É Possível Reduzir a Dinâmica à Cinemática ?

Antonio José Ornellas Farias e Jenner Barretto Bastos Filho
Departamento de Física
Universidade Federal de Alagoas
Cep 57072-970 Maceió - Alagoas - Brasil
Correio Eletrônico: Ornellas@fis.ufal.br
Correio Eletrônico: Jenner@fis.ufal.br

Trabalho recebido em 30 de outubro de 1995

Mostramos, com o exemplo da máquina de Atwood, que a equação de Torricelli, que é puramente cinemática, não pode gerar nem a lei de movimento nem a lei de conservação da energia mecânica total. Em outras palavras, a dinâmica newtoniana não pode ser reduzida à cinemática. Deste modo, o conceito de massa, nesse contexto, não é redutível a relações espaço-temporais puras.

1. Introdução

A palavra Redução tem sido usada nas ciências naturais e sociais e também em filosofia da ciência[1-3]. Uma possível acepção para esse termo é a seguinte: Sejam duas teorias T_1 e T_2 com abrangências respectivamente α_1 e α_2. Se *todos* os problemas tratados e resolvidos dentro do universo de possibilidades, que chamaremos de abrangência α_2, da teoria T_2 forem completamente tratados e resolvidos pela teoria T_1 de abrangência α_1 mas nem todos os problemas tratados e resolvidos pela teoria T_1 admitam tratamento pela teoria T_2, então concluímos que a teoria T_2 está incluida na teoria T_1 e que, por conseguinte, a abrangência α_2 é mais restrita que α_1, e está incluída nesta. Como exemplo, diremos que todos os problemas que constituem o universo de possibilidades da teoria de Newton podem ser utilizados para resolver os problemas levantados pelas teorias de Galileu e de Kepler. As abrangências, respectivamente, α_G e α_K das teorias de Galileu e de Kepler são mais restritas que a abrangência α_N da teoria de Newton. A teoria de Newton inclui as teorias de Galileu e de Kepler como casos particulares.

É importante ressaltar que a física de Galileu e a astronomia de Kepler, são ambas teorias puramente espaço-temporais. O conceito de massa aparece a partir de Newton.

O problema a ser tratado neste artigo diz respeito à possibilidade de redução da dinâmica à cinemática. Como sabemos, a dinâmica newtoniana está baseada em três pilares fundamentais que são a *massa*, o *espaço* e o *tempo*. Todas as fórmulas da dinâmica newtoniana podem ser escritas como uma combinação dessas três grandezas fundamentais. A cinemática, por seu lado, trata de variações espaço-temporais puras. No contexto da cinemática, não aparece o conceito de massa As físicas de Galileu e Descartes e a astronomia pre-newtoniana eram doutrinas espaço-temporais nas quais o conceito de *massa* estava ausente.

Tendo em vista o exposto acima, o nosso problema pode ser colocado através da seguinte pergunta:

- *É possível formular uma dinâmica na qual as massas possam ser descritas por relações espaço-temporais puras?*

Alternativamente, o problema ainda pode ser formulado através da pergunta:

- *É possível reduzir o conceito de massa ao de espaço-tempo ?*

Uma eventual redução da dinâmica newtoniana à cinemática implicaria no resultado segundo o qual a *massa newtoniana* não seria uma entidade autônoma e independente.

- Isso é possível ?

O nosso trabalho constitui uma tentativa pedagógica de resposta a essa pergunta num contexto de um exemplo particular. Tendo em vista o nosso objetivo, analisaremos em um primeiro momento o exemplo da máquina de Atwood; num segundo momento situaremos, de uma maneira mais ampla, o problema de que trata o presente artigo, e finalmente, apresentaremos os nossos comentários conclusivos.

