Supersimetria em Mecânica Quântica

Elso Drigo Filho

Departamento de Física de São Carlos, Instituto de Biociências

Letras e Ciências Exatas - UNESP

Rua Cristovão Colombo, no. 2265, Jardim Nazareth

15054-000 - São José do Rio Preto-SP, Brasil

Trabalho recebido em 7 de fevereiro de 1997

Pretende-se indicar como um conceito surgido no contexto de Teoria de Campos (Supersimetria) pode ser usado em Mecânica Quântica e apontar algumas vantagens no tratamento matemático de sistemas quânticos, particularmente na solução da equação de Schrödinger.

I. Introdução

Muitos livros textos de Mecânica Quântica[1] mostram como alguns problemas podem ser elegantemente resolvidos através de operadores criação e destruição. Particularmente, para o oscilador harmônico este método é bastante explorado. A introdução da Supersimetria para estudar sistemas quânticos pode ser entendida como uma generalização do método de fatorização usual.

Supersimetria surgiu no contexto de Física de Partículas e Campos e permite relacionar bosôn e fermiôns, ie, partículas que obedecem a estatística de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac[2]. Em 1981, Witten[3] visando esclarecer as propriedades essenciais desta simetria introduziu a supersimetria em uma Teoria de Campos em (1+0) dimensões, ou seja, a Mecânica Quântica Supersimétrica; onde o tempo t é a coordenada e a posição $x(t)$ é o próprio campo.

Desde que surgiu a Mecânica Quântica Supersimétrica tem sido bastante utilizado em vários contextos, (veja por exemplo as referências [4-10]). Por sua abrangência e simplicidade, de Lange e Welter[11] reforçam a tese de que supersimetria "poderia ser proveitosamente incluida em futuros livros textos e cursos de Mecânica Quântica". Uma aplicação bastante interessante deste formalismo é seu uso para obter soluções da equação de Schrödinger.

Neste artigo o oscilador harmônico é usado como base para se introduzir a Mecânica Quântica Supersimétrica, através deste formalismo introduz-se a chamada hierarquia de Hamiltonianos, finalmente, obtém-se as autofunções e autovalores para a equação de Schrödinger usando os preceitos da Supersimetria em Mecânica Quântica para o sistema simples de uma partícula em uma caixa.

II. O Oscilador harmônico supersimétrico

O operador Hamiltoniano para o problema ordinário do oscilador harmônico bosônico unidimensional é escrito como[1]

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw_B^2x^2 \tag{1}$$

ou em termos dos operadores criação (a^+) e destruição (a)

$$H_B = \left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\hbar w_B \tag{2}$$

onde

$$a^+ = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{1/2}\frac{d}{dx} + \left(\frac{mw_B^2}{2}\right)^{1/2}x \tag{3}$$

$$a = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{1/2}\frac{d}{dx} + \left(\frac{mw_B^2}{2}\right)^{1/2}x \tag{4}$$

As relações de comutação relevantes neste caso são:

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = 1 \tag{5}$$

e trivialmente

$$[a, a] = 0 \quad , \quad [a^+, a^+] = 0 \tag{6}$$

Pode-se também verificar que

$$[a, H_B] = a\hbar w_B \quad ; \quad [a^+, H_B] = -a^+\hbar w_B \tag{7}$$

Os operadores a^+ e a possuem a propriedade de gerar novos estados partindo de um estado incial. Assim se ψ_n é uma autofunção de H_B com autovalor de E_n, então $a\psi_n$ e $a^+\psi_n$ geram autofunções cujos autovalores são, respectivamente, $E_n - \hbar w$ e $E_n + \hbar w$. A veracidade desta propriedade é facilmente verificada usando a expressão para H_B (2) e a relação de comutação (5).

O Hamiltoniano original (1) ainda pode ser escrito na forma

$$H_B = \frac{\hbar w_B}{2}\{a^+.a\} \tag{8}$$

onde o anticomutador é definido por $\{a^+, a\} = a^+a + aa^+$.

Os autovalores de energia neste caso correspondem a

$$E_B = w_B\hbar\left(n_B + \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

onde $n_B = 1, 2, 3...$ são autovalores do operador número a^+a. Este é um resultado bem conhecido para o oscilador harmônico ordinário.

