Sobre Covariância Galileana e o Campo de Schrödinger

A. E. Santana*

Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia

Campus de Ondina, 40210-340, Salvador-Bahia

Trabalho recebido em 2 de fevereiro de 1997

The Galilei group is presented as a group of transformations in a 5-dimensional space ($\mathcal{G}$) derived as a homomorphic immersion of the Euclidean space into a $(4,1)$ - Minkowski space. Three out of the five dimensions of $\mathcal{G}$ are related with $\mathcal{R}^3$, whilst the other two are associated with time and mass. Therefore, the Takahashi's covariant approach for the Galilei group is derived. Unitary representations are studied; and in this context, similarities between the quantum theory and the quantum field theory are emphasised.

Abstract

O grupo de Galilei é apresentado como um grupo de transformações num espaço penta-dimensional ($\mathcal{G}$) obtido por uma imersão homomórfica do espaço Euclidiano num espaço de Minkowski do tipo $(4,1)$. Três das cinco dimensões de $\mathcal{G}$ estão relacionadas ao $\mathcal{R}^3$, e as outras duas à massa e ao tempo. Desse modo, a formulação covariante do grupo de Galilei, como introduzida por Takahashi, é deduzida. Representações unitárias são estudadas; e neste contexto, similaridades entre a mecânica quântica e a teoria quântica de campo são destacadas.

Palavras Chaves: Grupo de Galilei, Espaço Métrico, Representações Unitárias, Mecânica Quântica.

I. Introdução

É com o trabalho de Wigner de 1939 [1] que se inicia o estudo sistemático das representações unitárias do grupo de Poincaré, resultando num desenvolvimento inédito para a física, e em particular, para a mecânica quântica relativística. Neste contexto, são as simetrias do espaço-tempo que essencialmente definem a estrutura e a dinâmica do sistema mecânico, sendo que, a cada partícula elementar está associada uma representação irredutível do grupo de Poincaré.

Dessa maneira, os ingredientes axiomáticos da teoria quântica de campo relativística são estabelecidos de modo transparente e geral; destarte a elegância [2, 3, 4]. Assim, por exemplo, o conceito de partícula elementar fica completamente caracterizado dentro do formalismo. Por outro lado, se prescinde de um princípio de correspondência para a formulação de uma teoria quântica. Ou seja, neste contexto, não é necessário um análogo clássico, a partir do qual o sistema quântico é inferido por um isomorfismo entre os constituintes algébricos que descrevem cada sistema. Se um tal análogo clássico existe, tanto melhor. Mas em geral, a análise da estrutura de simetria permite a introdução da mecânica quântica relativista, com interpretação física consistente, sem necessidade de um correspondente clássico.

A despeito do avanço que se sucede ao trabalho de Wigner no entendimento do grupo de Poincaré, é somente na década de 50 que se inicia um estudo similar para a mecânica quântica não relativista. Neste caso, a estrutura de simetria fica estabelecica pela invariância da equação de Schrödinger por transformações no espaço e no tempo, que resulta no grupo de Galilei.

As representações unitárias de um grupo de simetria são deduzidas através da associação de cada elemento do grupo a um operador unitário satisfazendo as regras

*Este trabalho foi desenvolvido durante estada do autor no Department of Physics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, T6G 2J1, Canada. Apoio financeiro: CAPES e CNPq. e-mail: ademir@ufba.br

de composição do grupo [5]. Mais especificamente, considere G um grupo de simetria com elementos $a, b, c, \ldots$. Para cada $a \in$ G está associado um operador unitário $U(a)$ definido num espaço de Hilbert, tal que

$$U(a)U(b) = e^{\phi(a,b)}U(a,b). \tag{1}$$

O fator de fase $\phi(a,b)$ é uma função de a e b, real e contínua. Se $\phi = 0$, a representação é dita *fiel*. Caso contrário, a representação é dita *projetiva*. Nesta situação, um vetor no espaço de Hilbert fica definido a menos do fator de fase.

Inönü e Wigner[6], estudando as representações unitárias do grupo de Galilei, concluiram que com as representações fiéis, não seria possível a construção de funções de onda – estados – que fossem localizadas, e que tivessem velocidades definidas. Ou seja, tais representações devem ser descartadas enquanto possíveis candidatas para descrever uma partícula quântica não relativística. Bargman[7] mostrou, por outro lado, que para o grupo de Rotação, Lorentz e Poincaré, as representações projetivas poderiam ser reduzidas a uma representação fiel. Entretanto, isto não se dá com o grupo de Galilei, onde representações projetivas, em geral, não são redutíveis a uma representação fiel[8]. Em uma síntese dos trabalhos de Inönü, Wigner e Bargman, Hamermesh[9], estudando a álgebra de Lie do grupo de Galilei, estabeleceu que operadores de posição e momento poderiam ser definidos somente para o caso de representações projetivas, que passaram a ser também denominadas de *representações físicas*[10]. Desde então, o interesse nas representações unitárias descrevendo simetrias Galileanas tem-se concentrado, principalmente, e como acontece com o grupo de Poincaré, no estudo de estruturas de simetrias conformes e internas (nesta situação, as variáveis de spin aparecem por consistência na física não relativista, e não como uma propriedade exclusiva da invariância Lorentziana) [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Sistemas não lineares também têm sido analisados no mesm o contexto [21, 22]; e através de representações da álgebra de Lie associadas à teoria de campo térmica, em particular ao formalismo conhecido como *thermofield Dynamics* [23], a conexão do grupo de Galilei com a função Wigner e equações de Liouville tem sido estabelecida [24, 25, 26, 27, 28].

Todavia, a despeito da reconhecida importância do grupo de Galilei para a mecânica quântica, somente alguns aspectos dessas simetrias, como bem constatam Fushchich e Nikitin [29], têm sido tratados a contento. Tal constatação pode ser melhor entendida com alguns exemplos de situações específicas.