2. Cinemática e Dinâmica

A famosa lei da queda livre de Galileu

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

é uma tal puramente espaço-temporal e portanto, puramente cinemática. A quantidade h representa o espaço percorrido em queda livre durante o tempo t e g é a aceleração com a qual quaisquer corpos caem em queda livre. Dimensionalmente temos,

$$[h] = L$$

$$[t] = T$$

$$[g] = LT^{-2}$$

A derivação de (1) em relação ao tempo dá

$$(dh/dt) = v = gt \tag{2}$$

Substituindo o valor de t de (2) em (1), obtemos

$$v^2 = 2gh \tag{3}$$

Como o processo de derivação em (2) não introduz nenhuma grandeza que transcenda o domínio espaço-temporal puro, o resultado (3) é puramente cinemático.

Como se sabe, o resultado (3) pode ser obtido também a partir da dinâmica. Efetivamente quando um corpo de massa m estiver a uma altura h do solo terá uma energia potencial em relação a esse

$$E_{\text{potencial}} = mgh \tag{4}$$

Quando o corpo percorrer a distância h em queda livre, adquirirá uma energia cinética

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

A quantidade (4) é totalmente convertida em energia de movimento no exato instante em que o corpo tiver percorrido uma distância h. Deste modo, teremos,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

Admitindo-se m uma quantidade finita não nula, segue-se da equação acima que,

$$v^2 = 2gh \tag{7}$$

que é idêntico ao resultado cinemático (3). Dir-se-ia que na passagem de (6) para (7) foi cortada a massa em ambos os membros de (6); seria atribuído a isso o papel "irrelevante" que a *massa* desempenharia a fim de que se obtenha (7), fórmula essa, que como vimos, é puramente cinemática. A fim de analisar se a frase anterior é correta, estudaremos a queda livre de um ponto de vista da conservação da energia mecânica total

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{Const.}$$

Para dois quaisquer instantes da queda t_1 e t_2, teremos

$$\frac{1}{2}m(v_1)^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}m(v_2)^2 + mgh_2$$

Cortando a *massa* que é fator comum a ambos os membros a equação acima temos,

$$\frac{1}{2}[(v_2)^2 - (v_1)^2] - g(h_2 - h_1) = 0$$

Denotemos o subscrito 2 por final, o subscrito 1 por inicial Consideremos $(h_2 - h_1) = h$ a distância efetivamente percorrida em queda livre; h_2 e h_1 são tomados em relação a uma origem se bem que essa origem não seja importante pois, do ponto de vista da energia, o que interessa é a variação de altura e essa, independe de origem arbitrada. Teremos então,

$$(V_{\text{final}})^2 = (V_{\text{inicial}})^2 + 2gh \tag{8}$$

Se o corpo desce em queda livre ao longo de um plano inclinado sem atrito, o papel da aceleração anterior será desempenhado pela aceleração a ao longo desse plano inclinado e o papel de h será desempenhado pelo comprimento s ao longo do mesmo (Ver Fig. 1). Se ϕ denota o ângulo do plano inclinado em relação à vertical, temos,

$$s\cos\phi = h \qquad g\cos\phi = a \tag{9a}$$

ou alternativamente,

$$hg = as \tag{9b}$$

Por um procedimento *mutatis mutandis,* tendo em vista a equação (9), a equação (8) dará lugar a

$$(V_{\text{final}})^2 = (V_{\text{inicial}})^2 + 2as \tag{10}$$

A velocidade final no ponto B da Fig. 1 expressa pela eq. (8) é a mesma velocidade final no ponto B' da Fig. 1 expressa pela eq. (10); de maneira análoga, as velocidades iniciais no ponto A da Fig. 1 são as mesmas quer se trate da eq. (8) ou da eq. (10). No entanto, os intervalos de tempo de queda ao longo de h e ao longo de s são, evidentemente, diferentes. Isso facilmente se depreende das fórmulas de Galileu

$$s = \frac{1}{2}a(t_{\text{descida no plano inclinado}})^2 \tag{11}$$

$$h = \frac{1}{2}g(t_{\text{queda livre vertical}})^2 \tag{12}$$

Combinando as expressões (11), (12), (9a) e (9b) temos,

$$t_{\text{descida no plano inclinado}} = t_{\text{queda livre vertical}}(\cos\phi)^{-1} \tag{13}$$

As expressões (8) e (10) são variantes da assim chamada equação de Torricelli Tal denotação é uma homenagem ao cientista italiano Evangelista Torricelli (1609-1647).

