Propagação e Alargamento de Pacotes de Onda

(Propagation and Spread of Wave Packets)

E. K. Lenzi, L. C. Malacarne e R. S. Mendes

Departamento de Física - Fundação Universidade Estadual de Maringá

Av. Colombo, 5790 - CEP 87020-900 - Maringá - PR , Brasil

Trabalho recebido em 31 de março de 1996

Neste trabalho introduzimos uma função geratriz para analisar a propagação e o alargamento de pacotes de onda. Usando a representação de Schrödinger obtemos esta função para alguns sistemas físicos simples.

Abstract

In this work we introduce a generatrix function to analyse the propagation and spread of wave packets. In the Schrödinger representation we calculate this function for simple physical systems.

I. Introdução

Uma característica marcante da Mecânica Quântica[3, 4, 7] é as suas diferenças em relação a Mecânica Clássica, em particular, no tocante as medidas da posição e do momento linear de uma partícula. Para o entendimento destas medidas em um tempo arbitrário, torna-se importante conhecermos a propagação e o alargamento de pacotes de ondas. Por sua vez, esta informação é obtida diretamente da evolução temporal dos valores médios de potências das grandezas físicas e de seus desvios n-ésimos.

Para ressaltarmos a relevância dos valores médios e desvios, observemos primeiramente que a trajetória do centro do pacote de onda descreve a trajetória de uma partícula clássica somente se $< \nabla V(\hat{x}) >= \nabla V(x)|_{x=<\hat{x}>}$, conforme descrito pelo teorema de Erhenfest[2]. No caso geral, podemos determinar a diferença entre a trajetória clássica e a trajetória do centro do pacote de onda expressando o valor médio da força em termos de $\langle\hat{x}\rangle^n$,

$$\left\langle \left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} \right\rangle = \left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\langle\hat{x}\rangle} + \left.\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=\langle\hat{x}\rangle} \langle(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)\rangle + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=\langle\hat{x}\rangle} \left\langle(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)^2\right\rangle + \ldots \tag{1}$$

Fica claro, portanto, que o estudo do alargamento de pacotes de onda é importante para informar o quanto as soluções da equações de Newton da mecânica clássica desviam dos respectivos resultados quânticos. Além disso, este estudo são necessários para uma descrição completa da dinâmica quântica.

Recentemente, este tema foi abordado[6] usando a representação de Heisenberg. O autor apresenta as soluções das equações de Heisenberg para os operadores posição e momento para alguns sistemas simples. A seguir, valores médios destes operadores são calculados de modo a obter as expressões gerais para seus desvios quadráticos, independendo da forma do estado inicial. Quando este procedimento é aplicado para o cálculo dos valores médios e dos desvios n-ésimos, usando uma função de onda específica, necessitamos calcular várias integrais. Apresentaremos, neste trabalho, um outro método para obter os referidos valores médios e desvios, que envolvem apenas uma integração, a solução de uma equação diferencial e posteriores derivações. Dada a equivalência entre as representações de Heisenberg e Schrödinger, optamos pela última, por ela ser mais comumente empregada nos vários livros textos. Ressaltamos que a quantidade de operações matemáticas envolvidas em ambas as representações é basicamente equivalente. Gostaríamos de frisar que o objetivo deste trabalho não é discutir resultados já encontrados na literatura, mas o de apresentar uma maneira sistemática para calcular de forma completa os aspectos relacionados a propagação e o alargamento de pacotes de onda.

Na primeira seção, expomos alguns conceitos elementares de mecânica quântica, que servem essencialmente para fixar a notação utilizada. A seguir, introduziremos a função geratriz $Z(\alpha,\beta,t)$, que é o objeto fundamental para o cálculo dos n-ésimos valores médios. Na segunda seção, aplicamos a função geratriz para determinarmos alguns valores médios de potências e desvios n-ésimos da coordenada e do momento linear em alguns sistemas físicos simples. Devido a grande aplicação da álgebra de operadores no contexto da mecânica quântica, optamos por empregá-la sistematicamente no decorrer deste trabalho. Incluímos, também, um apêndice sobre operadores, onde são apresentadas algumas relações utilizadas no texto.

