

Uma Introdução à Formulação Variacional da Óptica Geométrica

(An Introduction to the Variational Formulation of Geometrical Optics)

Adilson Enio Motter

motter@ime.unicamp.br

Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp

13081-970, Campinas, SP, Brasil

Trabalho recebido em 7 de março de 1996

Neste trabalho visamos a formulação variacional da Óptica, dando enfoque a analogias geométricas e mecânicas. Apresentamos uma demonstração do Princípio de Fermat, seguindo com sua interpretação através de exemplos e com o estudo de aplicações. Obtemos deste Princípio a Equação da Eikonal e finalizamos com o estabelecimento da conexão natural entre a Óptica Geométrica e a Mecânica.

Abstract

Here we review the variational formulation of Optics, giving emphasis to geometrical and mechanical analogies. We present a demonstration of Fermat's Principle, following with its interpretation through examples and applications. From this Principle we obtain the Eikonal Equation. Then we finalize by establishing the natural connection between Geometrical Optics and Mechanics.

I. Introdução

Foi na óptica que os princípios minimais apareceram pela primeira vez ([14]). No século XVII Fermat (1601-1665) postulou que um raio de luz se propaga entre dois pontos sempre de forma a minimizar o tempo necessário para isto⁽¹⁾. Esta formulação, no entanto, não está completamente certa, pois como veremos o tempo é na verdade estacionário⁽²⁾, podendo portanto ser mínimo, máximo, ou até mesmo uma inflexão (análoga a da função $f(x) = x^3$ em $x = 0$). Com o advento do Cálculo Variacional (final do século XVII, início do XVIII ([11])) princípios como este puderam ser estabelecidos sob uma forma extremamente elegante. Por motivos históricos, no entanto, muitos autores continuam a denominar o Princípio de Fermat de Princípio

do Tempo Mínimo⁽³⁾.

Nos séculos XVII e XVIII havia grande influência religiosa na ciência. Isto é evidenciado no episódio em que o ilustre matemático P. Maupertuis (sec. XVIII) tenta provar a existência de Deus usando o Princípio da ação estacionária, ou através da frase do seu amigo, considerado o maior matemático do século XVIII, L. Euler: "Uma vez que a fábrica do mundo é a mais perfeita e foi estabelecida pelo sábio maior - o criador - nada acontece neste mundo sem que de alguma forma um máximo ou mínimo se realize". Os cientistas eram, então, levados a pensar que devido a perfeição do "mundo criado por Deus" a natureza deveria ser regida por princípios extremos: através de máximos e mínimos. Isto deve ter influenciado Fermat a estabelecer de forma imprecisa o princípio que leva seu nome.

⁽¹⁾Heron de Alexandria (sec. I d.C.) já havia afirmado que na reflexão por um espelho a luz percorre a menor distância ([14]).

⁽²⁾É equivalente fazer a mesma afirmação em relação ao caminho óptico.

⁽³⁾O mesmo ocorre na mecânica com o Princípio da Ação Estacionária, por muitos chamado Princípio da Mínima Ação.

Estes e outros aspectos históricos relativos ao estabelecimento dos princípios variacionais da Física podem ser encontrados na referência [11]. Em [1] Bassalo apresenta detalhadamente a evolução histórica dos conceitos da Física, em particular da óptica, pelo que recomendamos fortemente a sua consulta.

II. Princípio de Fermat

Da mesma forma que o Princípio da Ação Estacionária pode ser deduzido das Leis de Newton (mecânica, [12]), o Princípio de Fermat pode ser obtido a partir das Equações de Maxwell (eletromagnetismo, [2]).

Afim de abreviar nossa dedução do Princípio de Fermat utilizaremos alguns resultados decorrentes das Equações de Maxwell em vez das próprias. Assim, considerando os campos eletromagnéticos num meio isotrópico (igual em todas as direções) não condutor (índice de refração real), assumiremos que a dependência espacial destes pode ser escrita na forma geral:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{r}) &= e^{ik_0 L(\vec{r})} \hat{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}_0(\vec{r}) &= e^{ik_0 L(\vec{r})} \hat{H}(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

onde $\hat{E}(\vec{r})$ e $\hat{H}(\vec{r})$ são versores (em geral complexos), $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ (λ_0 : comprimento de onda no vácuo) e $L(\vec{r})$ é a Eikonal (função da posição a valores reais, a qual depende do índice de refração).

Uma forma de intuir os campos dados por (1) num meio em que o índice de refração varia suavemente com a posição é que, quando o índice de refração é constante e a direção de propagação é z ([5]),

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{r}) &= e^{ik_0 n z} \hat{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}_0(\vec{r}) &= e^{ik_0 n z} \hat{H}(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

ou seja, a solução da equação de onda é uma onda plana. Considerando uma variação de $n = n(\vec{r})$ com a posição deve-se esperar o aparecimento de curvaturas nas frentes de onda. Porém, sendo esta variação suave a solução da equação de onda não deve diferir muito de (1') o

que nos leva a escrever (1). Tendo em vista (1'), onde $L(\vec{r}) = nz$, a Eikonal é também denominada função caminho óptico⁽⁵⁾. Vale ressaltar que as equações (1) podem ser estabelecidas de forma absolutamente formal a partir das equações de Maxwell, mas não faremos isso aqui porque foge aos objetivos deste trabalho.