Consideremos, então, o caso de excitações elementares em superfluidos. Tais excitações, introduzidas e chamadas de fônons e rótons por Landau [30], são interpretadas como manifestações coletivas do campo de Schrödinger. Ou seja, o campo original (e ressalte-se, invariante pelas transformações do grupo de Galilei) se rearranja, devido às interações, gerando tais excitações. O resultado final é uma quebra de simetria Galileana. De fato, no caso da componente do campo de fônons caracterizada por uma velocidade de fase c_s, a Lagrangeana é invariante sob uma transformação de Lorentz, onde a velocidade da luz é substituida por c_s. Assim, surgem as famosas relações de dispersão para os fônons e rótons, similares às relações energia-momentum no caso relativista. Essa invariância Lorentziana das excitações, porém, só possui um significado matemático, no sentido de que a interpretação física do espaco-tempo onde a teoria está formulada não se reduz àquela correspondente ao espaço de Minkowski, para o qual a velocidade da luz tem um carácter universal.

Tal quebra de simetria, do campo original Galileano para o resultado final Lorentziano, é ainda acompanhada de outros fatos em conexão com as transformações de Galilei: bem conhecido é, na teoria de Landau, a importância do movimento de translação do fluido, descrito por uma transformação pura de Galilei, e suas interações com impurezas e paredes do recipiente.

Assim como nos superfluidos, ocorre também quebra da simetria Galilena em outros sistemas da física não relativista, como aqueles descritos pela mecânica estatística. Nesse caso, o rearranjo de simetria pode se dar, por exemplo, por processos espontâneos satisfazendo a segunda lei da termodinâmica, e que induzem ao surgimento de processos irreversíveis e de transições de fase.

Estas propriedades de simetria, de fato, não têm sido exploradas completamente de um ponto de vista teórico, nem tampouco suas aplicações têm sido consideradas em toda sua potencialidade prática. Isto indica à necessidade de se implementar os estudos sobre o grupo de Galilei, o que pode ser feito tendo como guia propriedades constitutivas do grupo de Poincaré e as quebras de simetria nos sistemas conhecidos. É neste sentido que Takahashi [31, 32, 33] introduziu uma versão covariante para o grupo de Galilei baseada em tensores penta-dimensionais. Tal método tem sido utilizado, em particular, na dedução de equações de campo não lineares, a partir das quais o rearranjo de simetrias em superfluidos tem sido analisado em conexão com bósons de Goldstone. Outro aspecto de interesse é o estudo de representações descrevendo partículas não relativística com spin arbitrário.

Um dos objetivos aqui é apresentar a estrutura covariante do grupo de Galilei, enfatizando a natureza do espaço vetorial métrico onde as transformações estão definidas [34]. Assim, primeiro, é estabelecido que o grupo de Galilei pode ser tratado como um grupo de transformações lineares sobre uma variedade, a ser denominada por $\mathcal{G}$, na qual a métrica é conservada. Sob este ponto de vista de grupo de transformação, fica a apresentação do grupo de Galilei unificada com as de outros grupos importantes na física, como o grupo de Rotações, onde a variedade (da representação básica) é o espaço Euclidiano ($\mathcal{E}$); ou ainda, os grupos de Lorentz e Poincaré, onde a variedade é o espaço de Minkowski. Segundo, é alcançado transparência na apresentação, pois o conteúdo físico das cinco dimensões do espaço $\mathcal{G}$ fica definido desde início. De fato, 3 das 5 dimensões estarão relacionadas ao espaço $\mathcal{E}$, enquanto que as outras estarão vinculadas à massa e ao tempo. Além disso, $\mathcal{G}$ pode ser definido por um processo de imersão homomórfica de $\mathcal{E}$ num espaço de Minkowski $(4,1)$ do tipo de Sitter. Esta relação entre tais espaços métricos possui importância na definição apropriada da álgebra de Clifford, quando do estudo de representações de spin não nulos. Outrossim, tal imersão pode trazer algum esclarecimento sobre o mecanismo de quebra de simetria em sistemas não relativísticos, como no caso de superfluidos.

Uma abordagem pedagógica, como um outro objetivo, será perseguida ao longo deste texto. Assim, além do carácter de revisão, ênfase especial será dada à apresentação de fundamentos da mecânica quântica via a teoria de grupo. Disto resulta que a teoria quântica não relativística pode ser formulada de um modo natural e também similar à teoria quântica de campo relativista; isto é, sem princípio de correspondência e sem perder as características básicas de uma mecânica no sentido de Dirac. Desse modo, equações generalizadas de Schrödinger, como equações não lineares ou spinoriais, podem ser introduzidas consistemente do ponto de vista físico, sem necessidade de análogo clássico. Para alcançar tais resultados, argumentos físicos intuitivos prevalecerão ao rigor matemático.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2 algumas generalidades sobre o grupo de Galilei são apresentadas, e a equação de Schrödinger é deduzida seguindo de perto o método proposto por Hamermesh [5]. Na seção 3 é introduzido o espaço métrico $\mathcal{G}$ onde transformações específicas caracterizam o grupo de Galilei. Na seção 4 a álgebra de Lie é deduzida a partir dos geradores de transformações lineares em $\mathcal{G}$. Representações unitárias covariantes são estudadas na seçao 5. Por fim, na seção 6 são apresentadas as conclusões finais, bem como alguma discussão sobre possíveis desenvolvimentos de outras representações unitárias Galileanas.