O oscilador harmônico fermiônico pode ser escrito lembrando que fermions satisfazem o princípio de exclusão de Pauli e é obtido da quantização com anticomutadores ao invés de comutadores. Assim define-se operadores fermiônicos de criação b^+ e destruição b; com relações de anticomutação similares as obtidas para o caso bosônico (5) e (6).

$$\{b, b^+\} = 1 \tag{10}$$

e também

$$\{b, b\} = 0 \quad , \quad \{b^+, b^+\} = 0 \tag{11}$$

Percebe-se que, necessariamente, $bb = 0$ o que implica em que dois fermions não podem existir no mesmo estado quântico.

O Hamiltoniano para o caso fermiônico também pode ser construido por analogia com o caso bosônico (8) trocando o anticomutador por um comutador:

$$H_F = \frac{\hbar w_E}{2}[b^+, b] \tag{12}$$

Neste caso os autovalores de energia valem, usando a relação (10):

$$E_F = \hbar w_F\left(n_F - \frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

onde $n_F = 0, 1$ são os autovalores do operador número fermiônico b^+b.

Considerando uma combinação dos dois sistemas, fermiônicos e bosônicos, o novo sistema teria seus autovalores de energia como sendo a soma das energias de cada sistema individual (9) e (13). Impondo também, devido a alta simetria do problema, que as frequências são iguais, $w_B = w_F = w$ obtém-se

$$E = w\hbar(n_B + n_F) \tag{14}$$

É importante notar que todos os estados são duplamente degenerados exceto no caso fundamental em que $n_B = n_F = 0$ e por isto tem autovalor de energia igual a zero. Como em outros sistemas quânticos degenerecência indica a existência de simetria no Hamiltoniano. Neste caso, a simetria extra que aparece da combinação dos osciladores bosônicos e fermiônicos é chamada supersimetria.

Uma vez que a degenerância aparece quando simultaneamente é destruido um fermion ($n_F \to n_F - 1$) e criado um boson ($n_B \to n_B + 1$) ou vice-versa, é de se esperar que os geradores da super-simetria sejam uma combinação dos operadores em questão na forma ab^+ ou a^+b. De fato definindo-se

$$Q = \sqrt{2\hbar w}a^+b \quad \text{e} \quad Q^+ = \sqrt{2\hbar w}ab^+ \tag{15}$$

observa-se que ambos comutam com o Hamiltoniano

$$H_{ss} = w\hbar(a^+a + b^+b) \tag{16}$$

ou seja

$$[Q, H] = [Q^+, H] = 0 \tag{17}$$

Também verifica-se que o Hamiltoniano (16) é obtido pela seguinte relação de anticomutação

$$\{Q, \bar{Q}^+\} = 2H \tag{18}$$

que é uma relação fundamental em todas as teorias supersimétricas. Falta ainda uma representação para os operadores fermiônicos b^+ e b que satisfaçam as relações de anticomutação (10) e (11). Esta representação pode ser feita através das matrizes de Pauli:

$$b = \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$b^+ = \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Lembrando que os operadores bosônicos a^+ e a estão escritos em (3) e (4) o Hamiltoniano (16) pode agora ser escrito como

$$H_{ss} = \begin{pmatrix} a^+a & 0 \\ 0 & aa^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x - \frac{1}{2}w\hbar & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x + \frac{1}{2}w\hbar \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \tag{21}$$

onde H_+ e H_- são conhecidos como Hamiltonianos companheiros supersimétricos e seus autovalores e autofunções podem ser relacionados pelos geradores da supersimetria (15).

A supersimetria embora tenha sido introduzida aqui, por simplicidade, apenas para o caso particular do oscilador harmônico pode ser estendida para qualquer sistema quântico desde que o Hamiltoniano original possa ser fatorizado, i.e. possa-se definir operadores bosônicos a e a^+. Uma abordagem mais geral a respeito deste formalismo pode ser encontrado na ref. [4].

