

## Simulação dos Movimentos dos Planetas – Bacia de Kepler

Simulation of movements of planets

Paulo Miranda, Klaus Weltner

*Instituto de Física*

*Universidade Federal da Bahia*

*Rua Caetano Moura, Campus Universitário de Ondina*

*40210-340 - Salvador, BA, Brazil*

Trabalho recebido em 5 de março de 1996

Nós conseguimos uma força central como a de um campo de força gravitacional ou de uma carga elétrica através de um modelo construído em fiberglass em forma de uma bacia e esferas rolando nela. Nesta simulação pode-se mostrar de forma bem visível fenômenos que ocorrem em um campo central como lançamento vertical, velocidade de escape, órbitas circulares e elípticas em função das condições iniciais. Os tipos de trajetórias são facilmente reconhecidos e esclarecimentos podem ser feitos durante a demonstração em classe. Além das demonstrações qualitativas foram feitos cálculos relacionando as condições particulares com os fenômenos observados.

### Abstract

We created a central force equal to a gravitational force or to the electrical force of a charge using a model of fiberglass and having spheres rolling on it. Thus it is possible to show circular and ellipsoidal movements of planets, of satellites and of charged particles depending to its initial conditions. The movements of the spheres are easily to be observed and explanations can be made during the demonstrations. Furthermore calculations can be executed to relate the special conditions of the simulation to the observed phenomena.

Nós, os autores, somos durante muitos anos dedicados ao ensino da física básica, cada um em sua Universidade (de Frankfurt (Al) e Federal da Bahia (BRA)). Descobrimos em uma conversa que desde o início de nossas vidas como professores universitários sonhávamos isoladamente em dispor de uma mesa que simulasse um campo central de forças, a exemplo do sistema solar, (ou uma carga nas vizinhanças de outra fixa) para demonstração em classe de fenômenos fundamentais como: lançamentos vertical e oblíquo, velocidade de escape, órbitas circulares, elípticas e parabólicas, etc., etc. As dificuldades experimentais para mostrar o comportamento de um corpo em um campo de força central ( $F \sim 1/r^2$ ) são enormes sem recorrer a um dispositivo adequado que até hoje são ausentes nas escolas médias e universidades. Imaginamos que muitos professores gostariam de construir algum modelo que pudesse es-

clarecer estas questões. Decidimos então construir um modelo de campo central onde o atrito de deslizamento seria atenuado por um colchão de ar. Muitas outras idéias passaram por nossas cabeças mas finalmente optamos por construir uma bacia em fiberglass na qual esferas de aço rolariam. As primeiras bacias construídas foram insatisfatórias tanto no que diz respeito às dimensões quanto à falta de rigidez mas nos mostraram que era possível aprimorarmos o modelo conferindo-lhe dimensões adequadas e estabilidade (rigidez). O modelo final permite-nos observações muito confortáveis dos fenômenos que ocorrem na bacia pois até as esferas de aço, inicialmente usadas, foram substituídas por bolas de bilhar que aumentaram sensivelmente o desempenho do dispositivo, em virtude de seu menor coeficiente de atrito e de seu maior raio.

Nas oportunidades que tivemos de apresentar a “Ba-

cia de Kepler”, (assim a batizamos) em escolas de 2º grau e perante físicos houveram manifestações de interesse e curiosidade.

## II. Demonstração qualitativa dos fenômenos

Com a Bacia de Kepler é possível realizar algumas demonstrações qualitativas e mesmo quantitativas com o auxílio de um dinamômetro ou de um cronômetro e bolas de bilhar.

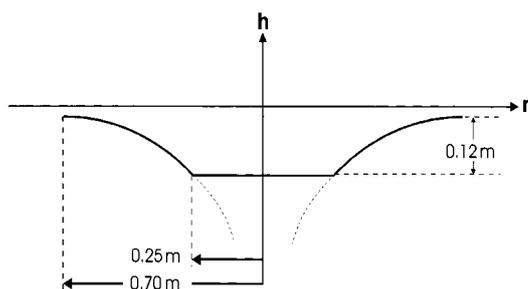


Figura 1. O corte acima mostra a forma e as dimensões da Bacia.

### II.1 Força central

Deixamos rolar esferas, abandonadas sem velocidade inicial em pontos arbitrários da superfície da Bacia. Todas são aceleradas para o centro geométrico do modelo.