É importante lembrar que (1) é solução da equação de onda desde que os comprimentos de onda sejam suficientemente pequenos para que a variação do índice de refração (bem como dos versores \hat{E} e \hat{H}) seja desprezível ao longo de um comprimento de onda ([2]). Desprezível aqui significa que a variação da grandeza ao longo de um comprimento de onda é muito menor do que o valor da grandeza (em módulo). Porém, tendo em vista que estamos no escopo da óptica geométrica temos também um limite inferior para os comprimentos de onda, pois neste limite a energia dos fótons se torna suficientemente grande para que eles possam ser identificados individualmente. Na seção 5 obteremos a equação a ser satisfeita por $L(\vec{r})$ para que (1) seja solução da equação de onda.

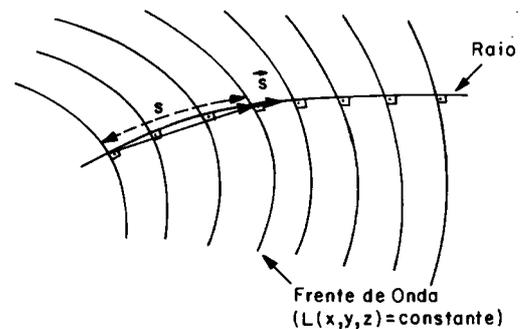


Fig. 1

As frentes de onda, já acima mencionadas, são as superfícies definidas por $L(\vec{r}) = cte$, ou seja são as superfícies de nível da função Eikonal. Considerando, então, que os raios de luz são as trajetórias normais às frentes de onda podemos parametrizar o vetor posição \vec{r} de um ponto sobre um raio de luz com o comprimento

⁽⁵⁾Se considerarmos um meio com absorção devemos introduzir uma exponencial decrescente multiplicando (1). Porém, como pode ser visto em [5], este termo não altera, em essência, os resultados aqui estabelecidos, pois estamos tratando basicamente de óptica geométrica. Acima havíamos mencionado que $L(\vec{r})$ era real em meios de índice de refração, $n(\vec{r})$, real. Agora vemos que isto ocorre também quando $n(\vec{r})$ é complexo (absorção), pois a parte imaginária determina uma exponencial decrescente.

de raio s , medido a partir de um ponto fixo de referência (Fig. 1). Com isto obtemos ([2]):

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla} L \quad (2)$$

onde $n = n(\vec{r})$ é o índice de refração, e

$$n\vec{s} \equiv n \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3)$$

é o vetor raio (tangente ao raio de luz).

Tomando o rotacional de (2), tendo em vista (3):

$$\vec{\nabla} \times (n\vec{s}) = 0 \quad (4)$$

pois:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$$

Deve ser enfatizado que como as operações que fizemos para obter (4) envolvem derivações, n deve variar suavemente com a posição. Caso isto não ocorra, como por exemplo numa superfície de separação entre dois meios, o Teorema de Stokes nos permite escrever a versão integral da equação diferencial (4):

$$\oint n(\vec{r})\vec{s}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5)$$

que é conhecida como Integral Invariante de Lagrange.

Agora apresentaremos o enunciado do Princípio de Fermat na sua formulação atual, para então demonstrá-lo usando a equação (5).

Princípio de Fermat: O caminho óptico

$$S = \int_{p_1}^{p_2} n ds \quad (*)$$

definido por um raio de luz entre os pontos p_1 e p_2 é menor que o caminho óptico de qualquer outra curva que una estes dois pontos contida numa certa vizinhança regular do mesmo ([2]).

A vizinhança regular aqui mencionada quer dizer que numa vizinhança do raio temos um e apenas um raio de luz passando em cada ponto. Os textos de Cálculo Variacional a chamam de campo regular (por exemplo [3] e [6]).

Para a demonstração tomaremos um feixe de raios formando um campo regular numa certa vizinhança em torno do raio \tilde{c} que passa por p_1 e por p_2 . A idéia é então comparar o caminho óptico do raio \tilde{c} com o de uma curva c arbitrária que liga os dois pontos e que pertence inteiramente à vizinhança regular de \tilde{c} .

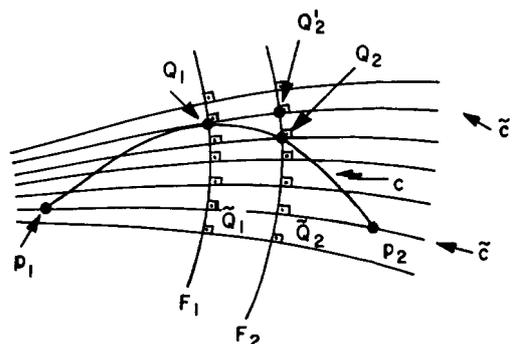


Fig. 2

Tomemos duas frentes de onda infinitesimalmente próximas, F_1 e F_2 como na Fig. 2, onde \tilde{Q}_1 e \tilde{Q}_2 são interseções do raio \tilde{c} com F_1 e F_2 , Q_1 e Q_2 são interseções da curva c com F_1 e F_2 , e Q'_2 é a intersecção do raio \tilde{c}' (que passa por Q_1) com F_2 . Aplicando (5) no circuito definido por $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, Q'_2$ e Q_1 :

$$(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2} + (n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{Q'_2Q_1} = 0 \quad (6)$$

onde usamos que os raios, e portanto \vec{s} devido à (3), são normais às frentes de onda. Trabalhando, agora, no circuito $Q_2Q_1Q'_2$, que no limite é um triângulo:

$$(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{Q_2Q_1} + (n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{Q_1Q'_2} = 0 \quad (7)$$

