

Duas Formas de Expressar a Energia de Interação Entre uma Carga Indutora e um Condutor a Terra

Two ways of expressing the interaction energy between an inducing charge and a grounded conductor

G. F. Leal Ferreira

*Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo
C.P. 369, 13560-970, São Carlos - SP*

Trabalho recebido em 17 de novembro de 1995

Duas relações são deduzidas para a energia de interação do sistema carga indutora-condutor à terra: na primeira mostra-se que ela é igual à metade da energia potencial da carga indutora em presença das cargas induzidas e na segunda que é igual ao negativo do dobro da energia de campo no interior do volume a ser ocupado pelo condutor. Comparação com o caso de dielétricos no limite de susceptibilidade infinita é feita.

Abstract

Two relations are deduced for the interaction energy of a system composed of an inducing charge and a grounded conductor: in the first it is shown to be the negative of half the potential energy of the inducing charge in the presence of induced charges and in the second to be twice the negative of the field energy enclosed in the volume to be occupied by the conductor. Comparison with the case of a dielectric in the limit of high susceptibility is carried out.

I. Introdução

Neste trabalho vamos mostrar que a energia de interação entre uma carga pontual e um condutor à terra – igual ao trabalho realizado para se trazer um em presença do outro – pode ser expresso de duas maneiras: 1) como o produto da carga pela metade do potencial criado nela pelas cargas induzidas e: 2) como o dobro da chamada energia de campo originalmente contida no volume a ser ocupado pelo condutor (ver Fig.2 adiante). Este resultado é comparado com o da bem conhecida relação válida no caso de cargas fixas em presença de dielétricos no limite em que a susceptibilidade tende para infinito.

II. Preparação

0 ponto de partida para a passagem da linguagem

de carga pontual para a de campo é o teorema da divergência do produto de uma função $U(\vec{x})$ e de um campo vetorial $\vec{A}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}(\vec{x})U(\vec{x})] = \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}U(\vec{x}) + U(\vec{x})\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \quad (1)$$

devidamente integrada num volume V

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot [U(\vec{x})\vec{A}(\vec{x})]dv = \int_V \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}U(\vec{x})dv + \int_V U(\vec{x})\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})dv \quad (2)$$

A integral de volume do lado esquerdo pode ser transformada numa integral de superfície do fluxo do campo de acordo com o teorema da divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot [U(\vec{x})\vec{A}(\vec{x})]dv = \oint_S U(\vec{x})\vec{A}(\vec{x}) \cdot \hat{n}ds \quad (3)$$

sendo S a superfície delimitando V e \hat{n} o versor da normal exterior. Portanto a Eq.2 pode ser escrita após transposição de termos como

$$-\int_V \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} U(\vec{x}) dv = \int_V U(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) dv - \oint_S U(\vec{x}) \vec{A}(\vec{x}) \cdot \hat{n} ds \quad (4)$$

Se o produto $U(\vec{x})\vec{A}(\vec{x})$ cai a zero mais rapidamente do que $1/r^2$ a integral de superfície vai a zero quando o volume de integração se torna infinito. Neste caso

$$-\int_{\infty} \vec{A}(\vec{x}) \cdot \nabla U(\vec{x}) dv = \int_{\infty} U(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) dv \quad (5)$$

em que o ∞ sob o sinal de integração indica integração no espaço todo.

Como nos teoremas de Green tomaremos $\vec{A}(\vec{x})$ como um campo eletrostático $\vec{E}_1(\vec{x})$ tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1(\vec{x}) = \rho_1 / \epsilon_0 \quad (6)$$

sendo ρ_1 a densidade de carga e ϵ_0 a permissividade do vácuo e também

$$\vec{E}_1(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V_1(\vec{x}) \quad (7)$$

com o que se obtém para o potencial V_1

$$\vec{\nabla}^2 V_1(\vec{x}) = -\rho_1 / \epsilon_0 \quad (8)$$

Ainda na Eq. 5 $U(\vec{x})$ será o potencial $V_2(\vec{x})$ de uma outra distribuição de cargas tal que seu campo $\vec{E}_2(\vec{x})$

$$\vec{E}_2(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V_2(\vec{x}) \quad (9)$$