II. Generalidades Sobre o Grupo de Galilei

O grupo de Galilei (G) consiste das translações no espaço e no tempo, das rotações espaciais e das chamadas transformações puras de Galilei (alguns autores usam também a denominação de *acelerações* para tais transformações). Um elemento geral de G será denotado por $G = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)$, onde b representa a translação temporal, $\mathbf{a}$ a translação no espaço, R a rotação e $\mathbf{v}$ a transformação pura de Galilei. Os elementos do grupo descrevem as transformações de cordenadas $(\mathbf{x}, t)$, de um evento no espaço-tempo, para outras coordenadas $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ da seguinte maneira: $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = G(\mathbf{x}, t) = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)(\mathbf{x}, t)$, de tal modo que

$$\bar{\mathbf{x}} = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \tag{2}$$

$$\bar{t} = t + b. \tag{3}$$

A transformação identidade é, então, caracterizada por $G = E = (0, 0, 0, R = 1)$. Uma transformação é dita elementar quando envolve somente um tipo de transformação (ou subgrupo). Por exemplo, $(b, 0, 0, 1)$, ou $(0, \mathbf{a}, 0, 1)$. Assim, as relações entre as transformações elementares ficam dadas por

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), & (R_1)(R_2) = (R_1 R_2), \\ (b_1)(b_2) = (b_2)(b_1) = (b_1 + b_2), & (\mathbf{a})(b) = (b)(\mathbf{a}), \\ (\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v})(\mathbf{a}) = (\mathbf{a})(\mathbf{v}), \\ (R)(\mathbf{a}) = (R\mathbf{a})R, & (\mathbf{v})(b) = (b)(b\mathbf{v})(\mathbf{v}), \\ (b)(R) = (R)(b), & (R)(\mathbf{v}) = (R\mathbf{v})R, \end{array}$$

onde a notação empregada é tal que as transformações elementares são denotadas por simples parênteses, como por exemplo $(b, 0, 0, 0) = (b)$, ou $(0, \mathbf{a}, 0, 1) = (\mathbf{a})$. Vê-se então, como ilustração, que as transformações puras de Galilei não comutam com as translações no tempo, e as translações no espaço e no tempo comutam entre si. Usando essas propriedades, a lei de composição do grupo pode ser estabelecida. Isto é, dado dois elementos de G, $G_1 = (b_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{v}_1, R_1)$ e $G_2 = (b_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_2, R_2)$, o elemento $G = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)$, definido pela ação de G_2 seguindo a de G_1, é dado por

$$\begin{aligned} G &= G_1 G_2 \\ &= (\ b = b_1 + b_2,\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + b_2,\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + R_1 \mathbf{v}_2,\ R = R_1 R_2). \end{aligned} \tag{4}$$

O elemento inverso de G, denotado por G^{-1}, é definido por $GG^{-1} = G^{-1}G = E$, tal que

$$\begin{aligned} G^{-1} &= (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)^{-1} \\ &= (-b, R^{-1}(b\mathbf{v} - \mathbf{a}), -R^{-1}\mathbf{v}, R^{-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Considerando os elementos infinitesimais dos subgrupos a um parâmetro e usando a lei de composição, Eq.(4), as relações de comutação entre os geradores podem ser calculadas. Tais relações estabelecem a *álgebra de Lie do Grupo de Galilei* na representação do espaço-tempo. Em termos de representações unitárias, esses geradores são considerados operadores Hermitianos. Denotando, então, por $\mathbf{J}$ o gerador das rotacões, $\mathbf{A}$ o gerador de deslocamentos espaciais, $\mathbf{G}$ o gerador de transformações puras de Galilei, e H o gerador de deslocamentos no tempo, as relações de comutação não nulas ficam dadas por

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k, \tag{6}$$
$$[J_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk} A_k, \tag{7}$$
$$[J_i, G_j] = i\varepsilon_{ijk} G_k, \tag{8}$$
$$[G_i, H] = -iP_i, \tag{9}$$
$$[A_i, G_j] = -im\delta_{ij}\mathbf{1}, \tag{10}$$

onde ε_{ijk} é o tensor de Levi-Cevita e m é uma constante real.

Na representação do espaço-tempo, os geradores infinitesimais que estabelecem as transformações dadas pelas eqs.(2) e (3) satisfazem as eqs.(6)-(10), com $m = 0$ na eq.(10). Neste caso, um tal conjunto de relações de comutação constitui uma representação fiel da álgebra de Lie de G [9]. Contudo, aqui, tais equações com m em princípio não nulo estão representando, de maneira geral, as relações de comutação para representações projetivas do grupo de Galilei. Observe, assim, que somente quando $m = 0$ existe uma redução da representação projetiva à representação fiel do grupo. Se $m \neq 0$ a álgebra de Lie passa, então, a ser uma *extensão central* da álgebra de Lie original, ao se considerar m um operador múltiplo da identidade.

Para a dedução de uma representação que descreva algum sistema físico, a existência de um operador, $\mathbf{P}$, representando o momentum de uma partícula é, então, postulada. Este operador deverá estar associado a possíveis combinações de operadores da álgebra de Lie do grupo de Galilei, satisfazendo as seguintes condições físicas: (i) o valor esperado de $\mathbf{P}$ deve ser inalterado por uma translação no estado. (ii) $\mathbf{P}$ se transforma como um vetor quando o estado for rodado. (iii) O valor esperado de $\mathbf{P}$ mudará de um fator de $\mu\mathbf{v}$, quando o estado for transformado de um sistema de referência para um outro com velocidade relativa $\mathbf{v}$; ou seja, quando o estado for submetido a uma transformação pura de Galilei, sendo μ uma constante identificada com a massa da partícula. Da mesma maneira, um operador posição

$\mathbf{Q}$ é postulado satisfazendo as condições (i) e (ii), sendo que na terceira condição é acrescido $t\mathbf{v}$ a $\mathbf{Q}$. Denotando por $U(\mathbf{v})$ o operador unitário que produz as transformações puras de Galilei, tais condições sobre $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ são dadas por

$$\langle a|U(\mathbf{v})^\dagger\, \mathbf{Q}\, U(\mathbf{v})|b\rangle = \langle a|\mathbf{Q}|b\rangle + t\mathbf{v}\langle a|b\rangle, \qquad (11)$$
$$\langle a|U(\mathbf{v})^\dagger\, \mathbf{P}\, U(\mathbf{v})|b\rangle = \langle a|\mathbf{P}|b\rangle + \mu\mathbf{v}\langle a|b\rangle. \qquad (12)$$

Considerando transformações infinitesimais, $U(\mathbf{v})$ pode ser escrito em primeira ordem como $U(\mathbf{v}) \simeq 1 - i\mu\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{G}'$, o que resulta em

$$[\, P_i,\ G'_j\,] = -i\mu\delta_{ij}. \qquad (13)$$

Assim, uma representação fisicamente consistente é obtida com a seguinte identificação dos geradores de G (eqs. (6)–(10)): $\mathbf{P} = \mathbf{A}$, $m = \mu$ e $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$. Além disso, o operador posição pode ser definido como

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{G}}{m} - \frac{t}{m}\mathbf{P}. \qquad (14)$$

Desse modo, as eqs.(13) e (14) fornecem as relações de incerteza de Heisenberg: $[\, P_i,\ Q_j\,] = -i\delta_{ij}$ (o sistema de unidades em que $\hbar = 1$ está sendo usado).