Sendo $(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2} = (nds)_{\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2}$ e $(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{Q_2Q_1} \leq -(nds)_{Q_1Q_2}$,

de (6) e (7) resulta:

$$(nds)_{\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2} \leq (nds)_{Q_1Q_2}$$

Como isto é válido para duas frentes de onda quaisquer infinitesimalmente próximas, quando integramos de p_1 a p_2 através das respectivas curvas obtemos:

$$\int_{\tilde{c}} n ds \leq \int_c n ds \quad (8)$$

onde a igualdade só se mantém se c for um raio de luz. Porém, como o único raio a passar por p_1 e p_2 é \tilde{c} , então o sinal de igual pode ser abandonado por toda curva $c \neq \tilde{c}$. Isto encerra a demonstração.

Na próxima seção interpretaremos o Princípio de Fermat e estudaremos casos em que não ocorrem mínimos.

III. Interpretação do Princípio de Fermat

Da forma como estabelecemos o Princípio pode ficar a impressão de que o caminho óptico é necessariamente mínimo, contrariando o que já havíamos levantado na introdução. O que mostramos foi que o raio passando por dois pontos tem caminho óptico mínimo quando comparado à curvas pertencentes a uma certa vizinhança regular do mesmo. Quando porém não nos restringimos à vizinhança regular podemos, sem violação do Princípio de Fermat, encontrar uma curva de caminho óptico menor. Na forma em que apresentamos o Princípio sua validade restringe-se às vizinhanças regulares. Existe, no entanto, uma formulação mais fraca e de aplicação mais geral afirmando que o caminho óptico (equação (*)) é na verdade estacionário. Tendo em vista que (*) é uma função do caminho tomado pelo raio para se propagar de um ponto a outro, S é um funcional, e do ponto de vista de Cálculo Variacional a afirmação de que S é estacionário pode ser escrita como:

$$\delta S = \delta \int_{p_1}^{p_2} n ds = 0 \quad (9)$$

onde o símbolo δ indica a primeira variação do funcional.

É importante entender que da mesma forma que a primeira derivada de uma função ser zero num ponto não necessariamente implica em este ser ponto de mínimo, pois pode ainda ser ponto de máximo ou de inflexão, a primeira variação do funcional acima ser zero para um caminho é condição necessária mas não suficiente para este caminho ser um “ponto” de mínimo, donde ele pode ainda representar um máximo ou uma inflexão. Embora, de fato, isto não seja relevante na aplicação do Princípio de Fermat, pois este trabalha

apenas com condições necessárias de mínimo, isto é conceitualmente importante.

Não nos ateremos a demonstrar (9), ao invés disto estudaremos situações em que o caminho óptico não é mínimo. Exemplos interessantes que ilustram esta característica estacionária do Princípio de Fermat, quando a condição de regularidade não é satisfeita, vem de reflexões em superfícies espelhadas.

(*Espelho Plano*) Consideremos dois pontos p_1 e p_2 , e um espelho plano, como abaixo.

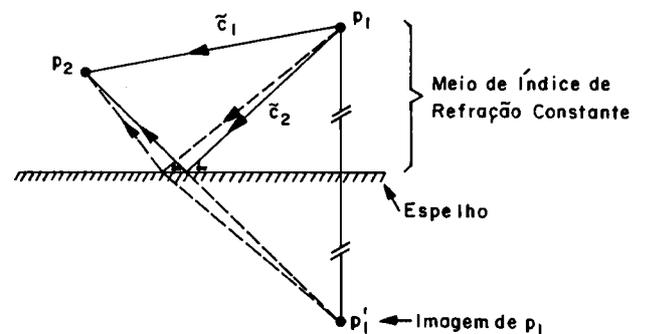


Fig. 3

Supondo que o espelho esteja imerso num meio de índice de refração constante, é imediato que o caminho óptico mínimo corresponde ao segmento de reta \tilde{c}_1 unindo os dois pontos. Porém, além deste caminho existe uma outra possibilidade da luz se propagar de p_1 até p_2 criado pela presença do espelho. Trata-se do caminho \tilde{c}_2 , cujo caminho óptico é obviamente maior do que aquele correspondente a \tilde{c}_1 . Deve-se observar no entanto que \tilde{c}_2 é o menor caminho óptico dentre os raios vinculados a incidir no espelho. Isto pode ser visto geometricamente com a colocação do ponto imagem (de p_1) p_1' e com o uso do fato de que num triângulo um lado é sempre menor que a soma dos outros dois. Ou alternativamente, pensando num análogo mecânico em que o caminho que passa pelo espelho é na verdade um fio com um ponto de contato no espelho o qual tensionamos para que tenha comprimento mínimo entre p_1 e p_2 : no equilíbrio (comprimento mínimo) não podem haver forças tangenciais no ponto de contato,

e portanto os ângulos de incidência e reflexão devem necessariamente ser iguais.

(*Espelho Elíptico*) Suponhamos a fonte p_1 num dos focos e o observador p_2 noutro de um espelho elíptico, onde o índice de refração é constante.

