A Crônica do Cálculo: III. Contemporâneos de Newton e Leibniz*

José Maria Filardo Bassalo
Departamento de Física da UFPA
66075-900, Belém, Pará
e-mail:http://www.amazon.com.br/ bassalo

Trabalho recebido em 6 de maio de 1996

Esta **Crônica** mostra como se desenvolveu o que hoje conhecemos como **Cálculo Diferencial e Integral**. Nesta terceira parte, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo devido aos trabalhos realizados por contemporâneos de Newton e Leibniz, principalmente os dos irmãos James e John Bernoulli e o de l'Hôpital.

Abstract

This **Chronicle** shows how what today means **Integral and Differential Calculus** was developped. In this third part, we study the development of this Calculus due to the work by the contemporaneous of Newton and Leibniz, principally the brothers James and John Bernoulli and l'Hôpital ones.

Nas duas primeiras partes da Crônica,[1] vimos como se desenvolveu o **Cálculo Diferencial e Integral** desde a Antiguidade até os trabalhos de Newton e Leibniz, estes realizados na segunda metade do Século XVII. Nesta terceira parte,[2] estudaremos os trabalhos que se seguiram aos de Newton e de Leibniz, principalmente os desenvolvidos no final do Século XVII e no começo do XVIII.

Nas duas últimas décadas do Século XVII, a difusão do cálculo leibniziano por parte dos matemáticos suíços, os irmãos James (Jakob, Jacques) Bernoulli (1654-1705) e John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748), e do aluno de John, o matemático francês, Marquês Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704), permitiu novas contribuições ao desenvolvimento do Cálculo.

Embora formado em Teologia, James chegou a ser professor de Matemática, na Universidade de Basiléia, Suíça, em 1687.[3] John, por sua vez, formou-se em Medicina nessa mesma Universidade, em 1690, e tornou-se, também, professor de Matemática, na Universidade de Groningen, Holanda, em 1695. Após a morte de James, John o sucedeu na Universidade de Basiléia.

Os primeiros contactos dos irmãos Bernoulli com o trabalho de Leibniz ocorreram em 1685, logo após este publicar seu primeiro artigo sobre o Cálculo, na *Acta*, em 1684, conforme já referimos. Logo depois, em Junho de 1686, Leibniz publicou um outro trabalho nessa mesma Revista. Assim, eles só começaram a estudar sistematicamente os trabalhos de Leibniz, entre 1687 e 1690, através de cartas trocadas com esse matemático. Nessa mesma época, James mantinha uma ativa correspondência com outros matemáticos, permitindo-lhe atualizar-se com os principais problemas por eles estudados, como, por exemplo, encontrar as equações das curvas catenária, tratória (**tractrix**), isócrona, velária e linteária.[4]

Na *Acta Eruditorum* de Maio de 1690, há um primeiro tratamento da isócrona feito por James. Com efeito, para essa curva, James afirmou que ela satisfazia à equação diferencial $dy\sqrt{by^2 - a^3} = dx\sqrt{a^3}$ e que, para obter a forma (y(x)) dessa curva bastaria

*Este artigo é em homenagem póstuma ao engenheiro civil TEIVELINO GUAPINDAIA, meu professor de **Cálculo Infinitesimal** na Escola de Engenharia do Pará, em 1954.

igualar as **integrais**[5] dos dois membros, resultando em: $\frac{2(b^2y - a^3)}{3b^2} \sqrt{b^2y - a^3} = x \sqrt{a^3}$.[6] Nesse mesmo artigo, James propôs o problema de encontrar a forma da catenária.

A solução desse problema proposto por James, apareceu na *Acta* de Junho de 1691, em trabalhos independentes de Leibniz, Huygens e John que, contudo, não explicaram o método que haviam utilizado. O exame de seus manuscritos, bem como das cartas que trocaram entre si, mostraram que enquanto Huygens usou a velha geometria arquimediana para encontrar a sua solução, Leibniz e John encontraram-na por intermédio do cálculo. Das três soluções, no entanto, a mais clara era a de John. Na linguagem atual, a solução de John é a seguinte. Primeiro, ele escreveu a equação diferencial satisfeita pela catenária, a partir de argumentos da mecânica dos corpos em equilíbrio: $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$, onde s é o comprimento do arco, dado por s = $\int \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}$ dy e **a** é uma constante. Depois, escreveu essa equação diferencial na forma dy = $\frac{a dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Por fim, ao integrá-la, obteve a equação: $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.[7]

