

# Em Plano Rugoso e Solicitada por Força Fora do Centro

The initial motion of a bar on a rough plane under the action of a non-centered force

G.F. Leal Ferreira

*Departamento de Física e Ciência dos Materiais  
Instituto de Física de São Carlos - USP  
Caixa Postal 369 - CEP 13.560 970 - São Carlos - SP*

Trabalho recebido em 10 de outubro de 1995

## Resumo

Através do suposto conhecimento da pressão de sustentação de uma barra sobre um plano, acha-se a força mínima para a mover e a posição do centro de rotação do movimento inicial da barra em função do ponto de aplicação da força, quando há atrito uniforme entre ela e o plano. Em apêndice estuda-se o caso geral do movimento inicial da barra solicitado por uma força qualquer fora de seu centro.

## Abstract

Assuming the knowledge of the pressure pattern under a bar over a plane with uniform friction, the minimum force that imparts motion to the bar and its initial center of rotation is found as a function of the distance to the c.m. from the point where the force is applied. In an appendix the general case of the initial motion of the bar under any force applied out of its center is studied.

## 1. Introdução

Entre os problemas interessantes discutidos no capítulo 8 do vol.1 de Estática do autor R.C.Hibbeler<sup>[1]</sup> está o Exemplo 8-8 em que se pede o momento necessário para fazer girar em torno de um eixo vertical uma barra homogênea sobre um plano rugoso. O interessante do problema é que sugere-se para a pressão de reação normal de contacto - não uma uniforme - mas linearmente crescente das extremidades ao centro. Não sabemos se a teoria da elasticidade fornece solução conhecida ao problema e aqui vamos aceitar a sugestão de Hibbeler para atacarmos um outro problema que é: sobre a barra agora livre agimos perpendicularmente a ela e paralelamente ao plano rugoso com uma força crescente fora do centro; no instante em que o atrito é vencido, qual a tendência de movimento da barra e o valor da força aplicada? A solução deste problema virá de uma generalização do problema do Exemplo 8-

8, calculando-se primeiramente o momento necessário para girar a barra apoiada em torno de um eixo passando por um dado ponto de seu comprimento. Isto será visto na seção 2, enquanto na 3 achar-se-á a força no eixo. Na 4 aplicamos os resultados encontrados para a solução do problema proposto. A seção 5 estuda o movimento inicial para o caso em que o atrito é desprezado e na 6 apresentamos e discutimos os resultados. Na 7 fazemos os comentários finais enquanto que no apêndice tratamos brevemente do movimento inicial da barra sujeita a uma força qualquer. Os cálculos foram realizados numa calculadora HP 48S.

## 2. Cálculo do momento para se girar a barra apoiada em torno de eixo passando por um ponto qualquer

Na Fig.1 a barra homogênea AB de comprimento  $\ell$  está apoiada num plano horizontal (que coincide com

o plano do papel) e pode girar em torno do eixo vertical o distante  $s_0$  do c.m.. Quer-se achar o momento anti-horário  $M(s_0)$  necessário para iniciar o movimento de rotação sendo  $\mu$  o coeficiente do atrito estático, suposto único, entre a barra e o plano. Admitiremos que a pressão  $p$  normal que equilibra o peso é dado<sup>[1]</sup> por

$$p(x) = \frac{4\lambda g}{\ell} \left( \frac{\ell}{2} - |x| \right), \quad -\frac{\ell}{2} < x < \frac{\ell}{2} \quad (1)$$

sendo a abscissa  $x$  contada do c.m.,  $\lambda$  a densidade por unidade de comprimento e  $g$  a aceleração da gravidade.

Como pode ser verificado diretamente, a integral de  $p$  ao longo da barra, isto é de  $-\ell/2a + \ell/2$ , é igual a  $\lambda\ell g$ , o peso da barra.