A evolução de um operador arbitrário ξ é estabelecida pelo gerador de translação temporal do grupo, o operador H. Isto é, $\xi(t)$ é dado por

$$\xi(t) = \exp(it\ H)\,\xi\,\exp(-i\ H), \qquad (15)$$

que resulta na equação

$$i\dot{\xi}(t) = [\xi(t), H]. \qquad (16)$$

Para escrever explicitamente a eq.(16), notemos que os invariantes da álgebra de Lie, eqs.(6)-(10), chamados também de invariantes de Casimir, sao dados por

$$I_1 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - H, \qquad (17)$$
$$I_2 = (\mathbf{J} - \mathbf{Q}\times\mathbf{P})^2. \qquad (18)$$

Tais invariantes possuem um valor constante numa representação irredutível; o que significa que são múltiplos do operador identidade (isto é o resultado dos chamados lemas de Schur [5]). Substituindo, então, H dado pela eq.(17) na eq.(16), resulta

$$i\dot{\xi}(t) = [\xi(t), \frac{\mathbf{P}^2}{2m}], \qquad (19)$$

que é a equação de Heisenberg descrevendo uma partícula quântica livre. Note que o valor do invariante de Casimir I_1 não desempenha aqui um papel especial. Assim, a situação em que $H = \mathbf{P}^2/2m$ pode ser escolhida. Ou seja, o gerador de evolução temporal do grupo passa a ser identificado com a energia do sistema, que fica definida a menos de uma constante arbitrária. A partir da eq.(16), que define a *descrição de Heisenberg*, a *descrição de Schrödinger* pode ser introduzida de modo usual, resultando na equação de Schrödinger,

$$i|\psi(t)\rangle = \frac{\mathbf{P}^2}{2m}|\psi(t)\rangle. \qquad (20)$$

Desde que os operadores H, $\mathbf{P}$ e o invariante I_2, o spin, comutam entre si, uma representação tal que sejam diagonais pode ser escolhida. Isto é,

$$\mathbf{P}|\mathbf{p}, E, s\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}, E, s\rangle,$$
$$H|\mathbf{p}, E, s\rangle = E|\mathbf{p}, E, s\rangle,$$

sendo s o valor do invariante I_2, que será tido como zero. Assim, podemos escrever $\psi(\mathbf{p}, E) = \langle\mathbf{p}, E|\psi(t)\rangle$, o que resulta, a partir da eq.(20), em

$$H(\mathbf{p})\phi(\mathbf{p}) = E\phi(\mathbf{p}); \quad \Phi(E, t) = \Phi_0 e^{-iEt}, \qquad (21)$$

with $\psi = \phi\Phi$.

Na situação em que $m = 0$ na eq.(10), não existe combinação de operadores da álgebra de Lie do grupo de Galilei que possa ser identificada com $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ (para a demostração vide o trabalho de Hamermesh [9]). Ou seja, não se encontra uma representação unitária não relativística para partículas de massa nula.

III. Covariância Galileana

As representações unitárias do grupo de Galilei apresentadas na seção anterior, embora consistentes, não esgotam todas as possibilidades de representações unitárias. De fato, a única representação física irredutível obtida resulta numa equação de Shrödinger linear descrevendo uma partícula livre. Entretanto, isto não é suficiente para cobrir toda a diversidade de processos na física não relativística, como na física da matéria condensada onde ocorrem processos não lineares e de quebras de simetria. Tal fato, por si só, justifica o estudo das representações do grupo de Galilei sob perspectivas mais gerais. E isto pode ser obtido se, a *priori*, for estabelecido a variedade em que as transformações do grupo de Galilei estão definidas. Este é o objetivo principal nesta seção. Para isto, é possível proceder como segue [34].

O Espaço Euclidiano ($\mathcal{E}$) é o espaço vetorial métrico no $\mathcal{R}^3$, tal que a distância entre dois pontos permanece invariante por transformações lineares. Em termos vetorias, isto significa que dado dois vetores $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$ em $\mathcal{E}$, tem-se que

$$D^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \tag{22}$$

é invariante por rotações e translações. Nos processos físicos descritos por uma mecânica Galileana, os fenômenos se dão como transformações em $\mathcal{E}$, que são ainda translações e rotações (os aspectos de dilatação não serão discutidos aqui). Todavia, uma das translações, a transformação pura de Galilei, é definida via um parâmetro extra, o tempo. Mas a particularidade básica nas transformações Galileanas é ainda a de manter D^2 invariante. Podemos, então, usar a eq.(22) para introduzir um espaço métrico de dimensão maior que três, a fim de incluir o parâmetro tempo como uma coordenada. De fato, isto pode ser assim, se a eq.(22) for reescrita como

$$s^2 = -\frac{1}{2}D^2 = -t\frac{\mathbf{x}^2}{2t} - t\frac{\mathbf{y}^2}{2t} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}. \tag{23}$$

Esta expressão, entretanto, nada mais é do que o produto escalar de dois vetores particulares de um espaço métrico penta-dimensional, a ser chamado de $\mathcal{G}$, estabelecido a seguir.