Ainda durante o ano de 1691, James e John resolveram uma série de problemas relacionados à forma das curvas já referidas anteriormente. Por exemplo, estudaram a forma assumida por uma corda suspensa entre dois pontos e sob a ação de seu próprio peso, em algumas situações, tais como: inelástica e de densidade variável; elástica de espessura constante; e sob a ação de forças atuando em cada ponto da corda e dirigidas a um ponto fixo. John resolveu, também, o problema inverso: dada a equação da curva assumida por uma corda inelástica suspensa, encontrar a lei da variação de sua densidade com o comprimento de arco. James, por sua vez, demonstrou que de todas as formas assumidas por uma corda suspensa entre dois pontos, a catenária é a que tem o centro de gravidade mais baixo. Por outro lado, James e John demonstraram que a velária obedece à seguinte equação diferencial: $\frac{d^2x}{ds^2} = (\frac{dy}{ds})^3$, onde **s** é o comprimento de arco. A tratória foi tratada por James, ao deduzir a sua equação diferencial: $\frac{dy}{ds} = \frac{y}{a}$, onde **s** também representa o comprimento de arco e **a** é uma constante.

Também em 1691, James e John encontraram uma fórmula para calcular o raio de curvatura **z** de uma curva, a qual James denominou **regra de ouro**. Na notação atual, ela é dada por: z = $\frac{ds^3}{dx d^2y} = \frac{(dx/ds)^3}{d^2y/ds^2} = \frac{(\sqrt{1 + (dy/dx)^2})^3}{d^2y/dx^2} = \frac{(\sqrt{1 + (y')^2})^3}{y''}$. James também escreveu essa expressão em coordenadas polares.

Foi a expressão acima que impressionou l'Hôpital quando John o encontrou em Paris, em 1691. Com efeito, em uma discussão que travaram sobre curvatura, instigado por l'Hôpital, John calculou, em pouco tempo, o raio de curvatura de várias curvas em pouco tempo, usando a expressão acima referida. Embora não conhecesse o cálculo diferencial leibniziano (já que era apenas versado em matemática cartesiana, porém, bastante interessado em métodos infinitesimais), l'Hôpital contratou regiamente John para ensinar-lhe aquele cálculo - cujas aulas ocorreram entre 1691 e 1692 -, bem como para comunicar-lhe toda vez que John fizesse novas descobertas. Em 1696, l'Hôpital reuniu as aulas e as discussões posteriores que tivera com John, e incluindo contribuições próprias, publicou seu famoso livro *Analyse des Infiniment Petits* (*Análise dos Infinitamente Pequenos*) - o primeiro livro didático sobre o cálculo diferencial[8] -, no qual há a célebre **regra de l'Hôpital** sobre formas indeterminadas. Na linguagem moderna, essa regra é a seguinte: se f(x) e g(x) são funções diferenciáveis em
x = a tal que f(a) = g(a) = 0, então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.[9]

No livro, l'Hôpital usou o conceito de **diferenciais** um pouco diferente do de Leibniz, pois, enquanto para este elas representavam diferenças infinitamente pequenas entre termos sucessivos de uma seqüência de valores de uma dada variável, para l'Hôpital elas seriam partes infinitamente pequenas adicionadas ou subtraídas de uma variável quando esta aumenta ou diminui de maneira contínua. Por outro lado, ele não discutiu se as diferenciais existem ou não, contudo, através de alguns postulados, demonstrou as regras do cálculo lebniziano, sobretudo, a diferencial do produto e do quociente de duas funções.

O problema de calcular os valores extremos (máximo ou mínimo) de uma função representada por uma curva, que havia sido objeto de estudo por parte de alguns matemáticos,[10] foi também tratado por l'Hôpital no *Analyse*. Assim, por exemplo, para obter esses valores, l'Hôpital calculou a diferença (dy) entre suas ordenadas, depois fez essa diferença igual a zero ou infinito, conforme o caso.[11] Ainda nesse livro, l'Hôpital tratou do cálculo do ponto de inflexão de uma curva (ponto em que a curva muda o sentido de curvatura, isto é, passa de côncava a convexa ou vice-versa) e, para isso, desenvolveu um método que equivalia a calcular a diferença da diferença (ddy) e, em seguida fazê-la, também, igual a zero ou infinito.