II. Função Geratriz

O estado de um sistema quântico, num instante t, é representado matematicamente por uma função de onda $\psi_t(x)$. Sendo que $\psi_t^*\psi_t$ determina a distribuição de probabilidade para os diversos valores das coordenadas. Usaremos, portanto, a condição de normalização,

$$\int \psi_t^* \psi_t \, dx = 1 \; . \tag{2}$$

De uma maneira geral, o valor médio de uma grandeza física A, $\left\langle \hat{A} \right\rangle_{\psi_t}$, num estado ψ_t é dado por

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle_{\psi_t} = \int \psi_t^* \hat{A} \, \psi_t \, dx \; , \tag{3}$$

onde $\hat{A}$ é o operador correspondente a grandeza física. Empregaremos, também, $\Delta^n_{\psi_t} A$ para simbolizar o desvio n-ésimo de A no estado ψ_t, isto é,

$$\Delta^n_{\psi_t} A = \left\langle \left(\hat{A} - < \hat{A} >_{\psi_t} \right)^n \right\rangle_{\psi_t} \; . \tag{4}$$

A evolução temporal da função de onda ψ_t é determinada pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = \hat{H} \psi_t \; , \tag{5}$$

onde o operador $\hat{H}$ é a Hamiltoniana do sistema. Em particular, quando consideramos o movimento unidimensional de uma partícula não relativística de massa m e sujeita a uma energia potencial $V(x,t)$, temos

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x},t) \; , \tag{6}$$

com $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ e $\hat{x} = x$ sendo os operadores momento linear e posição, respectivamente. A partir de (5) podemos obter a equação que dita a evolução temporal dos valores médios[3, 4, 7],

$$\frac{d}{dt} \left\langle \hat{A} \right\rangle_{\psi_t} = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\hat{A}, \hat{H} \right] \right\rangle_{\psi_t} + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle_{\psi_t} \; , \tag{7}$$

onde o comutador de $\hat{A}$ com $\hat{H}$ é definido como $\left[\hat{A}, \hat{H} \right] = \hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}$.

Neste trabalho, estamos interessados, basicamente no cálculo dos valores médios de $\langle \hat{x}^n \rangle_{\psi_t}$, $\langle \hat{p}^n \rangle_{\psi_t}$, $\Delta^n_{\psi_t} x$ e $\Delta^n_{\psi_t} p$. Por outro lado, seria muito trabalhoso se para cada $\langle \hat{x}^n \rangle_{\psi_t}$ ou $\langle \hat{p}^n \rangle_{\psi_t}$ que fossemos determinar tivessemos que calcular uma integral do tipo $\langle \hat{A} \rangle_{\psi_t} = \int \psi_t^* \hat{A} \; \psi_t \; dx$. Contornaremos este problema introduzindo uma função geratriz para os valores médios $\langle \hat{x}^n \rangle_{\psi_t}$ e $\langle \hat{p}^n \rangle_{\psi_t}$. De fato, a função

$$Z(\alpha,\beta,t) = \left\langle \, e^{\alpha \hat{x}} \, e^{\beta \hat{p}} \, \right\rangle_{\psi_t} \tag{8}$$

serve para tal propósito, pois

$$\langle \hat{x}^n \hat{p}^s \rangle_{\psi_t} = \left\langle \hat{x}^n \, e^{\alpha \hat{x}} \, \hat{p}^s \, e^{\beta \hat{p}} \right\rangle_{\psi_t} \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} = \frac{\partial^{n+s}}{\partial \alpha^n \partial \beta^s} Z(\alpha,\beta,t) \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} \; . \tag{9}$$

Desta forma, usando a expansão binomial, podemos encontrar expressões para os valores médios dos desvios n-ésimos de x e p a partir da função geratriz,

$$\begin{aligned}\Delta^n_{\psi_t}x &= \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\left\langle \hat{x}^{n-s}\right\rangle_{\psi_t}\langle\hat{x}\rangle^s_{\psi_t}\\ &= \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\frac{\partial^{n-s}}{\partial\alpha^{n-s}}Z(\alpha,\beta,t)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}Z(\alpha,\beta,t)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\right)^s,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\Delta^n_{\psi_t}p = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\frac{\partial^{n-s}}{\partial\beta^{n-s}}Z(\alpha,\beta,t)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}Z(\alpha,\beta,t)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\right)^s. \tag{11}$$

Vemos, então, que o cálculo dos valores médios e desvios n-ésimos, contrariamente a possibilidade anterior, é reduzido a uma integração e posteriores derivações.