É uma propriedade da elipse (que a define) que a soma das distâncias aos focos é a mesma para qualquer de seus pontos. Daí surge que o caminho óptico de todos os raios emergentes de p_1 que refletem na superfície e chegam a p_2 é o mesmo. De (9) obtemos que todos estes raios satisfazem a condição de estacionaridade, e portanto são trajetórias de fato tomadas pela luz, embora não correspondam ao caminho óptico mínimo. O caminho óptico é mínimo para o raio definido pelo segmento de reta (pontilhado na Fig. 4) que liga os dois pontos, o qual portanto é um possível caminho tomado pela luz para se propagar de p_1 a p_2 (sem o vínculo de incidir no espelho).

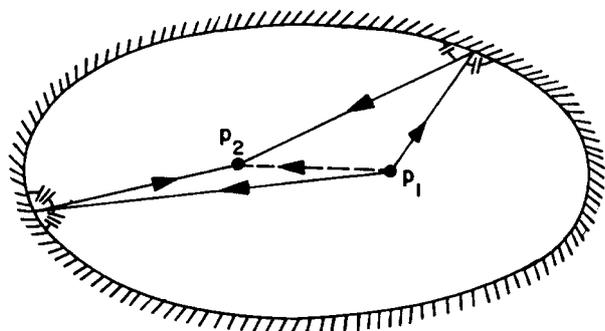


Fig. 4

Fica fácil a partir deste exemplo e sob a “luz” do Princípio de Fermat entender por que em espelhos esféricos a focagem não é perfeita aparecendo a assim chamada “Aberração Esférica”. Pelo desenho abaixo vemos que isto é consequência do fato do caminho óptico não ser exatamente o mesmo para os raios \tilde{c}_1 e \tilde{c}_2 , por exemplo. Isto significa que, devido à (9) os raios \tilde{c}_1 e \tilde{c}_2 não devem se cruzar em p_2 , e sim noutro ponto fora da diagonal pontilhada (Fig. 5) o que provoca a aberração.

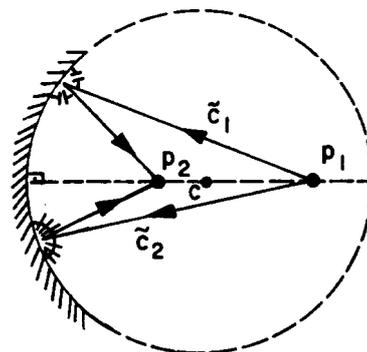


Fig. 5

Embora o comprimento óptico total não seja necessariamente mínimo ele o é quando considerado dentro de intervalos suficientemente pequenos da trajetória (que não incluam pontos de reflexão). Esta situação encontra análogos geométricos e pode ser melhor compreendida por meio deles. Consideremos a esfera e o cilindro circular reto das figuras 6a e 6b respectivamente.

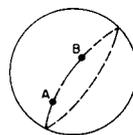


Fig. 6a

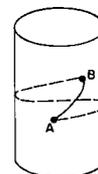


Fig. 6b

No caso da esfera, a curva de menor comprimento entre os pontos A e B é aquela representada pela linha cheia. Porém, ao resolver as equações de Euler-Lagrange obtemos também como solução a linha pontilhada, a qual embora não seja a curva de menor comprimento o é por pedaços. O mesmo serve para o cilindro.

Tomemos agora o cilindro para observar uma outra analogia. A curva pontilhada, embora não seja a curva de menor comprimento entre A e B , o é dentre todas as que dão pelo menos uma volta completa no cilindro. Portanto a solução pontilhada pode ser vista como a curva de menor comprimento com a condição de dar uma volta no cilindro, da mesma forma que \tilde{c}_2 (da Fig. 3) tem caminho óptico mínimo entre os raios que satisfazem a condição de incidir no espelho. Esta característica é geral, e pode ser vista ainda na Fig. 4 e na Fig. 6a.

A referência [10] traz uma revisão do Princípio de Fermat, na qual este é usado para estudar reflexões em superfícies esféricas e formação de imagens.

IV. Aplicações do Princípio de Fermat

Uma maneira, talvez a melhor, de compreender o significado e as implicações do Princípio de Fermat é através da análise de algumas situações físicas em que o Princípio se manifesta de forma relativamente simples. Por isto faremos o estudo de algumas destas situações atentos às suas conseqüências e aplicações ([4] e [13]).

(Princípio da Reciprocidade) Em meios em que a velocidade da luz não depende da direção e sentido, a curva de caminho óptico estacionário para luz que se propaga de p_1 a p_2 é a mesma que para a luz que se propaga da p_2 a p_1 , pois:

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} n ds = 0 \Leftrightarrow \delta \int_{p_2}^{p_1} n ds = 0$$

Isto implica na trajetória descrita por um raio de luz entre dois pontos p_1 e p_2 ser independente do sentido de propagação. Este resultado é conhecido como o Princípio da Reciprocidade.

Segue do Princípio da Reciprocidade que num meio

de índice de refração constante, o raio emergente de uma placa homogênea de faces paralelas é paralelo ao raio incidente, e que a condição de ângulo de desvio mínimo de um prisma se satisfaz quando o raio segue um caminho simétrico (Fig. 7).