Chamando $\psi^{(-)}$ as autofunções de H_- e $\psi_n^{(+)}$ as autofunções de H_+ e os respectivos autovalores de energia de $E_n^{(-)}$ e $E_n^{(+)}$ pode-se mostrar a relação existente entre os espectros e autofunções neste caso. Convém ressaltar que o índice n passa a representar o índice bosônico ($n = 0, 1, 2...$). Observa-se que:

$$H_+(a\psi_n^{(-)}) = aa^+(a\psi_n^{(-)}) = aH_-\psi_n^{(-)} = E_n^{(-)}(a\psi_n^{(-)}) \tag{22}$$

e

$$H_-(a\psi_n^+) = a^+a(a^+\psi_n^+) = a^+H_+\psi_n^+ = E_n^+(a^+\psi_n^+) \tag{23}$$

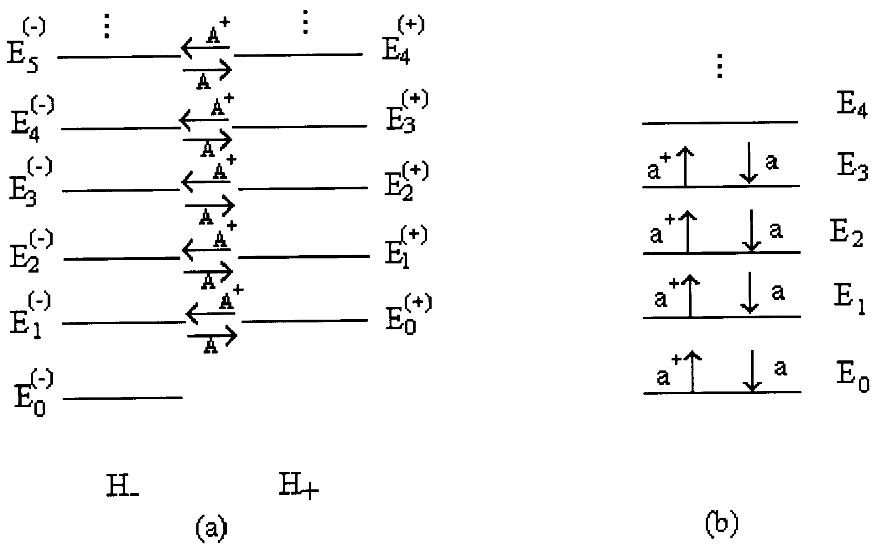

Figura 1: (a) representação dos companheiros supersimétricos e das relações entre os autoestados A e A^+ são os operadores bosônicos da superismetria; (b) representação dos operadores escada (a e a^+) atuando nos auto estados de um espectro.

Destas relações percebe-se claramente que $(a\psi_n^{(-)})$ é autofunção de H_+ e $(a^+\psi_n^{(+)})$ é autofunção de H_-. Assim pode-se estabelecer uma relação entre os autoestados dos companheiros supersimétricos:

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)} \tag{24}$$

$$\psi_n^{(+)} = [E_{n+1}^{(-)}]^{-1/2}a\psi_{n+1}^{(-)} \tag{25}$$

$$\psi_{n+1}^{(-)} = [E_n^{(+)}]^{-1/2}a^+\psi_n^{(+)} \tag{26}$$

A Fig. 1 mostra uma representação pictorica entre os Hamiltonianos companheiros supersimétricos e a relação entre auto estados de um Hamiltoniano onde são aplicados os operadores escada. No caso do oscilador harmônico, como se viu, os operadores de criação e destruição a^+ e a coincidem com os operadores bosônicos da supersimetria. Entretanto, no caso geral eles são diferentes (veja por exemplo ref. [13]).

No caso geral em uma dimensão os operadores bosônicos são geradores que fatorizam o Hamiltoniano, (eq. (21)) e são escritos na forma:

$$a^{+} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + W(x) \tag{27}$$

$$a = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + W(x) \tag{28}$$

a função $W(x)$ é chamada de superpotencial.

III. Hierarquia de hamiltonianos

Da secção anterior observa-se que a partir do momento em que os operadores bosônicos são definidos os Hamiltonianos companheiros supersimétricos são determinados pela ordem de aplicação destes operadores; $H_{+} = a^{+}a$ e $H_{-} = aa^{+}$.

Esta propriedade pode ser explorada levando a definição de uma cadeia de Hamiltonianos relacionados entre si pela supersimetria. Outra propriedade importante que foi observada é o fato de que o estado fundamental de um dos Hamiltonianos companheiros ter auto valor zero. Assim é claro que se o estado fundamental de um Hamiltoniano H_1 é $E_o^{(1)}$ com autofunção $\psi_o^{(1)}$, lembrado da definição (21), pode-se escrever H_1 na forma

$$H_1 = a_1^{+}a_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \tag{29}$$

onde

$$a_1^{+} = \frac{d}{dx} + W_1(x) \tag{30}$$

e

$$a_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x) \tag{31}$$

o fator constante $E_o^{(1)}$ é adicionado de forma a assegurar que o Hamiltoniano original tenha estado fundamental com auto valor zero. Por questão de simplicidade, de agora em diante admite-se $\hbar = 2m = 1$. Este subterfúgio não atrapalha em nada a apresentação dos conceitos, embora evite sobrecarga a notação.