III. Aplicações

Na aplicação das fórmulas (9), (10) e (11) para um sistema físico concreto, necessitamos determinar $Z(\alpha,\beta,t)$. A seguir, obteremos esta função para alguns casos específicos.

A. Partícula Livre

Primeiramente, vamos obter a equação que a função geratriz satisfaz para o caso de uma partícula livre, $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$. Para tal, usemos a equação (7),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}Z(\alpha,\beta,t) &= \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[e^{\alpha\hat{x}}e^{\beta\hat{p}},\frac{\hat{p}^2}{2m}\right]\right\rangle_{\psi_t}\\ &= \frac{1}{i\hbar}\left\langle e^{\alpha\hat{x}}\,\frac{i\alpha\hbar}{m}\hat{p}\,e^{\beta\hat{p}} + e^{\alpha\hat{x}}\,\frac{\alpha^2\hbar^2}{2m}\,e^{\beta\hat{p}}\right\rangle_{\psi_t}.\end{aligned} \tag{12}$$

Para obtermos a última igualdade empregamos a relação (37) e a expressão $[\exp(\alpha\hat{x}),\hat{p}] = i\hbar\alpha\exp(\alpha\hat{x})$, que é obtida de (40) e (44). Usando a equação (9) em (12) podemos escrever a equação diferencial para a evolução temporal de $Z(\alpha,\beta,t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(\alpha,\beta,t) = \left(-\frac{i\hbar\alpha^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)Z(\alpha,\beta,t)\,. \tag{13}$$

Uma maneira interessante de obter a solução da equação anterior é notarmos que

$$\begin{aligned}Z(\alpha,\beta,\tau) &= \exp\left(\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)Z(\alpha,\beta,t)\Big|_{t=0}\\ &= \exp\left[\tau\left(-\frac{i\hbar\alpha^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]Z(\alpha,\beta,0)\\ &= \exp\left(\frac{-i\hbar\alpha^2\tau}{2m}\right)Z(\alpha,\beta+\frac{\alpha\tau}{m},0)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Notemos que na primeira e na última igualdades usamos a relação (46). Na segunda igualdade empregamos a relação operatorial contida em (13).

A segunda igualdade de (14) nos diz claramente que $Z(\alpha,\beta,t)$ pode ser obtido de $Z(\alpha,\beta,0)$. Isto faz com que $\langle\hat{p}^n\rangle_{\psi_t}$, $\Delta^n_{\psi_t}p$, etc possam ser expressos em termos de seus valores em $t=0$. Observemos que estas considerações permanecem válidas para um sistema físico qualquer.

Passemos a aplicar a fórmula (14) para obtermos $\langle x^n \rangle_{\psi_t}$, $\langle p^n \rangle_{\psi_t}$, etc. Substituindo (14) em (9), temos

$$\langle \hat{p}^n \rangle_{\psi_t} = \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} Z(0,\beta,0) \Big|_{\beta=0} = \langle \hat{p}^n \rangle_{\psi_0} , \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^n \rangle_{\psi_t} &= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \frac{\partial^{n-s}}{\partial \alpha^{n-s}} Z(\alpha, \beta + \frac{\alpha \tau}{m}, 0) \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} \frac{\partial^s}{\partial \alpha^s} \exp\left(\frac{-i\hbar\alpha^2\tau}{2m}\right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{s=0}^{n}{}' \binom{n}{s} \left[\sum_{r=0}^{n-s} \binom{n-s}{r} \left(\frac{\tau}{m}\right)^r \left\langle x^{n-s-r} p^r \right\rangle_{\psi_0} \right] \frac{s!}{(\frac{s}{2})!} \left(\frac{-i\hbar\tau}{2m}\right)^{\frac{s}{2}} . \end{aligned} \tag{16}$$