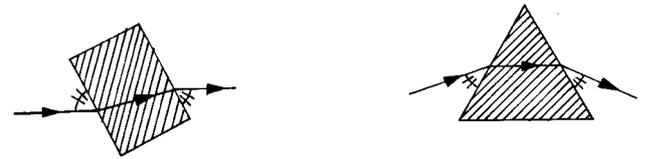


Fig. 7a

Fig. 7b

Outra conseqüência interessante do Princípio da Reciprocidade é a inversão da fase na reflexão entre dois meios homogêneos de índices n_1 e n_2 ,

$$r = -r'$$

e a relação entre os coeficientes de reflexão e transmissão:

$$r^2 = 1 - t't$$

O esquema abaixo mostra como obtemos estas relações através de uma superposição de raios reais e virtuais.

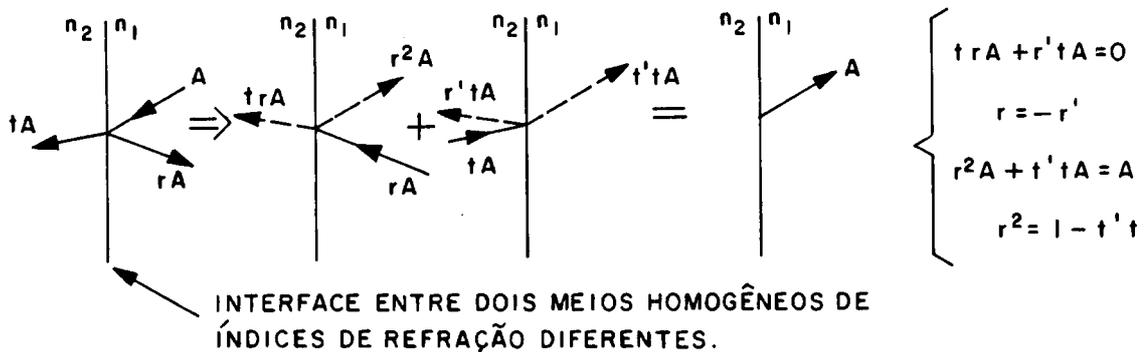


Fig. 8

(Propagação da luz na atmosfera) Quando o sol se aproxima do horizonte a sua imagem aparente corresponde a cerca de $0,5^\circ$ acima da posição verda-

deira. Este fenômeno pode ser compreendido a partir do Princípio de Fermat: uma vez que a atmosfera é gradualmente mais rarefeita a medida que nos afastamos

da superfície, o caminho óptico mínimo, portanto estacionário, não corresponde à uma reta porém sim a uma curva como esquematizada na Fig. 9.

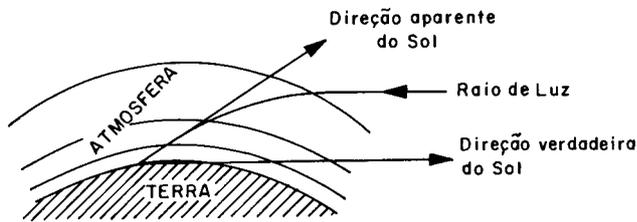


Fig. 9

Tudo acontece como se a luz buscasse se propagar pelas partes mais altas da atmosfera onde o índice de refração é menor, minimizando assim o caminho óptico.

(*Miragem*) É comum a ilusão de se ver água sobre o asfalto num dia muito quente. Este efeito é produzido devido a diminuição do índice de refração do ar próximo ao asfalto em relação as camadas superiores causado pelo aquecimento (quando quente o ar se torna mais rarefeito). A imagem vista é na verdade do céu: a trajetória pela qual o caminho óptico é mínimo passa pela região de menor índice de refração, como esquematizado na Fig. 10a. Efeito semelhante costuma acontecer nos desertos.

Miragens também podem surgir nos mares. Devido a baixa temperatura da água o índice de refração próximo a superfície é maior do que nas camadas superiores. Com isto se pode ter a ilusão de ver uma embarcação navegando no céu (como esquematizado na Fig. 10b).

(*Lentes*) Suponha que temos uma fonte pontual em p_1 e desejamos que os raios ao passar por um sistema óptico sejam focados num ponto p_2 .

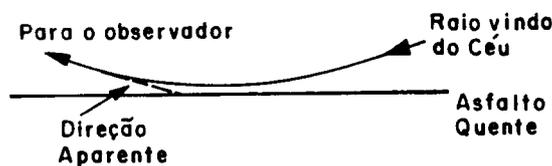


Fig. 10a

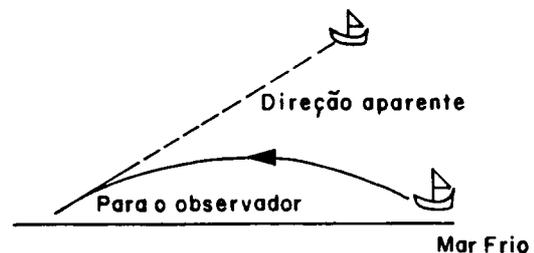


Fig. 10b

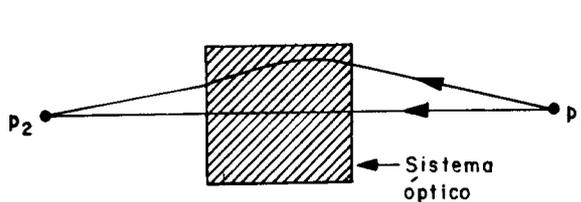


Fig. 11a

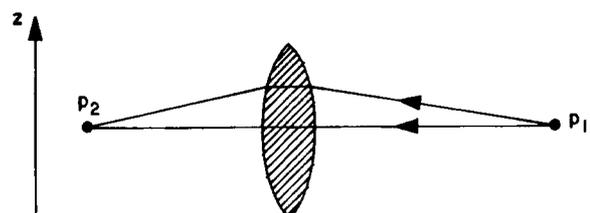


Fig. 11b

Pelo Princípio de Fermat isto é possível se variarmos adequadamente o índice de refração na direção z tal que o caminho óptico de todos os raios sejam iguais (Fig. 11a). Baseando-se nisto podemos desenhar uma superfície adequada para que uma lente de vidro con-