Podemos então escrever a Eq. 5 como

$$\int_{\infty} \vec{E}_1(\vec{x}) \cdot \vec{E}_2(\vec{x}) dv = \int_{\infty} V_2(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1(\vec{x}) dv \quad (10)$$

A Eq 10 dá essencialmente a energia de interação W_i , entre a distribuição $\rho_1(\vec{x})$ e outra que tem sobre a primeira o potencial $V_2(\vec{x})$ e que pode ser expressa através

de uma integral em todo o espaço dos campos $\vec{E}_1(\vec{x})$ e $\vec{E}_2(\vec{x})$ ou seja usando a Eq.6

$$W_i = \int_{\infty} \rho_1(\vec{x}) V_2(\vec{x}) dv = \epsilon_0 \int_{\infty} \vec{E}_1(\vec{x}) \cdot \vec{E}_2(\vec{x}) dv \quad (11)$$

Note-se que W_i está agora perfeitamente simetrizado como deve ser.

Se quisermos a autoenergia W_A de uma distribuição devemos corrigir a expressão pelo fator 1/2 e tirarmos os índices que já não são mais necessários ou seja

$$W_A = 1/2 \int_{\infty} \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} V(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv \quad (12)$$

a qual, em vista da Eq.6 pode se escrever assim

$$W_A = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} V(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}^2(\vec{x}) dv \quad (13)$$

Usaremos várias das relações expostas aqui no que se segue.

III. Energia de interação entre uma distribuição de cargas fixas e um condutor à terra

III.1. Expressa através do potencial das cargas induzidas

Tomaremos o caso de uma carga pontual q em presença de um condutor aterrado. O resultado é facilmente generalizável para uma distribuição. Temos inicialmente a carga e o condutor infinitamente separados. A energia é aquela no campo da carga pontual pois o condutor está descarregado. Quando a distância finita cargas são induzidas na superfície do condutor e sejam $\vec{E}_c(\vec{x})$ e $\vec{V}_c(\vec{x})$ o campo e o potencial que estas criam no espaço, inclusive no interior do condutor. Se $\vec{E}(\vec{x})$ é o campo da carga pontual a diferença entre a energia final e inicial - que é a energia de interação e igual ao trabalho mecânico W realizável no processo - será das Eqs.12 ou 13

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} (\vec{E} + \vec{E}_c)^2 dv - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}^2 dv = \epsilon_0 \int_{\infty} \vec{E}_c \cdot \vec{E} dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}_c^2 dv \quad (14)$$

Vemos que a auto-energia da distribuição induzida por que criada ela mesma pela carga indutora aparece explicitamente (integral em $\vec{E}_c^2(\vec{x})$). Vamos desenvolvê-la usando a Eq. 13

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}_c^2(\vec{x}) dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} V_c(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_c(\vec{x}) dv \quad (15)$$

Vamos agora reconhecer que a $\vec{\nabla} \cdot E_c$ está singularmente localizada na superfície do condutor e que nestes pontos $V_c(\vec{x}) = -V(\vec{x})$ sendo $V(\vec{x})$ o potencial da carga pontual em pontos das superfície do condutor visto ser o potencial total aí nulo. Com isto a Eq.15 se escreve agora

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}_c^2(\vec{x}) dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} V(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_c(\vec{x}) dv \quad (16)$$

e que através da Eq.5 com $\vec{A} = \vec{E}_c$ e $U = V$ dá

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}_c^2(\vec{x}) dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} E_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv \quad (17)$$

Agora, com o auxílio da Eq.10 com $\vec{E}_1 = \vec{E}$ e $\vec{E}_2 = \vec{E}_c$, a Eq.17 se escreve

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}_c^2(\vec{x}) dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} V_c(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv \quad (18)$$

Como para uma carga pontual q situada em \vec{x}' (com auxílio do delta de Dirac)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \quad (19)$$

o lado direito da Eq.15 dá diretamente $-qV(\vec{x})/2$, ou seja,

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}_c^2(\vec{x}) dv = -qV_c(\vec{x}') \quad (20)$$

Por outro lado a primeira integral mais à direita da Eq.14 já foi achada na Eq.17 ou seja

$$\epsilon_0 \int_{\infty} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = -\epsilon_0 \int_{\infty} \vec{E}_c^2(\vec{x}) dv \quad (21)$$

Reunindo agora as Eqs.14 20 e 21 obtém-se finalmente

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = \frac{1}{2} qV_c(\vec{x}') \quad (22)$$

primeiro resultado que nos tínhamos proposto obter.