Pela forma da bacia é óbvio que existe uma força central. Sua superfície é inclinada e a inclinação aumenta de modo bem visível de fora para dentro. Além disso é aconselhável mostrar o aumento da força central atuante numa esfera, com a ajuda de um dinamômetro, à medida em que se aproxima ou se afasta a esfera do eixo da Bacia.

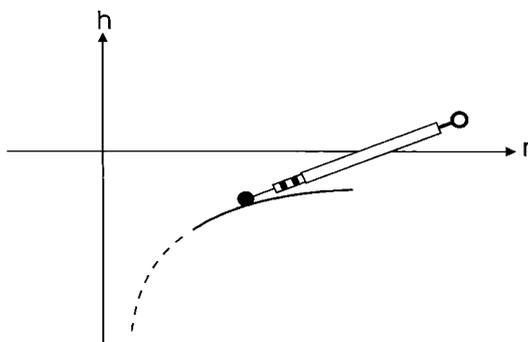


Figura 2. Medição da força central.

Se uma medição for feita, digamos em  $r$  e uma outra for feita dobrando-se a distância do centro, verifica-se que a força central cai a um quarto. Consequentemente

ela tem a forma  $F = C/r^2$ . Estas medidas foram realizadas colando-se um fio nas extremidades opostas de um diâmetro da esfera, de tal modo que ela podia rolar sobre este eixo para baixo ou para cima na Bacia como mostra a Fig. 2. Os melhores resultados foram obtidos usando-se bolas de bilhar.

### II.2 Queda livre

O fenômeno da queda livre pode ser simulado de vários modos: se uma esfera em repouso sobre a Bacia é liberada, ela executa um movimento para o centro. Isto é uma simulação da queda livre.

As condições iniciais podem ser modificadas e a esfera pode ter velocidade inicial e direção inicial bem definidas. Para isto usamos uma rampa de cotas calibradas em centímetros (Fig. 3). Escolhendo uma certa altura da rampa para abandonar a esfera, estaremos definindo não só a sua velocidade inicial de movimento, mas também a sua energia cinética inicial, ambas na Bacia.

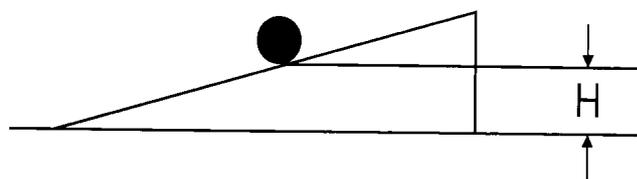


Figura 3. Rampa de lançamento com esfera.

A uma distância de 0,4 m do centro fazemos a esfera rolar radialmente para fora sobre a Bacia. Ela é acelerada para o centro e retorna. Isto simula o lançamento vertical de um objeto. Repetindo o lançamento anterior numa direção que forme um pequeno ângulo com o raio da Bacia, simulamos lançamentos balísticos.

Se formos efetuando lançamentos sucessivos nos quais o ângulo entre a direção de lançamento e o raio da bacia for paulatinamente se aproximando de  $90^\circ$  e se a velocidade de lançamento for adequada, a esfera descreve órbitas que vão passando de elípticas para circulares. Estamos assim simulando, por exemplo, órbitas de satélites em torno da Terra.

### II.3 Elipses de Kepler

Se lançarmos a esfera tangencialmente a uma circunferência traçada sobre a Bacia e de raio  $r = 0,4$  m, a partir de um ponto da rampa de lançamento de altura  $H = 0,065$  m a esfera descreve uma elipse com perigeu

de 0,40 m e apogeu de 0,65 m. O tempo de uma volta é em torno de 4 segundos permitindo uma observação bem cômoda. A elipse é bem nítida.

Observa-se visualmente que a velocidade da esfera no perigeu é maior que no apogeu. Pode-se assim observar qualitativamente a segunda Lei de Kepler. (Fig.4).