Voltemos aos trabalhos dos irmãos Bernoulli desenvolvidos ainda na década de 1690. Em 1694, John resolveu equações diferenciais homogêneas por intermédio de **separação de variáveis**, e de um modo mais completo do que já havia sido feito por Leibniz, em 1691.[12] Por sua vez, ainda em 1694, James usou a técnica das coordenadas polares, que havia descoberto em 1691,[13] para estudar várias curvas, principalmente a lemniscata,[14] a espiral logarítmica,[15] e a elástica.[16]

Um outro tipo de problema que contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo foi o discutido por Leibniz e pelos irmãos Bernoulli, ainda na década de 1690. Com efeito, em 1694, Leibniz e John formularam o problema de encontrar a curva ou uma família de curvas que cortam uma outra família sob um determinado ângulo. John observou que a solução desse problema era importante para o entendimento da teoria ondulatória da luz, proposta por Huygens, em 1690, pois com ela era possível encontrar as trajetórias dos raios de luz que se propagam em um meio não uniforme, uma vez que tais raios são perpendiculares às frentes da onda luminosa. Em 1697, John apresentou esse problema como um desafio a James que, prontamente, o resolveu para alguns casos particulares. Por seu lado, em 1698, John obteve e resolveu a equação diferencial dessas **trajetórias** (nome cunhado por ele, nessa ocasião) ortogonais a uma família particular de curvas, o mesmo acontecendo com Leibniz. Este, por exemplo, considerou a equação $y^2 = 2bx$, onde **b** é o **parâmetro** (nome dado por Leibniz) da família de curvas. Para obter as trajetórias ortogonais a essa família, Leibniz derivou-a, isto é, obteve a equação $y \frac{dy}{dx} = b$, e ao substituir esse resultado na equação inicial, encontrou a equação diferencial $y^2 = -2xy \frac{dx}{dy}$ e ao integrá-la, obteve por fim as trajetórias $a^2 - x^2 = \frac{y^2}{2}$ ortogonais à família de curvas considerada (observar que $\frac{dy}{dx} = -\frac{dx}{dy}$).[17]

Ainda na segunda metade da década de 1690, os irmãos Bernoulli discutiram um problema interessante que deu origem a uma nova disciplina da Matemática: o **Cálculo das Variações**.[18] Na *Acta* de Junho de 1696, John propôs o seguinte problema: - "Dados dois pontos A e B em um plano vertical, encontrar a curva que uma partícula, somente sob a ação da gravidade, a descreverá em um tempo mínimo". Como se pode ver, este não é simplesmente um problema de determinar o valor extremo de uma função, já que se trata de escolher, dentre todas as curvas que passam pelos pontos A e B, aquela que é descrita em um tempo mínimo.[19] Esse problema foi tratado, em trabalhos independentes, por Newton, Leibniz, l'Hôpital, John,[20] James, e pelo matemático saxão Conde Ehrenfried Walter Tschirnhaus(en) (1651-1708), os quais foram publicados no mesmo volume da *Acta*, de Maio de 1697. Todos (com exceção de l'Hôpital) demonstraram que aquela curva (denominada por John de **braquistócrona**, do grego **brachistos** - mais curto e **chronos** - tempo) era a ciclóide.[21]

Até aqui, vimos que os vários problemas propostos e resolvidos pelos irmãos Bernoulli, sobretudo os relacionados com curvas, contribuíram bastante para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Contudo, enquanto existiam (e ainda existem) "regras de cálculo" (obtidas principalmente por Newton e Leibniz) para diferenciar qualquer função, o mesmo não aconteceu com a integração, já que não havia regras fixas (e ainda não existem) que pudessem integrar qualquer função proposta. Portanto, para realizar algumas integrais foi necessário utilizar técnicas, algumas delas inventadas pelos irmãos Bernoulli. Com efeito, na *Acta* de 1699, James mostrou que para se resolver a integral $\int \frac{a^2 dx}{a^2 - x^2}$ bastaria fazer a seguinte substituição[22]: $x = a\frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$ para converter essa integral em $\int \frac{dt}{2at}$ cujo resultado é a função logarítimica. Por sua vez, em 1702, John apresentou uma *Mémoire* à Academia Francesa de Ciências na qual demonstrou que aquela integral poderia ser resolvida usando a seguinte transformação: $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}(\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x})$. Essa técnica, hoje conhecida como o **método das frações parciais**, foi também e, independentemente, apresentada por Leibniz, na *Acta* de 1702.[23]