Dado dois vetores arbitrários $x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = (\mathbf{x}, x^4, x^5)$ e $y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) = (\mathbf{y}, y^4, y^5)$ em $\mathcal{G}$, o produto escalar é definido por

$$\begin{aligned} (x|y) &= \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \\ &= \sum_{i=1}^{n=3} x^i y^i - x^4 y^5 - x^5 y^4. \end{aligned} \tag{24}$$

Ou seja, o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ é dado por

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

(Os índices latinos aqui estarão indicando as componentes de vetores em $\mathcal{E}$, como na eq.(24)). Note que o produto escalar em $\mathcal{G}$ se reduz a expressão de s^2, eq.(23), quando x e y em $(x|y)$ forem tais que

$$x^5 = \frac{\mathbf{x}^2}{2t}, \quad y^5 = \frac{\mathbf{y}^2}{2t}, \quad and \quad x^4 = y^4 = t. \tag{26}$$

As operações de subir e descer índices tensorias podem ser introduzidas pelas relações

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \tag{27}$$

onde $(\eta_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu}$. Desse modo, a eq.(24) pode ser escrita como

$$(x|y) = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu,$$

com $x_i = x^i$, $(i = 1, 2, 3)$; $\quad x^4 = -x_5$ e $x^5 = -x_4$.

Podemos definir uma classe de transformações lineares por

$$\bar{x}^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu; \tag{28}$$

tal que, as componentes conectadas a identidade satisfaçam à condição $|L| = 1$. Assumindo que $\eta_{\mu\nu}$ é invariante sob tais transformações, segue da eq.(24) que

$$L\eta L^T = \eta; \tag{29}$$

onde L^T significa a matriz transposta de L. Os vetores contravariantes são, então, tensores contravariantes de primeira ordem que se transformam como

$$\bar{V}^\mu = L^\mu{}_\nu V^\nu; \quad L^\mu{}_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{30}$$

De modo outro, os vetores covariantes se transformam como

$$\bar{V}_\mu = L_\mu^{\ \nu} V_\nu, \tag{31}$$

com

$$L_\mu^{\ \nu} = \eta_{\mu\rho} L^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}.$$

Um tipo de vetor covariante é aquele descrito pelos operadores diferenciais $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, pois atente para que

$$\bar{\partial}_\mu = L_\mu^{\ \nu} \partial_\nu;$$

sendo $\partial_\mu \partial^\mu$ um invariante.

Um exemplo de tais transformações é dado por

$$\bar{x}^i = R^i{}_j x^j - v^i x^4, \tag{32}$$

$$\bar{x}^4 = x^4, \tag{33}$$

$$\bar{x}^5 = x^5 - v^i (R^i{}_j x^j) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 x^4; \tag{34}$$

que resulta em

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 & -v^1 & 0 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 & -v^2 & 0 \\ R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 & -v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_i R^i{}_1 & -v_i R^i{}_2 & -v_i R^i{}_3 & \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com $R^i{}_j = \delta^i{}_j$ nas Eqs.(32)–(34), os operadores diferenciais se transformam como

$$\bar{\partial}_i = \partial_i + v_i \partial_5,$$
$$\bar{\partial}_4 = \partial_4 + v^i \partial_i + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \partial_5,$$
$$\bar{\partial}_5 = \partial_5.$$

Outro 5-vetor de interesse é dado por

$$p_\mu = (\mathbf{p}, E/m, m),$$

onde $E = \mathbf{p}^2/2m$. As componentes de P_μ se transformam como

$$P_i = R_i{}^j P_j + v_i P_5, \tag{35}$$

$$P_4 = P_4 + v^i (R_i{}^j P_j) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 P_5, \tag{36}$$

$$P_5 = P_5. \tag{37}$$

Observe que as eqs.(32) e (33) são as transformações de Galilei definidas pelas eqs.(2) e (3) com $\mathbf{a}$ e b nulos e $x^4 = t$. A eq.(34) aparece como uma condição de compatibilidade devido ao uso do espaço $\mathcal{G}$. Esta condição é expressa pelas Eqs.(23) e (26) e representa uma imersão do espaço Euclidiano no espaço $\mathcal{G}$ [34]. De fato, todo vetor do espaço Euclidiano, $(\mathbf{A}) = (A^1, A^2, A^3)$, é imerso em $\mathcal{G}$ através da seguinte aplicação,

$$\Im : \mathbf{A} \ \mapsto \ A = (\mathbf{A}, 1, \mathbf{A}^2/2); \quad A \in \mathcal{G}.$$

Assim, os vetores de $\mathcal{E}$ estão numa correspondência 1-1 com vetores de $\mathcal{G}$ do tipo nulo; isto é, vetores tais que

$$\begin{aligned} \|A\| &= (\mathbf{A})^2 + A_4 A^4 + A_5 A^5 \\ &= (\mathbf{A})^2 - 2A^4 A^5 = 0, \end{aligned}$$

sendo $\|A\| = (A|A)$ a norma de A.

Similar ao que ocorre no espaço de Minkowski, dois outros tipos de vetores estão definidos em $\mathcal{G}$, que são os vetores com $\|A\| > 0$ e $\|A\| < 0$. Em particular, de acordo com as eqs.(23) e (26), os vetores associados à invariância Galileana são também vetores do tipo nulo.

O espaço $\mathcal{G}$, por outro lado, está em correspondência com um espaço de Minkowski $(4, 1)$, a ser denominado por $\mathcal{M}$, através da seguinte transformação de coordenadas em $\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \Re : x^i &\mapsto x^i \\ \Re : x^4 &\mapsto (x^4 + x^5)/\sqrt{2} \\ \Re : x^5 &\mapsto (x^4 - x^5)/\sqrt{2}, \end{aligned}$$

que resulta em $(x|y) = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, com diag $(g_{\mu\nu}) = (+,+,+,+,-)$. Portanto, $\mathcal{E}$ tem sido imerso em $\mathcal{M}$ através da seguinte composição de aplicações [34]:

$$\Re \circ \Im : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{M}$$

IV. Álgebra de Lie do grupo de Galilei

Consideremos, primeiro, as transformações homogêneas dadas pelas eqs.(32)–(34) na forma infinitesimal; isto é, a matriz $(L^\mu{}_\nu)$ é dada por

$$L^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu.$$

Usando a eq.(29), a condição de invariância da métrica, obtem-se

$$\epsilon^{\mu}{}_{\nu}\eta_{\mu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\epsilon^{\alpha}{}_{\beta} = 0. \qquad (38)$$