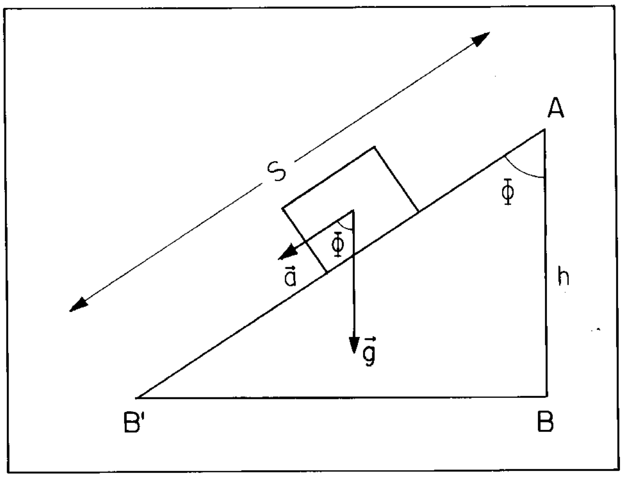

Figura 1. A figura acima mostra um plano inclinado de comprimento s e altura h; sua inclinação em relação à vertical é dada pelo ângulo ϕ. Os efeitos dissipativos não são considerados.

Poderia transparecer da *equação de Torricelli*, nas formas (8) e (10), as quais podem ser obtidas em um contexto puramente cinemático, que seria possível "passar" a partir dela para a equação da energia simplesmente mediante a multiplicação, em todos os termos de ambos os membros, do parâmetro "irrelevante" chamado de massa. Se isso fosse verdade, então poder-se-ia reduzir a dinâmica à cinemática. A afirmação última seria insólita e inusitada. No entanto, ela é, como mostraremos a seguir, *manifestamente* falsa. Efetivamente, não podemos concluir sobre *redução* de uma disciplina teórica à outra simplesmente analisando um caso particular no qual apareça *apenas uma única massa* que é um fator comum a todos os termos de ambos os membros de uma dada equação. No entanto, se encontrarmos apenas um único contra-exemplo que deixe claro que essa redução não é possível, isso nos basta para concluirmos, definitivamente, pela irredutibilidade da dinâmica à cinemática. Em outras palavras, não há necessidade alguma de levarmos a cabo, aqui, uma demonstração axiomática e absolutamente geral de irredutibilidade. Um único contra-exemplo é tudo o que nos basta para demonstrá-la definitivamente. É exatamente nesse sentido que analisaremos um caso no qual estejam envolvidas *duas massas distintas*.

3. A máquina de Atwood

Nesta seção mostraremos que no exemplo da máquina de Atwood (Ver por exemplo referência [4] com duas massas m e M com $M > m$, *a equação de Torricelli constitui somente o vínculo entre a lei de movimento e a conservação da energia mecânica. O mero vínculo contudo é incapaz de implicar tanto a lei de movimento quanto a equação da energia.* Deste modo pode-se mostrar que *a dinâmica de Newton não pode ser reduzida a cinemática. Como consequência, o conceito de massa nesse contexto é não eliminável.*

Como sabemos, a máquina de Atwood é constituída por uma roldana fixa de massa desprezível e *duas massas* m e M que estão ligadas entre si por um fio, também de massa desprezível, tal que não é suceptível de variar seu comprimento nem por encolhimento nem por esticamento (Ver Fig. 2). É conveniente ressaltar que nas nossas considerações não estão envolvidos quaisquer efeitos dissipativos.