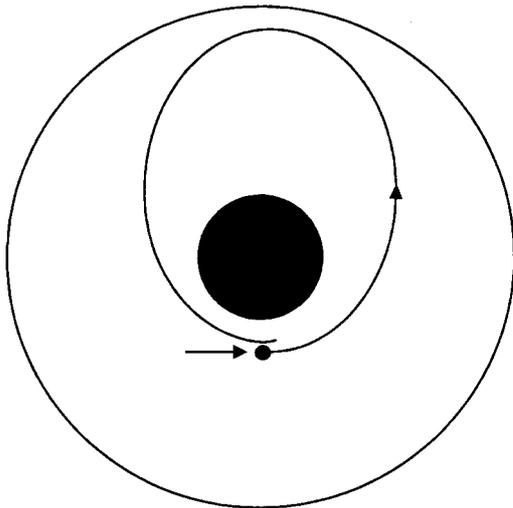


Figura 4. Trajetória de uma esfera, Elipse de Kepler.

Embora o coeficiente de atrito de rolamento da esfera na Bacia seja pequeno (aproximadamente 0,0015) ela perde energia e as elipses se deformam gradualmente.

O perigeu e o apogeu se aproximam do centro da bacia a cada circuito realizado. A esfera está perdendo altura, mas rola sempre em elipses com focos na mesma reta (eixo maior da elipse).

É possível observar 5-7 elipses sucessivas com lançamento do mesmo ponto  $r = 0,40$  m, mas com velocidade inicial menor pode-se obter círculos e até mesmo elipses com apogeu no lado oposto do ponto inicial.

### III. Cálculos e medições

Além de mostrar os fenômenos qualitativamente, o modelo da Bacia de Kepler permite o estudo teórico de alguns fenômenos e comparar os resultados teóricos e medidos.

#### III.1 A bacia de Kepler

A Fig.1 já vista mostra um corte radial da bacia, sendo  $r$  o raio e  $h$  a altura. A força resultante  $F_r$  devida ao peso  $P$  da esfera e à reação normal  $N$  da Bacia é  $F_r = -mg \text{ sen} \alpha$ .

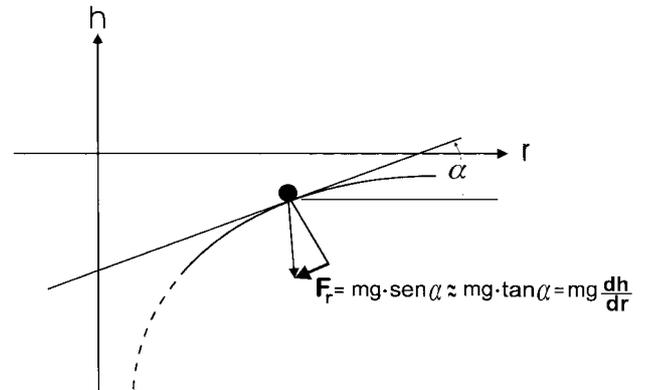


Figura 5. Força central.

Para ângulos  $\alpha$  pequenos, tem-se

$$\text{sen} \alpha \cong \text{tg} \alpha \cong \frac{dh}{dr} ,$$

então

$$F_r = -mg \text{ sen} \alpha \cong -mg \frac{dh}{dr} \quad (1),$$

Para se ter uma força central da mesma estrutura de uma força gravitacional, esta tem que obedecer à equação  $F_c = -m \frac{C}{r^2}$ ; sendo  $C$  uma constante.

Na nossa simulação  $F_c$  e  $F_r$  têm que ser iguais, logo:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{C}{g} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Integrando esta expressão, obtém-se a equação da superfície da bacia.

$$h(r) = \frac{C}{g} \left( -\frac{1}{r} \right) \quad (2)$$

A força central na superfície da Bacia é:

$$F_c = -mg \cdot \frac{dh}{dr} = -m \cdot g \frac{C}{g} \frac{1}{r^2} = -m \frac{C}{r^2} \quad (3)$$

A aceleração central, é portanto

$$a_c = -\frac{C}{r^2} \quad (4)$$

Para se obter movimentos facilmente observáveis mesmo qualitativamente, escolheu-se a constante  $C$  como sendo igual a  $0,4 \text{ m}^3/\text{s}^2$ . Finalmente a equação da superfície é  $h = -0,04/r$  e a força central neste caso é  $F_c(r) = -m \frac{0,4}{r^2}$ . Podemos, com esta expressão, calcular a intensidade da força central que age sobre uma esfera. A que usamos tem massa  $m = 0,127 \text{ Kg}$ . Assim as forças centrais para raios de 0,3 m e de 0,6 m são:

$$F_{\text{teórico}}(0,3) = 0,56N$$

$$F_{\text{teórico}}(0,6) = 0,14N$$

Os valores experimentais apresentaram erros menores que 10 %.

$$F_{\text{exp}}(0,3) = 0,54N$$

$$F_{\text{exp}}(0,6) = 0,13N$$

Nota: Essa força na nossa bacia de Kepler pode ser atingida pela gravitação se tivermos num ponto isolado do espaço uma massa de  $m \cong 6 \times 10^9$  kg.