virja em p_2 os raios emergentes de p_1 (Fig. 11b).

Uma das aplicações das lentes convergentes é na concentração de luz solar para aquecimento, ou seja, na confecção de fogões solares por transmissão. É possível construir também um fogão solar por reflexão, utili-

zando um espelho parabólico (Fig. 12).

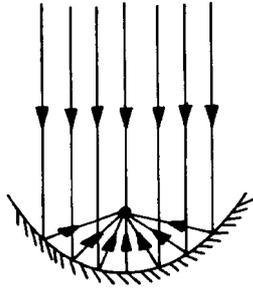


Fig. 12

Os raios incidentes paralelos (o sol está suficientemente longe para que os raios dele provenientes possam ser considerados paralelos) são refletidos de modo a todos convergirem para um mesmo ponto. É propriedade da parábola que todos estes raios tenham mesmo comprimento, portanto o mesmo caminho óptico, e por isto satisfazem a condição de estacionaridade exigida pelo Princípio de Fermat.

O Princípio de Fermat neste caso toma a forma:

$$\delta \int_0^l n ds = \delta \int_0^l n(x(z), y(z)) \sqrt{1 + x'^2(z) + y'^2(z)} dz = 0$$

onde $x'(z) = \frac{dx}{dz}(z)$, $y'(z) = \frac{dy}{dz}(z)$. As equações de Euler-Lagrange associadas a este funcional são ([9]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (n \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}) - \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial}{\partial x'} (n \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}) \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (n \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}) - \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (n \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Usando (10) obtemos que estas equações podem ser escritas como:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dz^2} + \left(\frac{k_2}{k} \right) \vec{r} = 0$$

Cuja solução para $0 \leq z \leq l$, é:

$$r(z) = \cos \left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r(0) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'(0)$$

onde $r(0)$ e $r'(0)$ são respectivamente a posição e a inclinação de entrada do feixe (em $z = 0$).

Com isto podemos ver que cada seção Δz deste meio de índice quadrático funciona como uma lente, convergente para $k_2 > 0$ e divergente para $k_2 < 0$ (neste caso

(Propagação em Meios Tipo Lente) Apresentaremos agora um exemplo, que talvez seja o mais importante do ponto de vista tecnológico devido suas aplicações em guias de onda e fibras ópticas. Consideremos, então, um meio cujo índice de refração tem variação quadrática, dada por:

$$n(x, y) = n_0 \left[1 - \frac{k_2}{2k} (x^2 + y^2) \right] \quad (10)$$

onde k_2 e n_0 são constantes e $k = 2\pi/\lambda$. Para um raio de luz se propagando neste meio designamos por $r(z)$ sua distância normal ao eixo z .

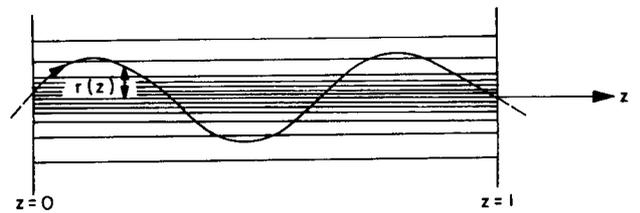


Fig. 13

$\sqrt{k_2/k} = i\sqrt{|k_2|/k}$ e temos funções hiperbólicas no lugar das trigonométricas na solução acima). Isto era esperado uma vez que estas lentes também apresentam variação quadrática do índice de refração.

A Fig. 13 mostra o caso convergente (quando o índice diminui com r). Dos resultados acima obtemos que raios incidentes paralelos em $z = 0$ (a valores de $r(0)$ diferentes) são focados a distância

$$h = \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{k}{k_2}} \operatorname{cotg} \left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} l \right)$$

de $z = l$.

No caso divergente $r(z)$ aumenta com z , e portanto, os raios tendem a se afastar do eixo z .

Há várias situações físicas em que se pode obter meios com este tipo de variação de índice de refração. Um caso interessante ocorre em meios com absorção, nos quais a temperatura torna-se maior onde a intensidade for maior. Assim temos o caso convergente quando $\frac{dn}{dT} > 0$ e o caso divergente quando $\frac{dn}{dT} < 0$ ⁽⁶⁾. A Fig 14a mostra a distribuição espacial típica de um feixe laser, o qual proporciona maior temperatura na região mais central do feixe. Consequentemente ao incidir um feixe laser num meio com $\frac{dn}{dT} > 0$ o índice de refração terá o aspecto da Fig 14b e temos então um meio convergente semelhante ao da Fig. 13. Meios com $\frac{dn}{dT} < 0$ podem ser compreendidos de forma análoga.