O companheiro supersimétrico de H_1, seguindo a definição (21), é então dado por

$$H_2 = a_1 a_1^{+} + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \tag{32}$$

onde $V_2(x)$ em geral é diferente de $V_1(x)$. As relações (24), (25) e (26) continuam sendo válidas aqui, uma vez que se está obedecendo a estrutura da supersimétrica.

Partindo agora de H_2 cujo estado fundamental tem autovalor de energia $E_o^{(2)} = E_1^{(1)}$ (vide relação (24)) pode-se gerar de maneira análoga um terceiro Hamiltoniano H_3 como companheiro supersimétrico de H_2, desde que se possa escrever H_2 na forma:

$$H_2 \equiv a_1 a_1^{+} + E_0^{(1)} = a_2^{+}a_2 + E_0^{(2)} \tag{33}$$

onde

$$a_2^{+} = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \tag{34}$$

$$a_2 = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \tag{35}$$

Invertendo os novos operadores obtém-se o novo companheiro supersimétrico:

$$H_3 = a_2 a_2^{+} + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \tag{36}$$

onde $V_3(x)$ por sua vez não é, em geral, igual a $V_2(x)$ nem $V_1(x)$. Seguindo as relações (24) e (25) é fácil observar que:

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \tag{37}$$

$$\psi_n^{(2)} = (E_n^{(2)} - E_0^{(2)})^{-1/2} a_2 \psi_{n+1}^{(2)} = (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(2)})^{-1/2} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} a_2 a_1 \psi_{n+2}^{(1)} \tag{38}$$

Este processo pode ser repetido m vezes, desde que os Hamiltonianos sucessivos possam ser fatorizados, o que gera toda uma família de Hamiltonianos cujos membros estão relacionados pela supersimetria. Neste caso tem-se

$$H_m = a_m^{+}a_m + E_0^{(m)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) \tag{39}$$

onde

$$a_m^{+} = -\frac{d}{dx} + W_m(x) \tag{40}$$

$$a_m = \frac{d}{dx} + W_m(x) \tag{41}$$

A relação entre as autofunções e autovalores vem da aplicação das relações (24) e (25) sucessivas vezes[5]:

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \cdots = E_{n+m-1}^{(1)} \tag{42}$$

$$\psi_n^{(m)} = (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(m-1)})^{-1/2} \cdots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} a_{m-1} \cdots a_1 \psi_{n+m-1}^{(1)} \tag{43}$$

Portanto, uma vez que autovalores e autofunções são conhecidos para um dos membros da Hierarquia de Hamiltonianos (o Hamiltoniano original, por exemplo) é possível determiná-los para todos os Hamiltonianos através da superalgebra. A Fig. 2 ilustra este resultado.