### III.2. Movimentos em círculos

É sempre possível encontrar corpos submetidos à ação de força central que descrevam órbitas circulares. Vamos examinar este movimento na Bacia de Kepler mediante duas aproximações:

#### III.2.1. Primeira aproximação

Para mover-se em círculos, a força resultante que age sobre um corpo de massa  $m$  imerso em um campo de força central, é a centrípeta. Então:

$$F_1 = -m \frac{0,4}{r^2} = -m\omega^2 r$$

Sendo  $\omega$  a velocidade angular do movimento circular, isto é:

$$\omega^2 = \frac{0,4}{r^3}$$

ou ainda

$$\omega_{\text{teor.}} = \sqrt{\frac{0,4}{r^3}} \tag{5}$$

O tempo de uma volta é então:

$$T_{\text{teor.}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{0,4}}$$

Experimentalmente, na Bacia de Kepler, podemos medir o tempo de uma volta da esfera e comparar os tempos medidos  $T_{\text{exp}}$  com os tempos calculados. A tabela abaixo mostra os resultados.

raio	Tempo medido em segundos	Tempo calculado em segundos
0.3	$2.04 \pm 0.15$	1.63
0.4	$3.16 \pm 0.15$	2.51
0.5	$4.21 \pm 0.15$	3.51
0.6	$5.23 \pm 0.15$	4.62

Notam-se diferenças sistemáticas. Existe, de fato, um erro no raciocínio e no cálculo. Nós não consideramos que a esfera rola e tem impulso rotacional  $I$  que

muda de direção continuamente durante o movimento. E por isso tem que existir uma força no ponto de contato entre a esfera e a bacia.

#### III.2.2. Segunda aproximação

O esboço (Fig. 6) mostra a esfera em dois instantes consecutivos. A seta representa o impulso rotacional  $I$  da esfera que rola e não desliza sobre a Bacia. Observa-se que  $I$  muda de direção. Isto só pode ocorrer se um torque for aplicado à esfera. A única possibilidade de se aplicar um torque é admitir a existência de uma certa força, digamos  $F_2$ , agindo sobre a esfera a partir do ponto de contato desta com a superfície da Bacia. Uma vez que a mudança de direção do impulso rotacional se dá sempre no sentido de mantê-lo paralelo à velocidade angular da esfera, então a força  $F_2$  é radial e tem o mesmo sentido do raio  $\vec{r}$ , da Bacia.

O impulso rotacional da esfera é

$$I = \theta\omega_s, \tag{6}$$

sendo  $\theta$  o momento de inércia da esfera e  $\omega_s$ , a velocidade angular de rotação da esfera sobre o seu próprio eixo.

Se a esfera circula a uma distância  $r$  do centro da bacia com uma velocidade angular de translação  $\omega$ , e como ela não desliza, teremos que  $\omega r = \omega_s R$ , sendo que  $R$  é o raio da esfera. Então

$$\omega_s = \frac{r}{R}\omega$$

A variação do impulso rotacional da esfera é

$$\frac{d}{dt}(I) = I\omega = \theta\omega_s\omega = \theta\frac{r}{R}\omega^2.$$

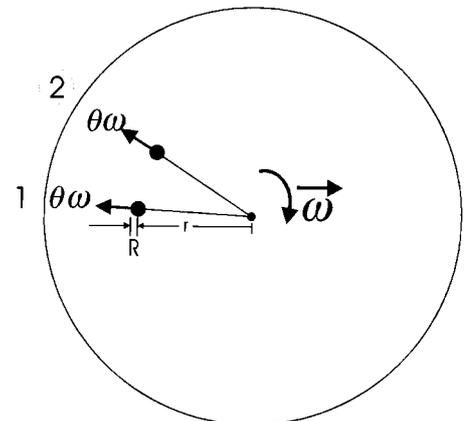


Figura 6. Diagrama do impulso rotacional a esfera.