III.2 A Energia de interação expressa em termos da energia contida no volume a ser ocupado pelo condutor

Antes de iniciarmos a demonstração vamos nos recordar que o campo elétrico total na superfície exterior do condutor é a ele normal. Podemos considerá-lo como a soma do campo indutor da carga pontual \vec{E} e o das cargas induzidas \vec{E}_c . Como a componente tangente ao condutor se anula concluímos que $E_c \cdot \hat{n} = \vec{E} \cdot \hat{n}$ sendo \hat{n} o versor da direção da normal, e que devemos ter $|\vec{E}_c| = |\vec{E}|$. No interior devemos ter $\vec{E}_c = -\vec{E}$, já que aí o campo total se anula (ver Fig.1). A discontinuidade do campo é garantido pela densidade de carga superficial induzida.

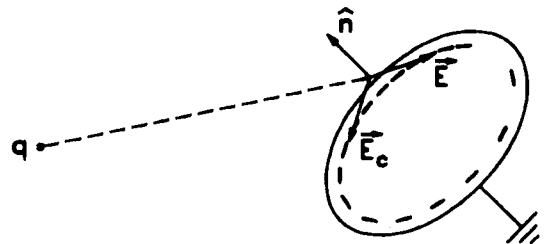


Figura 1. A carga indutora q cria na superfície externa do condutor o campo \vec{E} , enquanto as cargas induzidas criam o campo \vec{E}_c tal que $\vec{E} \cdot \hat{n} = \vec{E}_c \cdot \hat{n}$. Além disto $\vec{E} + \vec{E}_c$ está na direção de \hat{n} .

Voltemos à Eq. 22 e dividamos a integral de volume numa parte referente ao volume exterior, VEC, e noutra ao interior, VIC.

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} (\vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{VEC} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{VIC} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv \quad (23)$$

Com relação à integral em VEC, que agora desenvolvemos usamos, a Eq. 4 com $\vec{A} = \vec{E}_c$ e $-\vec{\nabla}U = \vec{E}$. Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_c = 0$ em VEC, fica-se com (pondo $U(\vec{x}) = V(\vec{x})$)

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{VEC} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V(\vec{x}) \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \hat{n}_i dv \quad (24)$$

S denotando a superfície do condutor e \hat{n}_i a sua normal interior exterior a VEC. Como $\hat{n} = -\hat{n}_i$ a Eq. 24 se escreve tendo em conta que $\hat{n} \cdot E_c = \hat{n} \cdot E$ na superfície exterior do condutor,

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{VEC} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) \cdot \hat{n} dv \quad (25)$$

A integral de superfície com a normal \hat{n} exterior ao condutor pode agora ser expressa em termos do campo no interior do volume do condutor. Pela Eq. 4 com $U = V$ e $\vec{A} = \vec{E}$ (lembrando que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ e que aí $\nabla \cdot \vec{E} = 0$)

$$\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) \cdot \hat{n} dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{VIC} \vec{E}^2(\vec{x}) dv \quad (26)$$

e finalmente pela Eq.25

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{VEC} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{VIC} \vec{E}^2(\vec{x}) dv \quad (27)$$