Ao concluir esta Crônica, trataremos das principais contribuições para o entendimento das séries, realizadas pelos irmãos Bernoulli. Entre 1689 e 1704, James publicou cinco artigos sobre séries infinitas (assunto para o qual alguns matemáticos já haviam contribuído), apresentando, contudo, alguns resultados novos.[24] Com efeito, em 1689, James preparou seu primeiro trabalho sobre as séries infinitas, no qual apareceu a famosa **desigualdade de Bernoulli**: $(1 + x)^n > 1 + nx$ onde **x** ($x > -1$ e $x \neq 0$) é um número real e **n** é um inteiro maior do que um. Ainda nesse trabalho, trabalhou com a série harmônica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$.[25] No segundo trabalho, datado de 1692, James continuou trabalhando com outras séries, como, por exemplo, com a série $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... \frac{1}{n^2} + ...$, a qual, contudo, não foi capaz de demonstrar que a mesma converge. No terceiro trabalho, realizado em 1696, lidou com a série $\frac{\ell}{m+n} = \frac{\ell}{m}(1 + \frac{n}{m})^{-1} = \frac{\ell}{m} - \frac{\ell n}{m^2} + \frac{\ell n^2}{m^3} - ...$ que resultou numa grande polêmica. Por exemplo, se $\ell = m = n = 1$, obtem-se a série alternada $1 - 1 + 1 - 1 + ...$, para a qual James obteve o valor $\frac{1}{2}$. Contudo, se essa série for arrumada na forma $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...$ obtem-se o valor 0; se ela for escrita na forma $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ...$, encontra-se o valor 1. Por fim, se S for a soma da série alternada, então $S = 1 - S$, logo $S = \frac{1}{2}$. Essa controvérsia foi resolvida em 1703, quando o matemático italiano Guido Grandi (1671-1742) no livro intitulado *Quadratura Circuli et Hyperbolae* (*A Quadratura do Círculo e da Hipérbole*), obteve o mesmo resultado de James usando, porém um outro método. Com efeito, ele tomou a expansão $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ e fez $x = 1$, obtendo o resultado $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$.[26]

Em seus trabalhos sobre séries, James e John redescobriram as séries para sen $n\theta$ e cos $n\theta$, em termos de sen θ e cos θ, já conhecidas pelo matemático francês François Viète (1540-1603),[27] e procuraram estendê-las incluindo valores fracionários para **n**.

Notas e Referências Bibliográficas

1. BASSALO, J. M. F. 1996a. *A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz.* Revista Brasileira de Ensino de Física, **18**(2):103-112; —— 1996b. *A Crônica do Cálculo: II. Na época de Newton e Leibniz.* Revista Brasileira de Física, **18**(3):181-190.

2. Para escrever este artigo, nos baseamos nos seguintes textos: BARON, M. E. 1985. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*, Unidades 1 e 2; BARON, M. E. e BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidade 3; BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidades 4 e 5, da Open University. Editora da Universidade de Brasília; BOYER, C. B. 1968. *A History of Mathematics.* John Wiley and Sons; KLINE, M. 1974. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press; RONAN, C. A. 1987. *História Ilustrada da Ciência.* Jorge Zahar Editor; SEDGWICK, W. T., TYLER, H. W. e BIGELOW, R. P. 1950. *História da Ciência.* Editora Globo; STRUIK, D. J. (Editor) 1969. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard University Press.

3. James estudou Matemática por si próprio. Com efeito, no final dos anos 1670, já havia estudado os seguintes livros: *La Géométrie* (*A Geometria*), de 1637, do matemático francês René Descartes (1596-1650); *Arithmetica Infinitorum* (*Aritmética do Infinito*), de 1655, do matemático inglês John Wallis (1616-1703); *Lectiones Geometricae* (*Lições Geométricas*), de 1670, do matemático inglês Isaac Barrow (1630-1677). Naquela época, James ainda não conhecia os trabalhos sobre Cálculo realizados tanto pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), como pelo físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727). Apesar de Newton e Leibniz, desde 1664 e 1672, respectivamente, haverem escrito esses trabalhos em forma de manuscritos, eles só foram publicados posteriormente. Newton apresentou-os em seu famoso *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*), de 1687, e Leibniz na *Acta Eruditorum Lipsiensium* (*Atas dos Eruditos de Lípsia (Leipzig)*), de Outubro de 1684.

4. A **catenária** (nome dado por Leibniz) é a curva assumida por uma corda inextensível e flexível (ou cadeia (**catena**)) suspensa livremente por dois pontos. Essa curva já havia sido considerada pelo artista e inventor italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) e pelo físico e astrônomo italiano Galileo Galilei (1564-1642). Este, por sinal, em 1636, pensava tratar-se de uma parábola. Em 1646, o físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695)

demonstrou, por intermédio de um rigoroso raciocínio geométrico, que a catenária não era uma parábola, porém, não conseguiu determinar sua verdadeira forma. A **tratória** é uma curva em que a relação entre PT e OT é sempre constante, para qualquer ponto P sobre a mesma, sendo T o ponto de intersecção entre a tangente à curva em P e uma reta horizontal, e O é o ponto em que a curva corta essa reta. Essa curva foi, provavelmente, proposta pelo médico e arquiteto francês Claude Perrault (1613-1688), e resulta do deslocamento, em cima de uma mesa, de um corpo preso a uma corda, quando esta é deslocada ao longo de um lado da mesa. A **isócrona** é a curva descrita por um pêndulo que realiza, ao mesmo tempo, uma oscilação completa tanto para pequenos quanto para grandes arcos. Essa curva se caracteriza, também, pelo fato de que um corpo em queda livre a descreve com velocidade constante. A **velária** é a curva formada por uma vela suspensa por duas varas horizontais e soprada pelo vento. A **linteária** é a curva formada por um pano, cheio de água, suspenso por duas varas horizontais, paralelas e fixas.