Por outro lado  $dI/dt$  deve ser igual ao torque  $\tau_2 = F_2 R$  da força  $F_2$  onde  $R$  é o raio da esfera e também braço da força  $F_2$  que tem direção  $\frac{\vec{r}}{|r|}$ , como já enfatizamos. Desse modo, de

$$\frac{d(I)}{dt} = F_2 \cdot R = \theta \frac{r}{R} \omega^2 \quad (9)$$

segue que

$$F_2 = \theta \cdot r \cdot \frac{\omega^2}{R^2} \quad (10)$$

Lembrando que  $\theta = \frac{2}{5}mR^2$ , podemos escrever:

$$F_2 = \frac{2}{5}m\omega^2 r \quad (11)$$

A força total  $F_R$  atuando na esfera é:

$$F_R = F_1 + F_2$$

ou então

$$F_R = \frac{2}{r}mr\omega^2 - \frac{mC}{r^2} \quad (12)$$

Esta força  $F_R$  deve manter o movimento circular da esfera imersa num campo de força central, isto é:  $F_R = -m\omega^2 r = \frac{2}{5}mr\omega^2 - C\frac{m}{r^2}$ . Daqui, finalmente obtemos o valor corrigido para esta segunda aproximação;

$$-m\omega^2 r \left(1 + \frac{2}{5}\right) = -\frac{Cm}{r^2}$$

ou seja

$$\omega^2 = \frac{5}{7} \frac{C}{r^3} = \frac{5}{7} \omega_{aprox I}^2 \quad (13)$$

A velocidade da esfera é reduzida. O tempo de uma volta é então

$$T_{aprox II} = \sqrt{\frac{5}{7}} T_{aprox I}$$

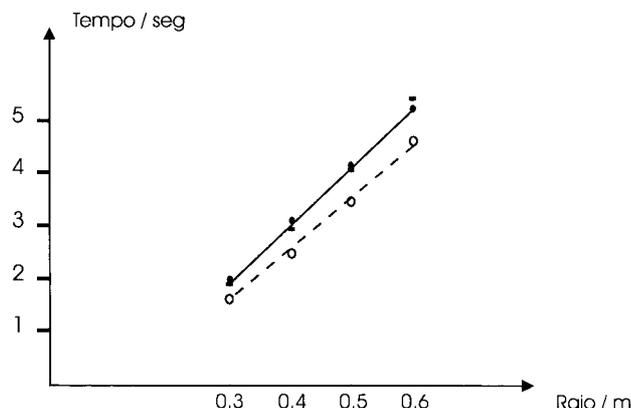


Figura 7. Tempo das voltas em função do raio. • - tempos medidos com curva contínua; x - tempos calculados pela 2a. aproximação; o - tempos calculados pela 1a. aproximação com curva descontínua.

O gráfico, Fig. 7, mostra os dados novos e os dados da primeira aproximação. A coincidência entre os dados obtidos experimentalmente e os dados calculados melhorou bastante. As diferenças que existem ainda decorrem dos erros medindo o tempo de uma volta e medindo o raio, porque os círculos nunca são ideais e o raio diminui durante uma volta. A tabela mostra os dados

	$T_{experimental}$	$T_{teoria\ 1a.aprox.}$	$T_{teoria\ 2a.aprox.}$
0.3	$2.04 \pm 0.15$	1.63	1.93
0.4	$3.16 \pm 0.15$	2.51	2.97
0.5	$4.21 \pm 0.15$	3.51	4.15
0.6	$5.23 \pm 0.15$	4.62	5.46

### III.3. Velocidade inicial para obter círculos

O lançamento das esferas é feito por meio de uma rampa calibrada a partir de uma altura  $H$ . Assim, a velocidade inicial da esfera pode ser calculada. O diagrama já visto na Fig. 3 indica o lançamento de uma esfera na rampa. Isto nos permite determinar a velocidade de uma esfera como segue:

$E_p = mgH$  - energia potencial<sup>1</sup> da esfera de massa  $m$   
 $E_c = \frac{m}{2}v^2 + \frac{\theta}{2}\omega_s^2$  - energia cinética da esfera ao abandonar a rampa

onde:

$v$  = velocidade inicial da esfera na Bacia (no final da rampa)

$\theta = \frac{2}{5}mR^2$  momento de inercia da esfera de massa  $m$  e raio  $R$

<sup>1</sup> Corretamente a energia potencial  $E_p$  deve ser corrigida porque na rampa a esfera está inclinada e por isso o seu centro de massa está rebaixado.  $E_p = mgh - mgR(1 - \cos\alpha)$ . Negligenciamos esta correção sabendo que nossos resultados apresentam um pequeno erro sistemático.