A partir da análise da eq.(38), a matriz $(\epsilon^{\mu}{}_{\nu})$ pode então ser dada como [34]

$$(\epsilon^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{1}{}_{2} & \epsilon^{1}{}_{3} & \epsilon^{1}{}_{4} & \epsilon^{1}{}_{5} \\ -\epsilon^{1}{}_{2} & 0 & \epsilon^{2}{}_{3} & \epsilon^{2}{}_{4} & \epsilon^{2}{}_{5} \\ -\epsilon^{1}{}_{3} & -\epsilon^{2}{}_{3} & 0 & \epsilon^{3}{}_{4} & \epsilon^{3}{}_{5} \\ \epsilon^{1}{}_{5} & \epsilon^{2}{}_{5} & \epsilon^{3}{}_{5} & \epsilon^{4}{}_{4} & 0 \\ \epsilon^{1}{}_{4} & \epsilon^{2}{}_{4} & \epsilon^{3}{}_{4} & 0 & -\epsilon^{4}{}_{4} \end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Definindo

$$\begin{array}{ccc} \epsilon^{1}{}_{2} = w^3, & \epsilon^{1}{}_{3} = w^2, & \epsilon^{2}{}_{3} = w^1, \\ \epsilon^{1}{}_{4} = -v_1, & \epsilon^{2}{}_{4} = -v_2, & \epsilon^{3}{}_{4} = -v_3, \end{array} \qquad (40)$$

com as outras componentes nulas, segue que

$$(\epsilon^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & w^3 & w^2 & -v_1 & 0 \\ -w^3 & 0 & w^1 & -v_2 & 0 \\ -w^2 & -w^1 & 0 & -v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (41)$$

que ainda pode ser escrita como

$$(\epsilon^{\mu}{}_{\nu}) = \sum_{i=1}^{n=3} w^i J_i - \sum_{i=1}^{n=3} v_i G_i, \qquad (42)$$

onde

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ G_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As relações de comutação não nulas entre esses geradores são dadas por

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k; \quad [J_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k. \qquad (43)$$

Tal conjunto de relações é uma representação da álgebra de Lie do grupo Euclidiano, definido como o produto semidireto entre o grupo de rotação e o grupo abeliano de translação. Assim, os geradores G_i podem descrever translações infinitesimais no espaço Euclidiano. De fato, podemos mostrar que as matrizes (G_i) são os geradores de transformações puras de Galilei. Para tanto, considere o caso em que $R^{i}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}$ nas eqs.(32)–(34); ou seja,

$$\bar{x}^i = x^i - v^i x^4, \qquad (44)$$

$$\bar{x}^4 = x^4, \qquad (45)$$

$$\bar{x}^5 = x^5 - v^i x^i + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 x^4, \qquad (46)$$

que corresponde, por definição, a uma transformação pula de Galilei em $\mathcal{G}$. Segue, então, que

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Usando o fato que

$$(G_1)^2 = (G_2)^2 = (G_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

e $G_iG_j = 0$ para $i \neq j$, tem-se que $(L^\mu{}_\nu)$, dado pela eq.(47), pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (L^\mu{}_\nu) &= \left(exp(-v^iG_i)\right)^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu - \left(v^iG_i + \frac{1}{2}v^iv^jG_iG_j\right)^\mu{}_\nu . \end{aligned}$$

Ou seja, as eqs.(44)–(46), que definem uma transformação pura de Galilei, são obtidas a partir das matrizes G_i por

$$\bar{x}^\mu = exp(-v^iG_i)^\mu{}_\nu x^\nu .$$

Consideremos, agora, transformações não homogêneas do tipo $\bar{x}^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$, de modo que

$$\bar{x}^i = R^i{}_j x^j - v^i x^4 + \mathbf{a}, \tag{49}$$

$$\bar{x}^4 = x^4 + a^4, \tag{50}$$

$$\bar{x}^5 = x^5 - v^i(R^i{}_j x^j) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 x^4 + a^5. \tag{51}$$

Com o intuito de estudar a álgebra de Lie associada a estas transformações, é conveniente utilizar, na definição das transformações infinitesimais, os geradores na forma de operadores diferenciais. Assim, considerando

$$\begin{aligned} L^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu + \sum_{i=1}^{3} w^i J_i - \sum_{i=1}^{3} v_i G_i - a^\mu A_\mu , \end{aligned}$$

e procedendo de maneira usual, encontramos que os geradores são dados por

$$J_1 = \frac{1}{2}(x^2\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^2}), \tag{52}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(x^1\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^1}), \tag{53}$$

$$J_3 = \frac{1}{2}(x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^1}), \tag{54}$$

$$G_i = x^4\frac{\partial}{\partial x^i} + x^i\frac{\partial}{\partial x^5}, \tag{55}$$

$$A_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{56}$$

As relações de comutação ficam, então, especificadas por

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \tag{57}$$

$$[J_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \tag{58}$$

$$[J_i, G_j] = i\varepsilon_{ijk}G_k, \tag{59}$$

$$[G_i, A_4] = -iA_i, \tag{60}$$

$$[A_i, G_j] = -iA_5\delta_{ij}. \tag{61}$$

Esta é a álgebra de Lie para as transformações de Galilei não homogêneas que será denotada por g. As eqs.(52)–(56) passam a ser, então, uma representação de g. O fator imaginário i tem sido introduzido, tendo em vista o estudo de representações unitárias, na próxima seção. Em tal situação, por exemplo, o gerador **J** corresponderá ao momento angular total, que numa representação escalar será o momento angular orbital. Na situação mais geral que a escalar, **J** incluirá o momento angular intrínseco.

V. Equação de Schrödinger

Nesta seção vamos estudar representações unitárias que descrevam partículas quânticas livres, partindo da análise dos invariantes da álgebra g. Como primeiro resultado é, então, deduzida a equação de Schrödinger na forma de um campo escalar clássico. A quantização, que é apresentada em certo detalhe apenas por completeza à natureza pedagógica do trabalho, segue também no contexto da covariância Galileana.