5. Foi nesse trabalho que James usou pela primeira vez a palavra **integral**. Em 1698, Leibniz concordou que o nome **Calculus Integralis** (**Cálculo Integral**), dado por James, era bem melhor do que ele usava: **Calculus Summatorius** (**Cálculo Somatório**). Aliás, o nome **Calculus Integralis** também foi usado por John, ainda em 1698.

6. Uma solução analítica análoga a essa já havia sido encontrada por Leibniz.

7. Na época em que John obteve a forma da catenária, ainda não se representavam as funções por símbolos (ln, sen, cos, senh, cosh, etc), de modo que ele a obteve por intermédio de uma construção geométrica pontual.

8. As qualidades didáticas de l'Hôpital foram mais uma vez realçaldas no livro *Traité Analytique des Sections Coniques* (*Tratado Analítico das Secções Cônicas*), publicado em 1707, após sua morte.

9. Em 1921, quando foram encontrados na Biblioteca da Universidade de Basiléia os manuscritos das aulas (e cartas) de John a l'Hôpital, descobriu-se que a famosa **regra de l'Hôpital** havia sido demonstrada por John em carta que enviou a l'Hôpital, em 22 de Julho de 1694. Após a morte de l'Hôpital, ocorrida em 1701, John tentou reivindicar a autoria dessa **regra** em um trabalho publicado na *Acta*, em Agosto de 1704. No entanto, não lhe foi conferido esse crédito, pois desde 1690 encontrava-se desacreditado devido às desavenças públicas com seu irmão James.

10. O método de obter o máximo ou o mínimo de uma função, foi utilizado pelo astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) em seu livro *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* (*Nova Geometria Sólida dos Barris de Vinho*), de 1615, para demonstrar que de todos os paralelepipedos de base quadrada inscritos em uma esfera, o cubo é o que tem maior volume; pelo matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) em seu livro *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* (*Método de Encontrar Máximos e Mínimos*), de 1637, para calcular o centro de gravidade de sólidos de revolução; por Leibniz no artigo da *Acta*, de Outubro de 1684, para demonstrar a lei da refração da luz; por Huygens em seu *Traité de la Lumière* (*Tratado da Luz*), de 1690, para determinar a forma que apresentasse a menor aberração esférica, para uma lente de determinada abertura e distância focal. Por fim, em 1691, o matemático francês Michel Rolle (1652-1719) publicou o livro *Démonstration d'une Méthode por Résoudre les Égalitéz de tous les Dégrez* (*Demonstração de um Método para Resolver as Igualdades de todos os Graus*) no qual apresentou (sem demonstrar) o hoje famoso **teorema de Rolle**, a saber: se uma função f(x) é nula para quaisquer dois valores de **x** (**a** e **b**), então sua derivada f'(x) é nula para qualquer valor de **x** entre **a** e **b**.

11. No *Analyse*, l'Hôpital apresentou exemplos para os dois casos. No primeiro, considerou a curva $x^3 + y^3 = axy$ (**folium de Descartes**). Para obter

o ponto extremo, calculou a diferença dy, e igualou a mesma a zero, isto é: dy = $\frac{aydx\ -\ 3xxdx}{3yy\ -\ ax}$ = 0. Com isso, encontrou que: x = $\frac{2^{1/3}a}{3}$. No segundo caso, ele considerou a curva y - a = $a^{1/3}(a - x)^{2/3}$. Ao calcular a diferença dy = $\frac{-2dxa^{2/3}}{3(a\ -\ x)^{1/3}}$, percebeu que para se obter o valor de **x** que tornava **y** um extremo, era necessário fazer dy = ∞, uma vez que dy = 0 indicava que dx = 0. Assim, obteve $x = a$.