Nesta última expressão, empregamos $\sum'$ para denotar a somatória em s par. Partindo de (11) e (15) constatamos que

$$\begin{aligned} \Delta^n_{\psi_t} p &= \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{\partial^{n-s}}{\partial \beta^{n-s}} Z(0,\beta,0) \Big|_{\beta=0} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} Z(0,\beta,0) \Big|_{\beta=0} \right)^s \\ &= \Delta^n_{\psi_0} p . \end{aligned} \tag{17}$$

Os resultados (15) e (17) dizem, simplesmente, que $\langle \hat{p}^n \rangle_{\psi_t}$ e $\Delta^n_{\psi_t} p$ não dependem do tempo. Uma expressão geral para $\Delta^n_{\psi_t} x$ é relativamente extensa, por isso limitaremos a apresentar somente o desvio quadrático. Sendo assim, de (10) e (16) temos

$$\langle x \rangle_{\psi_t} = \langle x \rangle_{\psi_0} + \langle p \rangle_{\psi_0} \frac{\tau}{m} , \tag{18}$$

$$\Delta^2_{\psi_t} x = \Delta^2_{\psi_0} x + \left(2 \langle xp \rangle_{\psi_0} - i\hbar - 2 \langle x \rangle_{\psi_0} \langle p \rangle_{\psi_0} \right) \frac{\tau}{m} + \Delta^2_{\psi_0} p \frac{\tau^2}{m^2} . \tag{19}$$

Observemos, agora, que as expressões para $\langle \hat{x} \rangle_{\psi_t}$ e $\langle \hat{p} \rangle_{\psi_t}$ são idênticas ao caso clássico. Isto sempre ocorre quando a Hamiltoniana é, no máximo, quadrática em $\hat{x}$ e $\hat{p}$. Entretanto, estas observações não são verdadeiras para $\langle \hat{x}^n \rangle_{\psi_t}$ e $\langle \hat{p}^n \rangle_{\psi_t}$ com $n > 1$. Outra informação importante está contida em $\Delta^2_{\psi_t} x$, pois $\Delta x = \sqrt{\Delta^2_{\psi_t} x}$ informa essencialmente a largura do pacote de onda, que é proporcional a τ para um intervalo de tempo suficientemente grande. É interessante ressaltar que, neste limite o alargamento do pacote de onda coincide com a dispersão de um grupo de partículas clássicas com a velocidade de dispersão $\Delta p/m$. Além disso, o segundo termo do lado direito de (19) é nulo quando ψ_0 é um estado Gaussiano.

B. Partícula num Campo Uniforme

Vamos, agora, analisar o caso de uma partícula num campo uniforme, $\hat{H} = \hat{p}^2/2m - F\hat{x}$. A equação diferencial para $Z(\alpha,\beta,t)$ pode ser obtida de maneira análoga ao caso da partícula livre,

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(\alpha,\beta,t) = \left(-\frac{i\hbar\alpha^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}\frac{\partial}{\partial \beta} + \beta F \right) Z(\alpha,\beta,t) . \tag{20}$$

Observemos que a contribuição extra, βF, surgiu ao levarmos em conta o termo $-F\hat{x}$. Realmente, ao empregarmos a igualdade $[\hat{x}, \exp(\beta\hat{p})] = i\hbar\beta \exp(\beta\hat{p})$, obtida de (40) e (44), constatamos que

$$\frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[e^{\alpha\hat{x}} e^{\beta\hat{p}}, -F\hat{x} \right] \right\rangle_{\psi_t} = \frac{F}{i\hbar} \left\langle e^{\alpha\hat{x}} \left[\hat{x}, e^{\beta\hat{p}} \right] \right\rangle_{\psi_t} = \beta F Z(\alpha,\beta,t) . \tag{21}$$

Vamos obter a evolução temporal para $Z(\alpha,\beta,t)$ procedendo analogamente ao caso da equação (14),