$\omega_s$  = velocidade angular de rolamento da esfera.

Devido ao atrito a esfera não desliza nem na rampa e nem na Bacia o que nos permite escrever a relação:  $\nu = \omega_s R$  ou  $\omega_s = \nu/R$ , que substituída na expressão da energia cinética, fornece:

$$E_c = \left(\frac{7}{5}\right) \frac{m}{2} \nu^2 \quad (14)$$

Quando lançamos a esfera, a sua energia potencial se transforma em energia cinética,  $E_p = E_c$ .

Então:  $\nu^2 = \frac{5}{7} \cdot 2gH$  e a velocidade inicial<sup>2</sup> na Bacia é afinal igual a:

$$\nu = \sqrt{\frac{5}{7} \cdot 2gH} \quad (15)$$

Já calculamos a velocidade angular de uma esfera percorrendo circunferências de raio  $r$  na equação (13), isto é

$$\omega^2 = \frac{5}{7} \frac{C}{r^3} \quad (16)$$

Por outro lado, temos que  $\omega = \nu/r$  no movimento circular uniforme, conseqüentemente, obteremos:

$$\frac{\nu^2}{r^2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{C}{r^3}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{5}{7} \frac{C}{r}}$$

Comparando (15) com (16) encontraremos uma relação entre a altura  $H$  na rampa e o raio do círculo no qual a esfera desenvolve um movimento circular na Bacia.

Como resultado obtemos:

$$H = \frac{C}{2r} \quad (17)$$

Verificamos esta relação escolhendo empiricamente a altura  $H$  na rampa (Fig. 3) para a esfera rolar num círculo de raio  $r$  na Bacia, comparando-a com a altura  $H$  calculada por (17).

$r$	$h_{emp}$	$h_{calculado}$
0.3	0.066	0.067
0.4	0.051	0.050
0.5	0.040	0.040
0.6	0.034	0.033

A concordância é satisfatória.

### III.4. Cálculo das perdas pelo atrito

A esfera, enquanto rola, perde energia e por causa destas perdas os círculos mudam em espirais e a esfera se aproxima continuamente do eixo de simetria da Bacia. O efeito deste fenômeno sobre o número de voltas da esfera na Bacia pode ser calculado.

A força de atrito sobre a esfera é

$$F_{atrito} = m \cdot g \cdot \mu \quad (19)$$

sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito dinâmico.

A perda de energia em uma volta é:

$$\Delta E_{volta} = -F_{atrito} \cdot 2\pi r = -2\mu\pi \cdot mgr \quad (20)$$

Devido a esta perda a esfera perde altura na Bacia e rola com raios menores cada vez mais próxima do eixo central da Bacia.

A energia mecânica da esfera é  $E_M = E_p + E_c$ .

A energia potencial da esfera rolando a uma altura  $h$  na Bacia é

$E_p = mgh(r) = +mg(-C/gr)$  onde substituímos  $h$  por seu valor dado por (2).

A energia cinética da esfera rolando é:  $E_c = \frac{7}{5} \frac{m\nu^2}{2}$ . Assim a energia mecânica da esfera,  $E_M$ , é:

$$E_M = \frac{7}{5} \frac{m\nu^2}{2} - \frac{mc}{r}$$

Substituindo aqui  $\nu^2$  pelo seu valor dado por (16), encontramos:

$$E_M = \frac{7}{5} \cdot m \left( \frac{5}{7} \frac{C}{r} \right) - m \frac{C}{r} = -m \frac{C}{2r}$$

A variação da energia total da esfera com o raio é

$$\frac{dE_M}{dr} = m \frac{C}{2r^2} \text{ ou } dE_M = \frac{C}{2r^2} dr \quad (21)$$