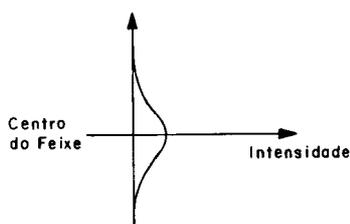


Fig. 14a

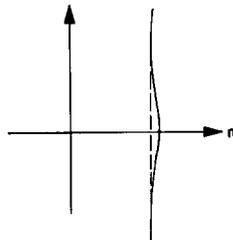


Fig. 14b

As aplicações mais importantes ficam por conta das fibras ópticas de índice gradual onde o índice de refração é maior no centro do que nas camadas externas, como na Fig. 13. Estas fibras oferecem a grande vantagem de propagar multimodos com dispersão relativamente baixa. O motivo pelo qual isto acontece é esquematizado na Fig. 15, onde comparamos a fibra de índice

gradual (Fig. 15b) com a fibra de índice estratificado (meios de índice de refração constante dispostos em camadas a partir do núcleo, Fig. 15a). No caso estratificado, raios entrando na fibra sob diferentes ângulos percorrem diferentes caminhos ópticos (portanto diferentes tempos) entre dois pontos fixos p_1 e p_2 . A fibra de índice gradual, por sua vez, exibe a propriedade de que, mesmo entrando na fibra sob ângulos diferentes, dois raios definem caminhos ópticos iguais entre dois pontos fixos p_1 e p_2 . Isto acontece graças ao fato de que os raios que entram sob menor ângulo embora percorram menores distâncias o fazem em meios de maior índice de refração (centro da fibra).

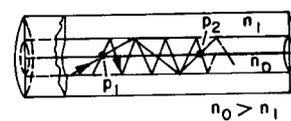


Fig. 15a

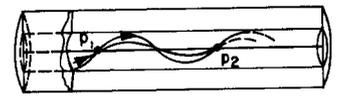


Fig. 15b

V. Equação da Eikonal

Nesta seção empregaremos a equação de Hamilton-Jacobi para obter a Equação da Eikonal. Esta Equação corresponde a uma equação diferencial a ser satisfeita pela Função Eikonal a fim de que (1) seja solução da equação de onda.

Uma vez que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

(*) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} S &= \int_{p_1}^{p_2} n(x, y, z) \frac{ds}{ds} = \int_{p_1}^{p_2} n(x, y, z) \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds} \right) \\ &= \int_{p_1}^{p_2} n(x, y, z) \left(\frac{dx}{ds} dx + \frac{dy}{ds} dy + \frac{dz}{ds} dz \right) \\ &= \int_{p_1}^{p_2} n(x, y, z) (s_x dx + s_y dy + s_z dz) \end{aligned} \tag{11}$$

onde ns_x, ns_y e ns_z são as componentes do vetor raio.

Por outro lado, tomando z como parâmetro:

$$S = \int_{z_1}^{z_2} n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} dz, \quad \text{onde} \quad x' = \frac{dx}{dz}, y' = \frac{dy}{dz}$$

⁽⁶⁾Nestes casos a dependência de n não necessariamente será quadrática, porém em boa aproximação pode ser considerado como dependente apenas de r e não de z . Assim, qualitativamente podemos entender, pelo resultado acima, o comportamento dos raios mesmo quando a variação não é estritamente quadrática.

Definindo:

$$F(x', y', x, y, z) \equiv n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}$$

obtemos:

$$\left. \begin{aligned} F_{x'} &= ns_x && \equiv U \\ F_{y'} &= ns_y && \equiv V \\ F - F_{x'x'} - F_{y'y'} &= ns_z && \equiv W \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Tendo em vista (11) e (12) podemos aplicar a equação de Hamilton-Jacobi sob a forma ([14]):

$$|\vec{\nabla}S|^2 = U^2 + V^2 + W^2 \quad (13)$$

onde

$$dS = n(x, y, z) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} |\vec{\nabla}S|^2 &= n^2 \left\{ \left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \right)^2 + \left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \right)^2 + \left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \right)^2 \right\} \\ &= n^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo (12) e (14) em (13):

$$(ns_x)^2 + (ns_y)^2 + (ns_z)^2 = n^2$$

Usando (2) e (3):

$$|\vec{\nabla}L|^2 = n^2 \quad (15)$$

que é a Equação da Eikonal, a qual desejávamos obter. Nesta equação era esperada a presença do índice de refração, uma vez que L depende do mesmo.

O caso mais simples ocorre quando o meio possui índice de refração constante. Orientando adequadamente nosso sistema de coordenadas podemos, sem perda de generalidade, assumir que em certo ponto a propagação se dá na direção positiva do eixo z . Segue então que a solução de (15) para n constante neste sistema de coordenadas é $L(\vec{r}) = nz$, como esperado.

Com isto fechamos o ciclo que se iniciou com a introdução das equações (1). Havíamos intuído a dependência espacial dos campos eletromagnéticos a partir de argumentos de plausibilidade e havíamos assu-

mido a existência da Função Eikonal. A partir destes campos derivamos o Princípio de Fermat, e deste Princípio uma condição (equação (15)) necessária e suficiente para que a hipótese inicial, de que os campos são de fato regidos pela equação (1), fosse válida. É importante lembrar, no entanto, que para os meios que estamos tratando (aqueles cujo n varia suavemente com a posição, a menos de interfaces) e para comprimentos de onda pequenos a Teoria de Equações Diferenciais nos garante que (15) sempre admite solução. Isto encerra um teste de autoconsistência para o tratamento que adotamos.