Voltando à Eq 23 temos que na integral em VIC o campo elétrico \vec{E}_c pode ser substituído por $-\vec{E}$ como já mencionado. Assim sendo podemos afirmar de acordo com a Eq.27 que

$$\epsilon_0 \int_{VIC} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv = \epsilon_0 \int_{VEC} \vec{E}_c(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) dv \quad (28)$$

e finalmente que W na Eq. 23 de acordo com as Eqs. 27 e 28 é

$$W = -\epsilon_0 \int_{VIC} \vec{E}^2(\vec{x}) dv \quad (29)$$

que é o nosso segundo resultado. A energia de interação entre a carga e o condutor à terra está agora expressa de uma forma bem sugestiva. Primeiramente a Eq. 28 diz que o campo \vec{E}_c das cargas induzidas é tal que as contribuições à energia de interação com a carga (não incluída aí a auto-energia de E_c , Eq.14) se distribue igualmente no volume interior e no volume exterior do condutor. Já a Eq. 29 diz que a energia de interação entre a carga e o condutor à terra é igual ao negativo do dobro da energia de campo da carga, inicialmente contida no volume a ser ocupado pelo condutor. A Fig.

2 ilustra com liberdade o resultado. Quando o condutor é trazido em posição escoar-se à terra (trabalho que se torna disponível) quantidade de energia igual ao dobro daquela contida no volume V a ser ocupado pelo condutor.

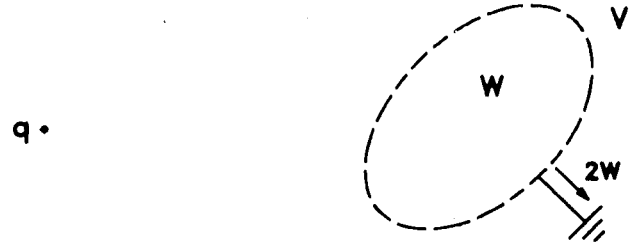


Figura 2. Ilustração do resultado da Seção III.2: ao trazeremos o condutor de volume V , ligado à terra em presença da carga indutora q , escoar-se no processo uma quantidade de energia igual ao dobro daquela originalmente presente em V (tracejado).

IV. O condutor como caso limite de dielétrico de grande susceptibilidade

Poderíamos retrair os passos da seção anterior para obter a energia de interação entre uma carga e um dielétrico. Mas este já é um resultado bem conhecido: o trabalho W_d para trazer o dielétrico de susceptibilidade χ à presença da carga é²

$$W_d = -\frac{\alpha\chi_0}{2} \int_{VID} \vec{E}(\vec{x}) dv \quad (30)$$

em que $\vec{E}(\vec{x})$ é o campo da carga pontual no interior do volume VID que vai ser ocupado pelo dielétrico. E_t é o campo total depois que o dielétrico é trazido. Como num dielétrico altamente polarizável o campo elétrico tende a zero seu comportamento se aproxima ao do condutor. Comparando as Eqs. 29 e 30 vemos que no limite em questão

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{\chi \vec{E}_t(\vec{x})}{2} = \vec{E}(\vec{x}) \quad , \quad \vec{x} \in VID \quad (31)$$

V. Comentários finais

Notemos que nas Eqs. 22 e 30 temos a mesma grandeza física expressa ou localmente - através do potencial - ou espalhada no espaço em integrais de volume. Como Feynman notou isto se deve unicamente à forma do potencial coulombiano e é na sua linguagem mais um exemplo da prolixidade com que a Natureza se deixa descrever³.

A validade das relações deduzidas pode ser testada naqueles exemplos susceptíveis de tratamento numérico como o da carga em presença ou de um plano semi-infinito ou de uma esfera. Quanto à conclusão na Eq. 31 sua veracidade pode ser verificada no exemplo de uma carga e um dielétrico plano semi-infinito⁴ ou mesmo de uma carga e uma esfera dielétrica que admite solução por série⁵.

Agradecimentos

O autor agradece a bolsa de pesquisador concedida pelo CNPq e pela preparação do trabalho à Sra. Rosângela Maria Marcondes de Oliveira e ao Sr. Samuel Alvarez.

Referências

1. G. Bruhat *Cours d'Électricité*, Masson & Cie, Paris (1947) pg.4.
2. J. A. Stratton *Electromagnetic Theory*, McGraw Hill N.Y. (1941) pg. 114.
3. R. P. Feynman *The Character of Physical Law*, M.I.T. Press Massach. (1967) pg. 54.
4. W. Smythe *Static and Dynamic Electricity*, McGraw Hill. N.Y. (1950), Cap. 4, pg. 117.
5. Idem pg. 208 Prob. 77.