Os invariantes de g são

$$I_1 = A_\mu A^\mu, \tag{62}$$
$$I_2 = (\mathbf{J} - \mathbf{Q}\times\mathbf{P})^2, \tag{63}$$
$$I_3 = A_5, \tag{64}$$

onde $\mathbf{Q} = \mathbf{G}/A_5$. Considere a representação na qual $I_2 = 0$, e com I_1 e I_3 especificados por

$$\begin{aligned} I_1|c,m,x\rangle &= c|c,m,x\rangle, \\ A_5|c,m,x\rangle &= m|c,m,x\rangle. \end{aligned}$$

Podemos, então, escolher A_μ como sendo o 5-momentum, definido pelas eqs.(35)–(37), de modo que $A_\mu \equiv P_\mu = i\partial_\mu$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} A_i &\equiv P_i = i\partial_i, \\ P_4 &\equiv E/2m = i\partial_4 = i\partial_t, \\ P_5 &\equiv i\partial_5. \end{aligned}$$

P_5 descreve a massa da partícula. Podemos, assim, escrever $\Psi(x;c,m) = \Psi(\mathbf{x}, x^4 = t; c; m) = \langle x; c, m|\Psi\rangle$, que resulta nas equações

$$-\partial_\mu\partial^\mu\Psi(x;c,m) = c\Psi(x;c,m), \tag{65}$$

e

$$(i\partial_5 - m)\Psi(x;c,m) = 0. \tag{66}$$

Como se trata de duas equações independentes, segue que a função de onda Ψ pode ser fatorada como

$$\Psi(x;c,m) = e^{-imx^5}\ \psi(\mathbf{x};t;c).$$

Assim, temos

$$\left(2\partial_5\partial_4 - \nabla^2 + c\right) e^{-imx^5}\ \psi(\mathbf{x};t;c) = 0. \tag{67}$$

Esta equação corresponde a equação de Schrödinger descrevendo uma partícula livre; isto é

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi(\mathbf{x};t) &= -\frac{1}{2m}\nabla^2\,\psi(\mathbf{x};t) \\ &= H_0\psi(\mathbf{x};t). \end{aligned} \tag{68}$$

c tem sido escolhido como zero ao se escrever a eq.(68), uma vez que se trata de um termo constante adicionado à energia cinética da partícula. As funções de onda $\psi(\mathbf{x};t)$ estão definidas num espaço de Hilbert a ser denotado por $\mathcal{H}$.

A versão quantizada pode ser induzida a partir dos invariantes da álgebra de Lie, ao se postular uma representação em termos de operadores de campo satisfazendo as seguintes equações,

$$\partial_\mu\partial^\mu\hat{\Psi}(x;m) = 0, \tag{69}$$

e

$$(i\partial_5 - m)\hat{\Psi}(x;m) = 0; \tag{70}$$

onde $\hat{\Psi}$ está definido num espaço de Fock $(\mathcal{F})$ tal que

$$\mathcal{F} = \oplus_m \mathcal{H}^{\otimes m}, \quad m = 0,1,2\ldots .$$

Nessa situação, também temos

$$\hat{\Psi}(x;m) = e^{-imx^5}\ \hat{\psi}(\mathbf{x};t);$$

tal que os operadores $\hat{\psi}(x)$ and $\hat{\psi}^\dagger(x)$ satisfazem as seguintes relações de comutação (a tempos iguais)

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(\mathbf{x};t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}';t)] &= \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \\ [\hat{\psi}(\mathbf{x};t), \hat{\psi}(\mathbf{x}';t)] &= [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x};t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}';t)] = 0. \end{aligned}$$

Assim, a partir da eq.(69), a equação de Schrödinger segundo quantizada fica dada por

$$i\partial_t\hat{\psi}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2m}\nabla^2\,\hat{\psi}(\mathbf{x}).$$

No espaço $\mathcal{F}$ está definido o estado $|0\rangle$, o vácuo, tal que $\psi(\mathbf{x};t)|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$, e $\psi^\dagger(\mathbf{x}_n;t)|0\rangle = |\chi_n\rangle$. Um vetor geral em $\mathcal{F}$ é definido por

$$|\chi(t)\rangle = \psi(t)_0|0\rangle + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int \psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n;t)|\chi_n\rangle d^n\mathbf{x},$$

onde $d^n\mathbf{x} = d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2\cdots d\mathbf{x}_n$,

$$|\chi_n\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_1)\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_n)|0\rangle$$

e $\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n;t)$ são funções simétricas definidas no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, tais que

$$\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n;t) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle\chi_n|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|\prod_{i=1}^{n}\hat{\psi}(\mathbf{x}_i)|\chi\rangle.$$

Além disso

$$\langle\chi|\chi'\rangle = \psi_0^*\psi_0' + \sum_{i=1}^{\infty}\int \psi^*(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n;t)\,\psi'(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n;t)d^n\mathbf{x}.$$

A expressão dos geradores compatível com a eq.(69) e com as relações de comutação da álgebra de Lie g é:

$$\hat{K} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\ K(\mathbf{x})\ \hat{\psi}(\mathbf{x})d\mathbf{x}; \tag{71}$$

onde $K(\mathbf{x})$ está representando um dos geradores da álgebra de Lie g. Ou seja tais geradores satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_i,\hat{J}_j] &= i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k,\\
[\hat{J}_i,\hat{P}_j] &= i\varepsilon_{ijk}\hat{P}_k,\\
[\hat{J}_i,\hat{G}_j] &= i\varepsilon_{ijk}\hat{G}_k,\\
[\hat{G}_i,\hat{H}] &= i\hat{P}_i,\\
[\hat{P}_i,\hat{G}_j] &= -i\hat{P}_5\delta_{ij},
\end{aligned}$$

onde $\hat{P}_5$ é constante e dado por $\hat{P}_5 \equiv \hat{N}P_5$. $\hat{N}$, o operador número, é definido, de modo compatível com da eq.(70), por

$$\hat{N} = \int \hat{N}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{72}$$

Observe que a eq.(69) pode ser escrita como

$$i\partial_t\hat{\psi}(t) = [\hat{\psi}(t),\hat{H}_0], \tag{73}$$

que corresponde a equação de evolução temporal do operador de campo $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ na descrição de Heisenberg. A generalização para férmions é imediata.