$$\begin{aligned} Z(\alpha,\beta,\tau) &= \exp\left(\tau \frac{\partial}{\partial t}\right) Z(\alpha,\beta,t) \Big|_{t=0} \\ &= \exp\left[\tau \left(-\frac{i\hbar\alpha^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}\frac{\partial}{\partial \beta} + F\beta \right) \right] Z(\alpha,\beta,0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\frac{i\hbar\alpha^2\tau}{2m}\right)\exp\left(\frac{\alpha\tau}{m}\frac{\partial}{\partial\beta}+F\beta\tau\right)Z(\alpha,\beta,0)\\
&= \exp\left(-\frac{i\hbar\alpha^2\tau}{2m}+\beta F\tau+\frac{\alpha F\tau^2}{2m}\right)\exp\left(\frac{\alpha\tau}{m}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)Z(\alpha,\beta,0)\\
&= \exp\left(-\frac{i\hbar\alpha^2\tau}{2m}+\beta F\tau+\frac{\alpha F\tau^2}{2m}\right)Z(\alpha,\beta+\frac{\alpha\tau}{m},0) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Na passagem da terceira para a quarta igualdade empregamos a relação (41) e (44) com $\hat{A}=F\beta\tau$ e $\hat{B}=\frac{\alpha\tau}{m}\frac{\partial}{\partial\beta}$.

Quando usamos (22) em (9) podemos verificar que

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{p}^n\rangle_{\psi_t} &= \frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\left[e^{\beta F\tau}Z(0,\beta,0)\right]\Big|_{\beta=0}\\
&= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{\partial^{n-s}}{\partial\beta^{n-s}}e^{\beta F\tau}\Big|_{\beta=0}\frac{\partial^s}{\partial\beta^s}Z(0,\beta,0)\Big|_{\beta=0}\\
&= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(F\tau)^{n-s}\langle\hat{p}^s\rangle_{\psi_0}\ , \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{x}^n\rangle_{\psi_t} &= \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left[\exp\left(\frac{-i\hbar\alpha^2\tau}{2m}+\frac{\alpha F\tau^2}{2m}\right)Z(\alpha,\beta+\frac{\alpha\tau}{m},0)\right]\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\\
&= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{\partial^{n-s}}{\partial\beta^{n-s}}Z(\alpha,\beta+\frac{\alpha\tau}{m},0)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\times\\
&\quad\times\frac{\partial^s}{\partial\beta^s}\exp\left(\frac{-i\hbar\alpha^2\tau}{2m}+\frac{\alpha F\tau^2}{2m}\right)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} \qquad (24)\\
&= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\left[\sum_{r=0}^{n-s}\left(\frac{\tau}{m}\right)^r\binom{n-s}{r}\left\langle x^{n-s-r}p^r\right\rangle_{\psi_0}\right]\left(\frac{i\hbar\tau}{2m}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{H_s(x)}{s!}\ .
\end{aligned}
$$

Na última passagem, usamos a relação entre os polinômios de Hermite, $H_s(x)$, e sua função geratriz[1],

$$
e^{-\xi^2+2\xi x}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{H_s(x)}{s!}\xi^s\ , \qquad (25)
$$

com $\xi=\left(\frac{i\hbar\tau}{2m}\right)^{1/2}\alpha$ e $x=\left(\frac{F\tau^{3/2}}{(8i\hbar m)^{1/2}}\right)$. Usando (23) em (11) verificamos que

$$
\Delta^n_{\psi_t}p=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\left[\sum_{r=0}^{n-s}\binom{n-s}{r}(F\tau)^{n-s-r}\langle\hat{p}^r\rangle_{\psi_0}\right]\left(\langle\hat{p}^r\rangle_{\psi_0}+F\tau\right)^s. \qquad (26)
$$

Novamente, vamos explicitar algumas relações importantes sobre o alargamento e propagação para um pacote de onda genérico,

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle_{\psi_t} &= \langle\hat{x}\rangle_{\psi_0}+\langle\hat{p}\rangle_{\psi_0}\frac{\tau}{m}+\frac{F\tau^2}{2m}\ , \qquad (27)\\
\langle\hat{p}\rangle_{\psi_t} &= \langle\hat{p}\rangle_{\psi_0}+F\tau\ , \qquad (28)\\
\Delta^2_{\psi_t}x &= \Delta^2_{\psi_0}x+\left(2\langle\hat{x}\hat{p}\rangle_{\psi_0}-i\hbar-2\langle\hat{x}\rangle_{\psi_0}\langle\hat{p}\rangle_{\psi_0}\right)\frac{\tau}{m}+\Delta^2_{\psi_0}p\frac{\tau^2}{m^2}\ , \qquad (29)\\
\Delta^2_{\psi_t}p &= \Delta^2_{\psi_0}p\ . \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Notemos que as expressões para estes desvios quadráticos coincidem com aquelas da partícula livre. Também podemos verificar que, assim como no caso da partícula livre, $\Delta^n_{\psi_t}p$ independe do tempo. Estes fatos nos conduzem a uma conclusão importante: uma força constante atuando sobre uma partícula não interfere em suas dispersões, quando comparadas com as de uma partícula livre.