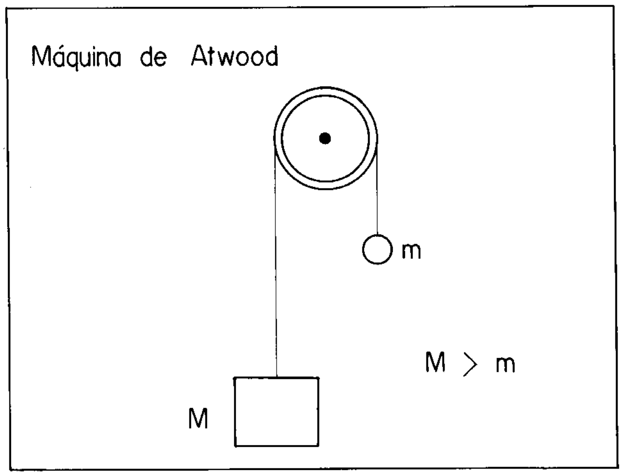

Figura 2. A figura acima exibe a assim chamada máquina de Atwood, a qual é composta por uma roldana fixa, suposta ter massa desprezível, a qual conecta as massas m e M ,($M > m$) ligadas entre si por um fio de comprimento fixo, também de massa desprezível.

A força motriz que, age sobre o sistema é

$$F = (M - m)g \tag{14}$$

A equação (14) admite interpretação fácil. Se as massas fossem iguais, F se anularia e por conseguinte a motricidade seria nula ($F = 0$).

Por outro lado, a força resultante sobre o sistema será o produto da massa total pela aceleração a que age sobre o sistema. Deste modo teremos,

$$F = (M + m)a \tag{15}$$

Igualando (14) a (15), teremos a equação de movimento do problema,

$$(M - m)g = (M + m)a \tag{16}$$

Analisemos dois instantes arbitrários dos movimentos das massas m e M na máquina de Atwood (Fig. 3). Essa análise será feita no contexto da conservação da energia mecânica total. Ela nos permite escrever

$$(mv_1^2/2) + mgh_1 + (MV_1^2/2) + MgH_1 =$$
$$(mv_2^2/2) + mgh_2 + (MV_2^2/2) + MgH_2 \tag{17}$$

onde os índices subscritos 1 e 2 se referem, respectivamente, às "fotografias" nos instantes 1 e 2; v_1 é a velocidade da massa m no instante 1 e h_1 é a distância que nesse mesmo instante separa a massa m do chão; V_1 é a velocidade da massa M no instante 1 e H_1 é a distância que no instante 1 separa a massa M do chão; v_2, h_2, V_2 e H_2 são as quantidades correspondentes ao instante 2 (Ver Fig. 3).

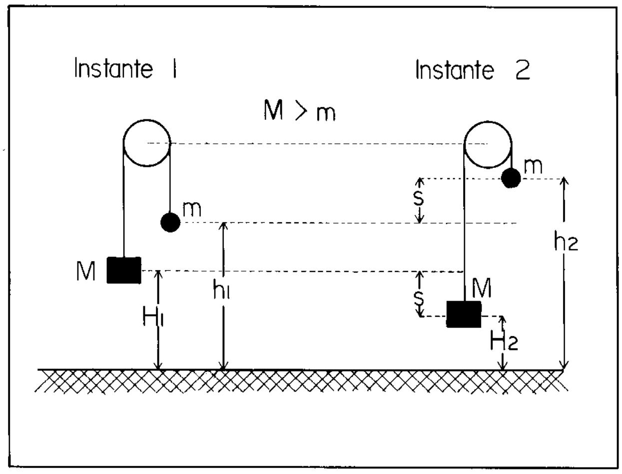

Figura 3. A figura acima exibe duas "fotografias" instantâneas relativas a dois momentos distintos do movimento de massas na máquina de Atwood.

Tendo em vista a hipótese do comprimento fixo é evidente que,

$$v_1 = V_1 \qquad v_2 = V_2 \tag{18}$$

Substituindo (18) em (17), temos

$$mg(h_1 - h_2) + Mg(H_1 - H_2) = [(m + M)/2](v_2^2 - v_1^2) \tag{19}$$

Imediatamente a partir da Fig. 3 se depreende que,

$$h_1 - h_2 = -s \qquad H_1 - H_2 = +s \tag{20}$$

Substituindo (20) em (19), temos

$$(M - m)gs = [(m + M)/2](v_2^2 - v_1^2) \tag{21}$$

O segundo membro de (21) mostra a variação de energia cinética sofrida pela massa total $(m + M)$ entre os instantes 1 e 2; essa massa é acelerada com aceleração a ao longo de s. De acordo com a fórmula de Torricelli temos,

$$(v_2^2 - v_1^2) = 2as \tag{22}$$

Substituindo (22) em (21), obtemos a equação de movimento (16).