VI. Conclusões e Observações finais

As simetrias de Galilei têm sido apresentadas aqui a partir da análise da estrutura de variedade em que as transformações Galileanas estão definidas. O ingrediente básico corresponde a uma imersão do espaço Euclidiano no espaço penta dimensional $\mathcal{G}$. A relação de $\mathcal{G}$ com o espaço de Minkowski $(4,1)$ $(\mathcal{M})$ também tem sido analisada. Desse modo, a estrutura geométrica associada à invariância Galileana fica estabelecida. Isso permite, além de uma formulação axiomática consistente, explorar no contexto dos sistemas não relativísticos, elementos vantajosos desenvolvidos na física Lorentziana. Em termos formais, isto significa, em particular, que as representações físicas da álgebra de Lie do grupo de Galilei podem ser tratadas como representações vetorias (não projetivas).

Com este formalismo geométrico, as representações spinoriais podem ser estudadas seguindo em paralelo ao caso relativístico [33]. De fato, podemos introduzir um divisor de tal modo que a partir da represenção básica, dada pelas eqs.(65) e (66), obtem-se

$$\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) = 0, \tag{74}$$

e

$$(i\partial_5 - m)\Psi(x) = 0, \tag{75}$$

onde

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}.$$

As matrizes γ^μ formam uma álgebra de Clifford [35]de cinco dimensões que pode ser inferida da imersão $\Re \circ \Im$: $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{M}$. Ou seja

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu},$$

com

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}; \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{\mathbf{2}} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mathbf{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli e $\sqrt{\mathbf{2}}$ indica uma matriz 2×2. Esta representação spinorial, bem como a invariância de calibre, e representações para sistemas clássicos serão tratadas em outro lugar.

Agradecimentos: a F. C. Khanna e Y. Takahashi pelo encorajar, por estimulantes discussões e sugestões; a Liana de Aletheia pelas sugestões e paciente ajuda com as palavras. A essas pessoas que mais diretamente tornaram este trabalho possível, meu mais sincero agradecimento. Gostaria, também, de agradecer ao árbitro pelas sugestões e recomendações.

References

[1] E. P. Wigner, Ann. Math. 40 (1939)149.

[2] A. Aurilia e H. Umezawa, Phys. Rev. 182 (1969)1682.

[3] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper & Row, London, 1961)

[4] I. M. Gel'Fand, R. A. Minlos e Z. Ya. Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups* (Pergamon Press, N. Y., 1963).

[5] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Application to Physical Problems* (Dover Pub., N. York, 1989).

[6] E. Inönü and E. P. Wigner, N. Cimento 9 (1952) 705. (Uma apresentação interessante sobre a importância pedagógica e epistemológica da teoria de grupo em mecânica quântica não relativista pode ser encontrado em: J. M. Lévy-Leblond, N. Cimento 4 (1974) 99.)

[7] V. Bargmann, Ann. Math. 59 (1954) 1.

[8] Os resultados sobre as representações projetivas para o grupo de Galilei apareceram primeiro numa comunicação por Bargmann, não publicada e citada no artigo de Inönü e Wigner ref.6.

[9] M. Hamermesh, Ann. Phys. (N.Y.) 17 (1960) 518.

[10] J. M. Levy-Leblond, J. Math. Phys. 4 (1963) 776.

[11] A. Loinger, Ann. Phys. (N.Y.) 20 (1962) 132.

[12] J. M. Levy-Leblond, Comm. Math. Phys. 4 (1967) 157.

[13] J. M. Levy-Leblond, Comm. Math. Phys. 6 (1967) 286.

[14] H. Bacry e J. M Levy-Leblond, J. Math. Phys. 9 (1968) 1605.

[15] J. Voisin, J. Math. Phys. 8 (1967) 611.

[16] J. Math. Phys. 9 (1968) 1146.

[17] C. R. Hagen e W. J. Hurley, Phys. Rev. Lett. 24 (1970) 1381.

[18] C. R. Hagen, Phys. Rev. D5 (1972) 377.

[19] P. R. Roman, J. J. Aghassi, R. M. Santilli e P. L. Huddeleston, N. Cimento 12A (1972) 185.

[20] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern Perspective* (John Wiley & Sons, New York, 1974).

[21] L. Gagnon, Can. J. Phys. 67 (1989) 1.

[22] L. Gagnon e P. Winternitz, J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) 1493, 22 (1989) 469, 22(1989) 499.

[23] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics* (AIP, N.Y., 1993).

[24] A. E. Santana, A. Matos Neto and J. D. M. Vianna, *Hadronic J.* **17** (1994), 539.

[25] A. E. Santana and F. C. Khanna, *Phys. Lett.* A**203** (1995), 68.

[26] A. E. Santana and F.C. Khanna, *Lie groups and Thermofield Dynamics*, in *Proceedings of the Dalian-THERMO95*, Eds. Y. X. Gui, F. C. Khanna and Z. B. Su (World Scientific, Sing. 1996)p. 39.

[27] A. E. Santana, F. C. Khanna, H. Chu, Y. C. Chang, Annals of Physics (N.Y) **249** (1996) 481.

[28] A. Matos Neto, J. D. M. Vianna, A. E. Santana, F. C. Khanna, *On w*-algebra, Lie groups and Thermofield Dynamics,* Phys. Essay, em impressão.

[29] W. I. Fushchich e A. G. Nikitin, *Symmetries of Equations of Quantum Mechanics* (Allerton Press, N.Y. 1994).

[30] L. D. Landau, J. Phys. (MoscouW) 5 (1941) 71.

[31] Y. Takahashi, Fortschr. Phys. 36 (1988) 63.

[32] Y. Takahashi, Fortschr. Phys. 36 (1988) 83.

[33] M. Omote, et al, Fortschr.Phys. 37 (1989) 933.

[34] A. E. Santana, F. C. Khanna e Y. Takahashi, *Galilean Covariance and Liouville – von Neuman Equation*, a ser publicado.

[35] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (IOP, Bristol, 1990).