12. Em carta escrita a Huygens, Leibniz indicou a maneira de resolver equações diferenciais do tipo: y($\frac{dx}{dy}$) = f(x)g(y), usando a técnica mais tarde conhecida como **separação de variáveis**, ou seja, escrever a equação acima na forma $\frac{dx}{f(x)}$ = g(y) $\frac{dy}{y}$, e depois integrar cada termo da mesma. Ainda nesse ano de 1691, Leibniz reduziu as equações diferenciais de primeira ordem y' = f($\frac{y}{x}$) a simples problema de quadratura, fazendo a seguinte substituição: y = vx. Em 1694, Leibniz voltou a usar esse artifício na solução da equação diferencial ordinária y' + P(x)y = Q(x). Por sua vez, em 1695, James apresentou a equação $\frac{dy}{dx}$ = P(x)y + Q(x)y^n, hoje conhecida como **equação de Bernoulli**, como um desafio para alguem encontrar sua solução. Logo em 1696, Leibniz resolveu-a fazendo a seguinte mudança de variável: z = $y^{1\ -\ n}$. Nesse mesmo ano, John solucionou-a por esse mesmo método, enquanto James obteve sua solução usando a técnica da separação de variáveis.

13. As coordenadas polares já haviam sido utilizadas por Newton em seu manuscrito *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (*Tratado dos Métodos das Séries e das Fluxões*), escrito no inverno de 1670-1671. Porém, como esse manuscrito só foi publicado em 1736,o crédito de sua descoberta é devido a James, que o publicou na *Acta*, de 1691.

14. A lemniscata é um caso especial das curvas introduzidas pelo astrônomo ítalo-francês Gian (Jean) Domenico (Dominique) Cassini (1625-1712) - as chamadas **ovais de Cassini** - definidas pela condição de que o produto $r_1 r_2$ das distâncias de qualquer ponto sobre a curva aos pontos fixos S_1 e S_2, é igual a b^2, sendo **b** uma constante e a distância S_1S_2 é igual a 2a. James descobriu que se b = a, a oval de Cassini transforma-se em uma curva com a forma de um 8 deitado (∞), isto é, uma **lemniskòs** (grego) ou **lemnicus** (latino), nome das fitas ou ornatos pendentes das palmas dos vencedores e das mitras episcopais. Essa curva é representada pela equação $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$, na forma cartesiana ou por r^2 = a cos 2θ, na forma polar.

15. A espiral logarítmica (cuja equação polar é $\rho = ae^{b\theta}$) foi introduzida por Descartes em carta que escreveu ao matemático francês Marin Mersenne (1588-1648), em 12 de Setembro de 1638, e retificada pelo matemático e físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), em 1645. James, contudo, descobriu uma série de propriedades dessa curva, tais como: sua evoluta, o envelope de raios refletidos (cáustica de reflexão) por pontos situados sobre ela, e o envelope dos raios refratados (cáustica de refração) por pontos situados sobre ela, têm todas a sua própria forma, isto é, uma espiral logarítmica. Em vista disso, James pediu que a **spira mirabilis** fosse gravada em seu túmulo, com a inscrição **Eadem mutata resurgo** ("Embora mudada, permanece a mesma").

16. Ao estudar a ação de forças aplicadas nas extremidades de uma haste delgada, James observou que a mesma assumia a forma de uma curva (**elástica**, conforme a denominou), cuja equação diferencial é dada por: dy = $\frac{(x^2\ +\ ab)\ dx}{\sqrt{a^4\ -\ (x^2\ +\ ab)^2}}$. Observou, também, que essa equação depende da relação entre a força aplicada e a tensão resultante e que não poderia ser integrada em termos de funções elementares. Contudo, chegou a resolvê-la para alguns casos especiais daquela relação. Mais tarde, em 1744, o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783) demonstrou que a integração dessa equação só poderia ser feita através das **funções elípticas**, que apareceram ao ser retificada a elipse.

17. O problema das trajetórias ficou esquecido até 1715, quando Leibniz desafiou os matemáticos ingleses, principalmente Newton, a resolvê-lo. Este,

depois de um dia de trabalho estafante na Casa da Moeda da Inglaterra, da qual era Diretor, e antes de dormir, encontrou um método geral para encontrar trajetórias, que foi publicado no volume 29 da *Philosophical Transactions*, de 1716. Neste mesmo ano, o matemático suíço Nicholas Bernoulli (1695-1726), filho de John, trabalhou também nesse problema de trajetórias. O mesmo aconteceu com o matemático suíço Jacob Hermann (1678-1733), um aluno de James, ao apresentar na *Acta* de 1717, a solução para encontrar as trajetórias ortogonais da família F(x,y,c) = 0, solução essa dada pela equação diferencial y' = $-\frac{F_x}{F_y}$, onde F_x e F_y são as derivadas parciais de F.