VI. Conexão entre Óptica e Mecânica

Na dedução da equação (15) estabelecemos, ainda que de forma implícita, uma relação entre óptica e mecânica quando empregamos a equação de Hamilton-Jacobi. A fim de tornar mais evidente a relação exist-

tente tomaremos um caso particular para estudar.

Consideremos um meio estratificado, como na figura abaixo, onde para cada meio temos índice de refração constante.

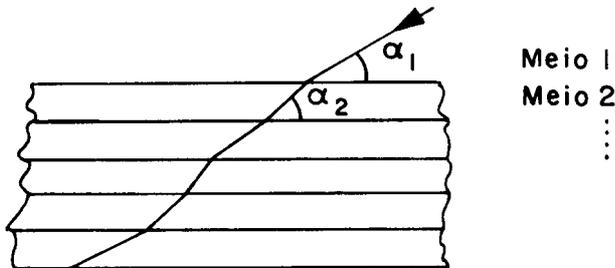


Fig. 16

A lei de refração, a qual pode ser obtida de forma elementar a partir do Princípio de Fermat, fornece para a i -ésima interface [8]:

$$\frac{\cos \alpha_i}{v_i} = \frac{\cos \alpha_1}{v_1} = \text{constante}$$

Fazendo o limite para o contínuo de forma que o índice de refração varie suavemente com a coordenada y , obtemos (Fig. 17):

$$\frac{\cos \alpha}{v} = cte \tag{16}$$

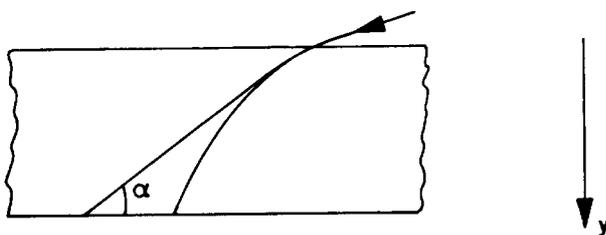


Fig. 17

É interessante que para este tipo de meio a expressão (16) nos permite obter a velocidade da luz num ponto apenas com base em sua trajetória e velocidade de incidência.

O análogo mecânico consiste em considerar uma partícula sob ação de um potencial que varia como o índice de refração da Fig. 16. Em cada interface nossa hipotética partícula sofreria uma variação descontínua

na componente normal da velocidade devido a descontinuidade do potencial (a componente tangencial não apresentaria nenhuma modificação uma vez que não há forças tangenciais). Empregando ainda a mesma notação da Fig. 16, onde denotamos por u a velocidade da partícula:

$$u_i \cos \alpha_i = u_1 \cos \alpha_1 = \text{constante}$$

Embora este potencial pareça artificial, recuperamos uma situação realista quando fazemos o limite para o contínuo, obtendo:

$$u \cos \alpha = cte \tag{17}$$

As expressões (16) e (17) nos mostram uma forte relação que existe entre o caso óptico e o caso mecânico: a trajetória descrita pela luz num meio em que sua velocidade é $v(y)$ é igual àquela que seria definida por uma partícula cuja velocidade, $u(y)$, é proporcional à $1/v(y)$.

Obviamente a conexão entre óptica e mecânica vai muito além do que discutimos aqui, mas isto foge ao intento deste trabalho. Para tanto sugerimos consultar as referências [5] e [7].

Agradecimentos

Agradecimento especial aos Profs. H. L. Fragnito, M. A. F. Rosa e M. J. Menon pelas sugestões e críticas construtivas a este trabalho, ao Prof. F. J. Paixão Filho pelo incentivo, e a FAPESP pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] J.M.F. Bassalo, "Nascimentos da Física", Rev. Bras. Ens. Fís., 17, 1 (1995).
- [2] M. Born e E. Wolf, "Principles of Optics", Pergamon Press (1970).
- [3] L. Elsgoltz, "Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional", Editora Mir (1969).
- [4] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics", Vol. I, Addison-Wesley Publishing Company (1977).

- [5] H. Goldstein, "Classical Mechanics", 2^o ed., Addison-Wesley Publishing Company (1980).
- [6] M. L. Krasnov, G. I. Makarenko, A. I. Kiseliyov, "Calculo Variacional", Editora Mir (1984).
- [7] L. Landau e E. Lifchitz, "Mecânica", Hemus.
- [8] L.A. Liustérnik, "Líneas Más Cortas: Problemas de variaciones", Editorial Mir (1979).
- [9] A. E. Motter e M. J. Menon, "Condições de Extremos de Funcionais", SBPC (1994).
- [10] J. Sham, "Fermat's Principle and Geometrical Optics", Am. J. Phys, 33, 40 (1965).
- [11] D. J. Struik, "História Concisa das Matemáticas", Gradiva (1987).
- [12] K. Symon, "Mecânica", Editora Campus (1982).
- [13] A. Yariv, "Optical Electronics", Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 4^o ed. (1991).
- [14] W. Yorgrau e S. Mandelstam, "Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory", Dover (1979).