Podemos resumir os nossos resultados assim

I. *A equação da conservação da energia mecânica total (17) adicionada à hipótese auxiliar segundo a qual o fio tem comprimento-fixo (hipótese essa que implica (18)) leva à equação de movimento (16) se a equação de Torricelli (22) é válida.*

II. *Deste modo a equacão de Torricelli (22), que, como sabemos, é puramente cinemática, é o mero vínculo entre a conservação da energia mecânica total (17) e a equação de movimento (16).*

III. *A equação de Torricelli não pode, por si só, nem gerar a equação de movimento (16) nem a equação da conservação da energia mecânica total (17).*

IV. *Deste modo, desmorona o argumento ingênuo (e errado) segundo o qual se poderia gerar a partir da equação de Torricelli por mera multiplicação de fator comum "irrelevante" chamado massa, a equação da conservação da energia mecânica total. O exemplo da máquina de Atwood, que envolve duas massas distintas, mostra que o argumento referido é manifestamente falso.*

V. *Tudo isso nos sugere enfaticamente que não podemos reduzir a dinâmica newtoniana à cinemática, ou seja, a considerações meramente espaço-temporais. Em outras palavras, a massa é um conceito autônomo e nesse contexto, não removível.*

4. Palavras finais

A nossa motivação para escrever este trabalho teve origem numa constatação na qual *aparentemente* uma situação cinemática poderia substituir uma situação dinâmica, a menos de uma constante multiplicativa. Neste caso particular, a equação de Torricelli difere da equação que expressa a conservação da energia mecânica total por um fator multiplicativo aparentemente "irrelevante" e assim, a dinâmica não ofereceria nada mais que a cinemática já oferece. Evidentemente, em se tratando de um caso particular, não se pode falar de *redução*. A simples generalização para um problema envolvendo dois corpos de massas distintas, é suficiente para mostrar que tudo o que foi dito acima, relativo ao fator multiplicativo comum, deixa de se aplicar. Efetivamente, como mostramos, a equação de Torricelli não pode gerar nem a equação de movimento nem a lei de conservação da energia mecânica. A equação de Torricelli é simplesmente um vínculo, se bem que um vínculo importante. Podemos expressar isso de maneira metafórica: A equação de Torricelli funcionando como um vínculo, ou ainda em outras palavras, sendo uma ponte, não poderia implicar, por si só, nos dois pontos ligados por ela. A situação correta é justamente a inversa, ou seja, é através dos dois pontos aqui representados por (16) e (17) que podemos construir a ponte representada pela equação de Torricelli dada pela eq. (22).

Analisamos o problema da *reducão,* provavelmente, para o caso mais simples possível: a dinâmica e a cinemática. Em geral, o problema da *redução* é muito complicado. A tendência mais aceita nos dias de hoje é que a complexidade é uma categoria inerente a certos sistemas naturais; tentá-los reduzir a combinações de *sistemas simples* em diversos graus de dificuldade seria quimérico. Diríamos que a epistemologia da *complexidade* tem melhores perpectivas que uma epistemologia reducionista, a qual contenta-se em apresentar o real o reduzindo apenas um de seus aspectos. Ressaltemos que, simplesmente reduzir o real a apenas um de seus múltiplos aspectos não necessariamente é uma coisa má. Em muitos sentidos, a física que conhecemos é reducionista na medida em que, através de judiciosa e sutil escolha, apenas os aspectos supostamente mais relevantes do real são levados em conta. Por exemplo, em vários sistemas físicos, abstraimos os efeitos dissipativos. Claro está que para sistemas físicos nos quais as dissipações impliquem justamente qualidades importantes, uma tal abstração não fará sentido.