18. O primeiro problema sobre o Cálculo das Variações foi apresentado por Newton no Livro II de seu *Principia* (1687). Ele estava interessado em saber a forma de uma superfície de revolução, movendo-se em um fluido com velocidade constante na direção de seu eixo, sob uma pressão perpendicular a essa superfície e proporcional ao quadrado da velocidade na direção da normal a essa mesma superfície. Sem nenhuma demonstração, Newton propôs a forma geométrica da equação diferencial desse problema. A forma algébrica da mesma é y dx dy^3 = a ds^3 e foi apresentada, independentemente, pelo matemático suíço Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753) na *Acta* de Maio de 1697, por l'Hôpital, na *Acta* de Agosto de 1699, e por John, na *Acta* de Novembro de 1699. Na notação atual, esse problema resume-se em encontrar o valor mínimo da integral $I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y(x)[y'(x)]^3 dx}{1 + [y'(x)]^2}$. É interessante observar que, historicamente, o primeiro problema do Cálculo das Variações foi o chamado **problema isoperimétrico** ou **problema da Rainha Dido de Cartago**. Conta a lenda que Dido (Elisa), filha do Rei Mutto (Belus) de Tiro (cidade fenícia), e esposa de Siqueo (Acerbas), depois que este foi assassinado por Pigmalião (irmão de Dido), refugiou-se na costa do Mediterrâneo, no Norte da África. Em lá chegando, dirigiu-se ao líder Jarbas e barganhou uma certa quantia com a qual ela poderia comprar terras que poderiam ser envolvidas com um pedaço de couro de touro. Como Jarbas aceitasse a proposta, a esperta Dido cortou o couro de touro em várias tiras, ligou-as pelas extremidades e procedeu a envolver a área de terra desejada tendo o comprimento dessas fitas com perímetro. Escolhendo terra ao longo do mar, ela não precisou usar couro ao longo da costa. Ao estender o couro em forma de semicírculo, obteve a máxima área de terra possível. Desse modo, Dido estabeleceu o Estado de Cartago, em 850 a.C., a futura rival de Roma. Conta ainda a lenda que como Cartago prosperou bastante, Jarbas pediu-lhe em casamento. Para fugir a esse assédio, Dido preparou uma pira funeral e suicidou-se na frente de seu povo.

19. Em linguagem moderna, esse problema refere-se a minimizar a seguinte integral: $I = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{v}$.

20. Para chegar à solução do problema que propôs, John observou que a curva de queda mais rápida era a mesma descrita por um raio de luz ao atravessar um meio de índice de refração variável. Assim, John considerou um meio refringente composto de camadas estreitas e de índices de refração diferentes e aplicou a lei da refração da luz a cada uma dessas camadas. Observe-se que a **lei da refração da luz**, $\frac{sen\ i}{sen\ r} = \frac{n_2}{n_1}$, onde n_2 (n_1) representam, respectivamente, os índices de refração dos meios 2 e 1, já havia sido apresentada, independentemente, pelo matemático holandês Willebrord van Roijen Snell (1591-1626), em 1621, e por Descartes, em 1637.

21. O problema de encontrar a curva que representa a braquistócrona já havia sido formulado pelo astrônomo e físico italiano Galileo Galilei (1564-1642), em 1630 e 1638, porém foi pelo mesmo incorretamente resolvido, já que considerou o arco de círculo ao invés da ciclóide, para essa curva. É oportuno notar que algumas propriedades da ciclóide já haviam sido consideradas por Huygens em seu trabalho intitulado *Horologium Oscillatorium sive de Motu Pendulorum* (*Relógio Oscilatório ou Movimento dos Pêndulos*), de 1673. Nesse livro, há a demonstração de que a evoluta de uma ciclóide é também uma ciclóide,

assim como também nele é demonstrado que um pêndulo que oscila em um arco de ciclóide, leva exatamente o mesmo tempo para completar oscilações de pequenas ou de grandes amplitudes; em vista disso, a ciclóide é denominada de **tautócrona** (curva de queda mais rápida). Tais propriedades da ciclóide permitiram a Huygens construir o famoso relógio de pêndulo cicloidal. Note-se, também, que James fez um primeiro tratamento da tautócrona, em Maio de 1690, ao estudar a isócrona, conforme já referimos.

22. A técnica de resolver integrais, conhecida como **método de substituição**, já havia sido utilizada por John por ocasião de suas aulas ministradas ao Marquês l'Hôpital, entre 1691 e 1692. Por exemplo, em uma dessas aulas, para resolver a integral $\int (ax + xx)dx\sqrt{a + x}$, John usou a seguinte substituição: y = $\sqrt{a + x}$. É oportuno registrar que apenas uma parte dessas aulas, as correspondentes ao Cálculo Integral, foram incluídas por John, com o título *Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium, aliisque conscriptae in usum Ill. Marchionis Hospitalii cum auctor Parisiis ageret annis 1691 et 1692* (*Lições de Matemática sobre o Cálculo Integral, e outros assuntos escritas para uso do Marquês de l'Hôpital, dadas pelo autor, em Paris, durante 1691 e 1692*), em sua *Opera Omnia*, publicada em 1742. As partes referentes ao Cálculo Diferencial só foram publicadas em 1924, depois que foram descobertas, em 1921, na Biblioteca da Universidade de Basiléia, os manuscritos das aulas (e cartas) de John a l'Hôpital, conforme já dissemos.