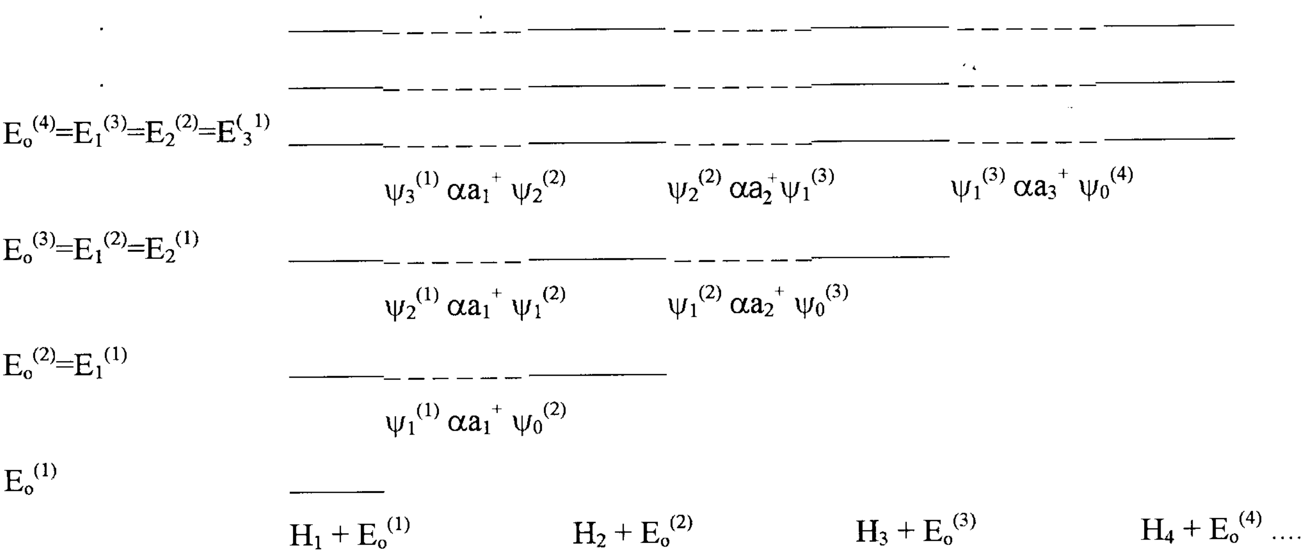

Figura 2: Representação da hierarquia de Hamiltonianos e da relação entre os autoestados e autovalores de energia obtidos através de supersimetria.

IV. Resolvendo a equação de Schrödinger através da supersimetria

Como foi observado anteriormente (Sec. III) o estado fundamental na construção supersimétrica não é degenerado e seu autovalor é zero. Esta propriedades permite determinar uma relação entre o superpotencial $W(x)$ e a função de onda deste estado, observando que

$$a\psi_0 \equiv \left[\frac{d}{dx} + W(x)\right] \psi_0 = 0 \tag{44}$$

o que implica em

$$\psi_0 \propto \exp\left[-\int^x +W(\bar{x})d\bar{x}\right] \tag{45}$$

Assim, sendo possível determinar o superpotencial (ou em outras palavras, fatorizar o Hamiltoniano) pode-se encontrar a autofunção para o estado fundamental. Por outro lado, a constante aditiva que aparece em tal fatorização representa o autovalor da energia para este estado. Isto significa que uma vez supersimetrizado um Hamiltoniano obtém-se com sub produto imediatamente o autovalor e a autofunção para o seu estado fundamental. Indo mais além, se o Hamiltoniano em questão permitir construir uma Hierarquia como indicado na secção anterior, então teremos para cada membro desta Hierarquia o estado fundamental resolvido com a determinação do auto valor de energia e auto função. Aplicando, por fim, as relações (42) e (43) para relacionar os estados fundamentais de cada membro da Hierarquia ao Hamiltoniano de partida é fácil ver que resolvemos a equação de Schrödinger original.

O procedimento descrito acima constitue em si em um método para resolver a equação de Schrödinger, para ilustrá-lo tomemos o sistema quântico bastante simples de uma partícula em uma caixa unidimensional. Neste caso o Hamiltoniano constitui-se apenas da parte cinética:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} \qquad -L \leq x \leq L \tag{46}$$

por simplicidade vamos adotar $L = \pi/2$. Construindo a Hierarquia de Hamiltoniano como indicado na secção anterior obtemos

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{(n-1)}{\cos^2 x} + n^2 \tag{47}$$

onde $n = 1, 2, 3....$ Os operadores bosônicos são

$$a_n^+ = -\frac{d}{dx} - n\ tg\ x \tag{48}$$

$$a_n = \frac{d}{dx} - n\ tg\ x \tag{49}$$

Observa-se que, neste caso, os operadores bosônicos não representam os operadores criação e destruição como é o caso do oscilador harmônico.