A título de conclusão, vamos discutir brevemente e *grosso modo* sobre o conceito de espaço que, como veremos, se relaciona com o tema tratado neste artigo. Einstein[5], por ocasião de uma apresentação (*foreword*) a um livro de Jammer, se referiu a duas possíveis concepções de espaço da seguinte maneira:

"Esses dois conceitos de espaço podem ser contrastados com segue: (a) Espaço enquanto qualidade posicional do mundo dos objetos materiais; (b) Espaço enquanto receptáculo de todos os objetos materiais. No caso (a), espaço sem um objeto material é inconcebível. No caso (b), um objeto material apenas pode ser concebido enquanto existente no espaço; o espaço então aparece como uma realidade a qual em certo sentido é superior ao mundo material. Ambos os conceitos de espaço são criações livres da imaginação humana, inventados para prover a compreensão de nossa experiência sensorial".

De acordo com a concepção (a), o espaço apenas poderá ser concebido a partir dos *objetos materiais.* Nesse sentido, há uma certa indissociabilidade entre *espaço* e *objetos materiais* na medida em que o espaço é a expressão da qualidade posicional de tais objetos. No entanto, segundo a concepção (b), que é a de um *espaço receptáculo*, pode-se pensar em um *espaço* independente de objetos materiais (*espaço* vazio), mas os *objetos materiais* somente podem ser concebidos como existentes no *espaço.* Dito de outro modo, se por um processo qualquer retirarmos de um dado *espaço* todos os *objetos materiais* que tiverem contidos nele, ainda assim restará lá o *espaço.* Os *objetos materiais*, por sua vez, necessitam do *espaço* para terem o direito de existir. No contexto da concepção (b) há uma *primazia* do *espaço* em relação aos *objetos materiais.*

A mecânica de Newton se apoia na concepção (b). Embora, no contexto de (b), haja uma primazia do espaço sobre os corpos materiais, a dinâmica Newtoniana somente pode ser fundada a partir da atribuição aos corpos materiais da propriedade de *massa.* Tendo em mente o nosso exemplo da máquina de Atwood, podemos concluir o nosso trabalho com a metáfora do teatro. O espaço pre-existente é o palco, condição *sine qua non* para a realização do espetáculo pois sem o *espaço-palco* (daí a sua primazia), os *atores-massa* não podem representar. Mas apenas com a primazia (*espaço-palco*) não temos o suficiente para que tenhamos espetáculo. Os *atores-massa* têm, nesse sentido, existência autônoma e não podem ser reduzidos meramente ao *espaço-palco.* E assim podemos entender o porquê do papel desempenhado pela massa ser tão fundamental.

Referências

1. E. Nagel, *The Structure of Science (Problems in the Logic of Scientifical Explanation),* Hackett Publishing Company, Indianapolis, Cambridge (1979).
2. P. Suppes, *Que é uma Teoria Científica,* in: *Filosofia da Ciência,* organizado por Sidney Morgenbesser, Editôra Cultrix, São Paulo (1972).
3. C. G. Hempel, *Filosofia da Ciência Natural,* Zahar Editores, Rio de Janeiro (1974).
4. L. Landau e A. Kitaigorodsly, *Física para Todos,* Editorial Mir Moscou (1963) (Ver capítulo IV: Leis de conservación, pp. 79 - 104; em especial as páginas 87 - 94).
5. A. Einstein, prefácio escrito para o livro de Max Jammer *Concepts of Space (The History of Theories of Space in Physics),* Harvard University Press, Cambridge Massachusetts (1970). O texto de Einstein em inglês é o seguinte: *"These two concepts of space may be contrasted as follows: (a) space as positional quality of the world of material objects; (b) space as container of all material objects. In case (a), space without a material object is inconceivable. In case (b), a material object can only be conceived as existing in space; space then appears as a reality which in a certain sense is superior to the material world. Both space concepts are free creations of the human imagination, means devised for easier comprehension of our sense experience."*