Da perda da energia por uma volta (veja (20)) podemos escrever a variação da energia total da esfera em relação ao número de voltas  $n$ , ou seja:

$$\frac{dE_M}{dn} = -2\pi\mu mgr \text{ ou } dE = -2\pi\mu mgr dn \quad (22)$$

Comparando (21) e (22) encontramos

<sup>2</sup>Sem rolar, a velocidade da esfera no final da rampa seria  $\nu = \sqrt{2gH}$ . O fator  $\sqrt{5/7}$  é devido ao rolamento da esfera.

$$dn = -\frac{C}{4\pi\mu g} \cdot \frac{dr}{r^3} \quad (23)$$

Podemos integrar (23) para obter o número das voltas dependendo dos raios final e inicial

$$\int_{n_1}^{n_2} dn = -\frac{C}{4\pi\mu g} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3} \therefore n_2 - n_1 = \frac{C}{8\pi\mu g} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

Se começarmos a contar o  $n$  a partir do lançamento da esfera num círculo de raio  $r_1$ , e se ela rola sobre o modelo até um círculo de raio  $r_2$ , obteremos:

$$n = \frac{C}{8\pi\mu g} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right)$$

Verificação: O atrito medido independentemente numa superfície parecida com a nossa é  $\mu = 0,0015$ <sup>[3]</sup>. A constante  $C$  já nos é conhecida ( $C = 0,4 \frac{m^3}{s^2}$ ).

Tomando para  $r$  os valores limites da nossa superfície, isto é:

raio máximo  $r_1 = 0,6$

raio mínimo  $r_2 = 0,25$ , teremos

$$n = \frac{0,4}{8 \times 3,14 \times 0,0015 \times 9,8} \left( \left( \frac{1}{0,25} \right)^2 - \left( \frac{1}{0,6} \right)^2 \right)$$

$n = 13$

A esfera pode executar 13 voltas numa espiral começando com o raio inicial de 0,6 m e chegando a um raio de 0,25 m ao final.

Os resultados obtidos experimentalmente são de 12-15 voltas dependendo do lançamento.

A evolução da esfera na bacia é muito sensível às condições iniciais (do lançamento), ao nivelamento e limpeza da bacia. No entanto a concordância entre os cálculos e os dados adquiridos experimentalmente é bastante satisfatória.

Concluindo podemos assegurar que a Bacia de Kepler construída nos permite demonstrar qualitativamente vários fenômenos que ocorrem em um campo de força central além de propiciar uma boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais. Além disso os experimentos sempre despertam o interesse dos observadores sejam leigos ou especialistas.

#### IV. Construção da bacia

Em primeiro lugar fizemos um molde negativo da bacia. A base do molde foi um disco de madeira laminada de 8mm de espessura e de 140 cm de diâmetro. Acima dessa base colamos firmemente anéis e discos de madeira laminada de espessura de 6mm, centrados em um mesmo eixo. Os diâmetros foram calculados para obter uma curva do corte da forma:

$$h = \frac{0,04}{r^2}$$

Sobre esta estrutura de madeira aplicamos demãos de massa corrida. A fim de obter a curva do corte com precisão, usamos uma peça de madeira bem cortada e lixada cuja borda reproduzia a curva calculada. Utilizamos esta mesma peça para lixar o molde e lhe dar forma definitiva. O processo de aplicar demãos da massa corrida, secar e lixar se repetiu muitas vezes, controlando-se cuidadosamente o nível da peça. Encerramos o trabalho quando a simetria rotacional e a precisão da curva do corte não apresentavam defeitos visíveis e palpáveis - isso significa que os erros eram abaixo de 0.5mm.

Em segundo lugar, a bacia foi feita, por um profissional da área que aplicou várias demãos de fiberglass sobre o molde e construiu uma borda cilíndrica na circunferência externa da bacia além de fortificações radiais para lhe dar maior estabilidade.

Finalmente a bacia foi lixada e polida. O seu uso só é possível após o seu rigoroso nivelamento o que pode ser feito com o emprego de um nível convencional e cunhas de madeira para calçá-la.

Nós agradecemos a ajuda do DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst) e da GtZ (Gesellschaft fuer Technische Zusammenarbeit).

#### Referências

1. Symon, Keith R.: *Mechanics*, Reading Massachusetts, 1960.
2. Goldstein, Herbert: *Mecânica Classica*. Madrid, 1979.
3. Weltner, Klaus: Central drift of freely moving balls on rotating discs - A new method do measure coefficients of rolling friction. *American Journal of Physics*. vol. 55, (101, 1987). p. 937-942.