Usando as propriedades de supersimetria na Hierarquia de Hamiltonianos descrita por (47) obtemos em primeiro lugar que o estado fundamental do n-ésimo Hamiltoniano vale (usando (45), a normalização não está incluida nos cálculos)

$$\psi^{(n)} \alpha \exp[-\int^x W_n(\bar{x})d\bar{x}] = \exp[\int^x n\ tg\ \bar{x} d\bar{x}] = \cos^n x \tag{50}$$

Por outro lado, lembrando que como se está interessado apenas nos estados fundamentais, da equação (39) percebe-se que

$$E_0^{(n)} = n^2 \tag{51}$$

Finalmente, lembrando que os autovalores e as autofunções estão relacionadas entre si na Hierarquia de Hamiltonianos (figura 2), pode-se obter as autofunções e autovalores para o Hamiltoniano original:

$$E_n^{(1)} = E_1^{(n)} = n^2 \tag{52}$$

$$\partial \psi_{n+1}^{(1)} \alpha a_n^+ \ldots a_1^+\ \psi_1^{(n)} \tag{53}$$

onde $E_n^{(1)}$ e $\psi_n^{(1)}$ são, respectivamente, autovalores e autofunções para o sistema da partícula em uma caixa.

V. Conclusão

Neste trabalho procurou-se introduzir o conceito de supersimetria em Mecânica Quântica e indicar como este conceito pode ser útil para resolver a equação de Schrödinger. Este tipo de abordagem tem sido bastante usada para tratar sistemas Hamiltonianos que possuem soluções analíticas e exatas (como o oscilador harmônico e átomo de Hidrogênio entre outros[8,12]). Além destes sistemas, este formalismo tem sido bastante útil no estudo de uma classe de potenciais chamados de parcialmente solúveis, onde apenas parte do espectro pode ser determinado analiticamente[14].

Inúmeras aplicações tais como aproximação WKB, método variacional, física atômica, e quebra de supersimetria em Mecânica Quântica, entre outros, estão sendo desenvolvidas com o formalismo apresentado aqui, o leitor interessado pode consultar os artigos de revisão e didáticos sobre o assunto (ref. [5-10] e ref. [15]) para ter uma idéia mais abrangente.

Agradecimento

O autor gostaria de expressar seu agradecimento à Dra. R. M. Ricotta (FATEC-São Paulo) e ao Dr. A. Agostinho Neto (IBILCE-UNESP) por estimulantes discussões, particularmente com respeito ao sistema da partícula em uma caixa. E à FAPESP e CNPq por suporte financeiro parcial.

Referências

1. Veja, por exemplo: L. Schiff *Quantum Mechanics* (Mc Graw-Hill, New York, 1968); L. Landau e E. Lifshitz *Quantum Mechanics* (Pergamon, New York, 1977); V.A. Fock *Fundamentals of Quantum Mechanics* (Mir, Moscow, 1982). Veja também M. Goto, Rev. Bras. Ens. Fis. **15**, 7 (1993).
2. Veja, por exemplo: F. Reich *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* Mc Graw-Hill Book Co. (New York) (1965).
3. E. Witten, Nucl. Phys. B **185**, 513 (1981).
4. F. Ravndal *Elementary Supersymmetry* CERN School of Physics CERN **85-11**, 300 (1985).
5. F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
6. R.W. Haymaker and A.R.P. Rau, Am. J. Phys. **54**, 928 (1986).
7. A. Lahiri, P.K. Roy and B. Bagchi, Int. J. Mod. Phys. **A5**, 1383 (1990).

8. G. Lévai, *International Symposium on Quantum Inversion Theory and Applications* Ed. H.V. van Gevamb, Springer-Verlag Lect. Notes in Phys **427**, 208 (1994).
9. C.A. Blockley and G.E. Stedman, Eur. J. Phys. **6** , 218 (1985); G.E. Stedman, Eur. J. Phys. **6**, 225 (1985).
10. L.E. Gendenshteinand, IV Krive Sov. Phys. Usp **28**, 645 (1985).
11. O.L. de Lange and A. Welter, Am. J. Phys. **60**, 254 (1992).
12. R. Dutt, A. Khare and U.P. Sukthatme, Am. J. Phys. **56**, 163 (1988).
13. E. Drigo Filho, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, L1025 (1988).
14. Alguns exemplos deste tipo de abordagem podem ser obtidos em: M. A. Shifman Int. J. Mod. Phys. **A4**, 3305 (1989); P. Roy, B. Roy and R. Roychoudhury Phys. Lett. **A139**, (1989); E. Drigo Filho and R.M. Ricotta, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991); R. Roychoudhury and Y.P. Varshni, Phys. Rev. **A42** (1990); E. Drigo Filho Mod. Phys. Lett. **9**, 411 (1994).
15. O.L. de Lange and R.E. Raab *Operator Methods in Quantum Mechanics* (Oxford Science Pu, Oxford, 1994).