23. A solução de integrais através das técnicas de substituição e/ou de frações parciais, gerou uma polêmica entre Leibniz e John Bernoulli, nos anos de 1712 e 1713, envolvendo logaritmos de números negativos e de números, mais tarde denominados de imaginários. Assim, enquanto John afirmava que se $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, então log(-x) = log(x) e, portanto, existe logaritmo de número negativo, Leibniz afirmava que d(log x) = $\frac{dx}{x}$ só vale para x $>$ 0. Em favor dessa afirmação, Leibniz dizia que se existisse log(-1), então log $\sqrt{-1} = \frac{1}{2}$ log(-1), o que é um absurdo, pois não existe log $\sqrt{-1}$, concluiu Leibniz. Por outro lado, ao resolver determinadas equações diferenciais, John já havia encontrado certas relações entre funções trigonométricas inversas e o logaritmo de números imaginários. Por exemplo, em 1702, John encontrou a seguinte relação (na notação atual): arctg z = $\frac{1}{i}\ \ell n\sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$. (Destaque-se que ao tentar desenvolver a Trigonometria e a Teoria dos Logaritmos sob um ponto de vista analítico, John tentou uma primeira definição de **função** ao expressá-la como "uma quantidade composta de uma variável e algumas constantes".) Quando Leibniz morreu, em 1716, John passou a polemizar com Euler sobre logaritmos de números imaginários, durante o período de 1727 e 1731, conforme veremos no próximo trabalho sobre a **Crônica do Cálculo**.

24. Esses trabalhos foram publicados como suplemento de seu livro póstumo *Ars Conjectandi* (*A Arte de Conjecturar*), editado por seu sobrinho e filho de John, o matemático suíço Nicholas Bernoulli (1695-1726), em 1713 e, mais tarde, também incluídos no *Opera Jacobi Bernoulli*, obra em dois volumes, editado em 1744, e que reuniu todos os trabalhos de James (Jakob). É importante salientar que no *Ars*, James apresentou seus estudos sobre as permutações, combinações e probabilidade, nos quais há contribuições importantes, dentre as quais se destacam: a demonstração do teorema binomial para potências inteiras positivas; a **lei dos grandes números** (" Se **p** é a probabilidade de um evento, se **m** é o número de ocorrências do evento em **n** tentativas, se ϵ é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se **P** é a probabilidade que satisfaz à desigualdade $\mid \frac{m}{n} - p \mid < \epsilon$, então $\lim_{n\to\infty}$ P = 1."); e os **números de Bernoulli**, que aparecem na soma de potências de números inteiros positivos ($\int n^c$ - observe-se que James usava o símbolo $\int$, ao invés do atual $\sum$, para representar a soma das séries), e com os quais obteve a série exponencial.

25. É oportuno esclarecer que é freqüentemente atribuído a James a primeira demonstração da divergência da série geométrica, apesar de ele, no trabalho de 1689, atribuir a seu irmão John

tal demonstração. Aliás, essa demonstração está incluída no *Opera Johannis Bernoulli*, obra em quatro volumes, editada em 1742, e que reuniu todos os trabalhos de John. Contudo, aquela atribuição não é correta, uma vez que a primeira demonstração dessa divergência fora feita pelo matemático francês Nicole Oresme (~1323-1382), por volta de 1360. Esclareça-se, ainda, que o matemático italiano Pietro Mengoli (1625-1686), em 1650, chegou ao mesmo resultado de Oresme, depois de demonstrar que a série harmônica alternada ($\frac{1}{1}$ - $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ - ... - $\frac{(-1)^n}{n}$ + ...) converge para ln 2.

26. Observe-se que Grandi também ficou conhecido por haver obtido as equações polares (r = a cos (nθ) e r = a sen (nθ)) das curvas tipo pétala de rosa - as famosas **rosas de Grandi**.

27. No livro intitulado *De Aequationum Recognitione et Emendatione*, escrito em 1591 e publicado em 1616, Viète resolveu certas equações algébricas cúbicas usando identidades envolvendo funções trigonométricas de múltiplos ângulos, como, por exemplo, cos (3θ) = 4 $\cos^3\theta$ - 3 cos θ.