C. Outros Sistemas

Um outro exemplo é o oscilador harmônico, $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{x}^2/2$. A correspondente função geratriz, como podemos verificar, satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(\alpha,\beta,t) = \left(\frac{\alpha}{m}\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{i\hbar\alpha^2}{2m} - m\omega^2\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{i\hbar m\omega^2\beta^2}{2}\right) Z(\alpha,\beta,t) \ , \tag{31}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} Z(\alpha,\beta,t) &= \exp\left\{\frac{i\hbar}{2}\left[\left(m\omega\beta^2 - \frac{\alpha^2}{m\omega}\right)\sin\omega t \cos\omega t + 2\alpha\beta\sin^2\omega t\right]\right\} \times \\ &\times Z\left(\alpha\cos\omega t - m\omega\beta\sin\omega t, \beta\cos\omega t + \frac{\alpha}{m\omega}\sin\omega t, 0\right) . \end{aligned} \tag{32}$$

Se usarmos as equações (9), (10) e (11) com a função acima é possível obtermos os diversos valores médios e seus respectivos devios. Em particular, não é difícil constatar que

$$\langle\hat{x}\rangle_{\psi_t} = \langle\hat{x}\rangle_{\psi_0}\cos\omega t + \frac{\langle\hat{p}\rangle_{\psi_0}}{m\omega}\sin\omega t \ , \tag{33}$$

$$\langle\hat{p}\rangle_{\psi_t} = \langle\hat{p}\rangle_{\psi_0}\cos\omega t - m\omega\langle\hat{x}\rangle_{\psi_0}\sin\omega t \ , \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2_{\psi_t}x &= \Delta^2_{\psi_0}x\cos^2\omega t + \Delta^2_{\psi_0}p\,\frac{\sin^2\omega t}{m^2\omega^2} \\ &+ \left(\langle\hat{x}\hat{p}\rangle_{\psi_0} - \frac{i\hbar}{2} - \langle\hat{x}\rangle_{\psi_0}\langle\hat{p}\rangle_{\psi_0}\right)\frac{\sin 2\omega t}{m\omega} \ , \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2_{\psi_t}p &= \Delta^2_{\psi_0}p\cos^2\omega t + \Delta^2_{\psi_0}x\ m^2\omega^2\sin^2\omega t \\ &- \left(\langle\hat{x}\hat{p}\rangle_{\psi_0} - \frac{i\hbar}{2} - \langle\hat{x}\rangle_{\psi_0}\langle\hat{p}\rangle_{\psi_0}\right) m\omega\sin 2\omega t \ . \end{aligned} \tag{36}$$

Como podemos ver, estas expressões são periódicas no tempo. Além disso, constatamos que $\Delta^2_{\psi_t}x\ \Delta^2_{\psi_t}p$ é finito, mostrando que o produto das incertezas da posição e do momento não pode ser arbitrariamente grande, contrariamente aos casos anteriores.

Para sistemas mais complexos não é possível, em geral, resolver a equação para $Z(\alpha,\beta,t)$ exatamente, assim como, não é conhecida a solução exata para a equação de Schrödinger para tais sistemas. Por outro lado, é de se esperar que seja possível aplicar o método discutido para o caso de sistemas não tão complexos, como por exemplo, o átomo de hidrogênio. Numa situação geral, onde não existam soluções exatas, seria natural fazermos aproximações, por exemplo, aplicarmos técnica de teoria de perturbações. Uma outra possível extensão do método seria empregarmos diferentes funções geratrizes para calcularmos os desvios de outras grandezas físicas, por exemplo, o momento angular. Deste modo, outras aplicações e generalizações do método exposto estão ainda em aberto, podendo ser um problema interessante para o leitor.

