\text{cos}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} , \quad (16)$$

ou

$$R_m = \frac{\nu_0^2}{2g \operatorname{sen}^2(\pi/4 + \alpha/2)}. \quad (17)$$

Esta abordagem torna mais acessível aos estudantes a solução destes e de outros problemas similares re-

querendo a determinação de valores extremos. Ao evitar o uso do cálculo diferencial, com o qual a grande maioria não está ainda suficientemente adestrada, usa-se uma linguagem que lhes é mais familiar para combinar o raciocínio físico com manipulações matemáticas.