Apêndice - Álgebra de Operadores

Neste apêndice, apresentaremos alguns resultados importantes sobre operadores que são empregados no texto e que podem ser facilmente encontrados na literatura[2, 3, 4, 5]. Primeiramente, usando a definição de comutadores,

$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$, podemos verificar diretamente as relações

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=-\left[\hat{B},\hat{A}\right] \ , \tag{37}$$

$$\left[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right] \ , \tag{38}$$

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}+\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] \ . \tag{39}$$

Passemos a obter alguns resultados menos imediatos para o caso de dois operadores que satisfazem $\left[\left[\hat{A},\hat{B}\right],\hat{A}\right]=0$ e $\left[\left[\hat{A},\hat{B}\right],\hat{B}\right]=0$. Se $F(\hat{B})=\sum_n a_n\hat{B}^n$, podemos verificar, usando as propriedades anteriores, que

$$\begin{aligned}\left[\hat{A},F(\hat{B})\right] &= \sum_n a_n\left[\hat{A},\hat{B}^n\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]\sum_n na_n\hat{B}^{n-1}\\ &= \left[\hat{A},\hat{B}\right]\ F'(\hat{B}) \ ,\end{aligned} \tag{40}$$

onde $F'(w)=\frac{dF(w)}{dw}$. Outra relação importante é

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}=e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]} \ . \tag{41}$$

Para verificá-la, definamos a função $F(z)=e^{\hat{A}z}e^{\hat{B}z}$, que satisfaz a equação diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dF(z)}{dz} &= \hat{A}e^{\hat{A}z}e^{\hat{B}z}+e^{\hat{A}z}\hat{B}e^{\hat{B}z}=\left[\hat{A}+e^{\hat{A}z}\hat{B}e^{-\hat{A}z}\right]F(z)\\ &= \left(\hat{A}+\hat{B}+z\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right)F(z) \ .\end{aligned} \tag{42}$$

Na última igualdade usamos a relação $\left[\exp(\hat{A}z),\hat{B}\right]=z\ \left[\hat{A},\hat{B}\right]\exp(\hat{A}z)$, que é uma consequência imediata de (40). A solução da equação (42) com a condição $F(0)=\mathbf{1}$ é

$$F(z)=\exp\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right)z+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\frac{z^2}{2}\right] \ . \tag{43}$$

A identidade (41) é obtida ao tomarmos $z=1$.

Finalmente, vamos obter duas relações que envolvem uma forma explícita para os operadores. Verifiquemos inicialmente a relação

$$\left[s,\frac{\partial}{\partial s}\right]=-\mathbf{1} \ , \tag{44}$$

que pode ser obtida ao aplicarmos o comutador numa função diferenciável $f(s)$,

$$\left[s,\frac{\partial}{\partial s}\right]f(s)=s\frac{\partial}{\partial s}f(s)-\frac{\partial}{\partial s}\left(sf(s)\right)=-f(s) \ . \tag{45}$$

Notemos ainda que a expansão de Taylor de $f(s+a)$ pode ser expressa em termos da exponencial do operador $\frac{d}{ds}$,

$$\begin{aligned}f(s+a) &= \left(1+a\frac{d}{ds}+\frac{1}{2!}a^2\frac{d^2}{ds^2}+...\right)f(s)\\ &= \exp\left(a\frac{d}{ds}\right)f(s) \ .\end{aligned} \tag{46}$$

References

[1] Butkov, E., *Física Matemática*, Ed. Guanabara, Rio de Janeiro, 1988;

[2] Cohen-Tannoudji, C., Diu B. and Laloë F., *Quantum Mechanics*, Vol. I, A Wiley-Interscience Publication,

New York, 1977;

[3] Gasiorowicz, S., *Física Quântica*, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979;

[4] Landau, L. e Lifshitz, E., *Mecânica Quântica*, Vol. 1, Ed. Mir, Moscou, 1985;

[5] Merzbacher, E., *Quantum Mechanics*, Segunda Edição, Wiley International Edition, New York, 1970;

[6] Perez, J. S., Rev. Bras. de Física, 17 (1995) 123;

[7] Schiff, L. I., *Quantum Mechanics*, $3^{\underline{a}}$ ed., Ed. McGraw-Hill, Singapore, 1988.