Tendo em conta o sentido anti-horário de  $M(s_0)$ , Fig. 1, o perfil da distribuição da densidade de força de atrito à direita de  $o$ , se opondo ao movimento, será como mostrado na Fig. 2. Já à esquerda de  $o$  deve ter sentido contrário, opondo-se, também, à rotação da barra. Note-se que na vizinhança de  $o$  as forças tem praticamente o mesmo valor mas os sentidos são opostos. A força de atrito elementar  $df$  num elemento  $dx$  da barra, quando esta estiver na iminência de deslizar, é

$$df = \mu p dx \quad (2)$$

e daí pode-se achar o momento elementar  $dM$  em relação a  $o$ , que será

$$dM = df(x + s_0) \quad (3)$$

para elementos à direita de  $o$ , e

$$dM = df(|x| - s_0) \quad (4)$$

para aqueles à esquerda de  $o$ .

Com o devido cuidado com o módulo  $x$  nas Eqs.1 e 4, o momento total  $M(s_0)$  pode ser achado. Ele é

$$M(s_0) = \mu g \lambda \ell^2 \left[ \frac{1}{6} + 2s_0'^2 - \frac{4s_0'^3}{3} \right] \quad (5)$$

com

$$s_0' = s_0/\ell. \quad (6)$$

Na Fig. 3 mostramos  $M'(s_0')$ , isto é,

$$M'(s_0') = \frac{M(s_0)}{\mu g \lambda \ell^2} = \quad (7)$$

como função de  $s_0'$ .

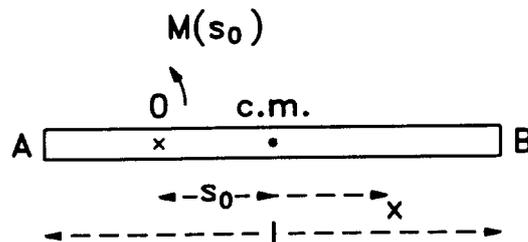


Figura 1. Vista de topo da barra homogênea AB de comprimento apoiada sobre um plano rugoso e que pode girar em torno do eixo vertical o distante  $s_0$  do c.m., acionada pelo momento  $M(s_0)$ , o suficiente para colocá-la em movimento.

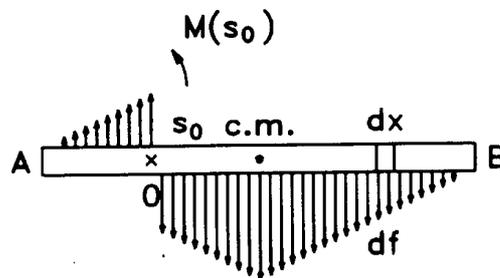


Figura 2. Perfil da distribuição da densidade de força de atrito,  $df$ , opondo-se ao deslizamento induzido pelo momento antihorário aplicado  $M(s_0)$ . Exatamente à esquerda e à direita do eixo  $o$ , os módulos da densidade de força são iguais, mas tem sentidos opostos.

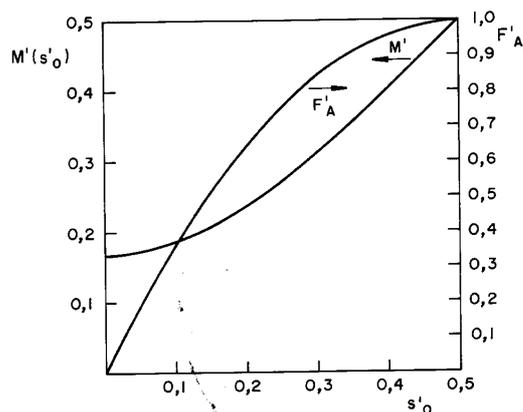


Figura 3. Momento reduzido  $M'(s_0')$  Eq.7, em função de  $s_0' = s_0/\ell$ , eixo das ordenadas à esquerda. Para  $F'(s_0')$ , Eq.10, eixo à direita.

Vale a pena notar que através das Eqs. 5 e 6 e com auxílio das Eqs. 5 e 7 pode-se verificar que

$$p(x) = \left( \frac{1}{2\mu} \frac{d^2 M}{ds_0'^2} \right)_{s_0 = -x} \quad (8)$$

relação que se pode demonstrar valer para qualquer  $p(x)$ . Então concluímos que a hipótese de Hibbeler

pode ser testada e eventualmente corrigida pela medida do momento necessário para iniciar a rotação da barra apoiada, como função da posição  $s_0$  do eixo.

### 3. A força do eixo

---

$$F_A = 2 \left[ 4 \frac{\mu \lambda g}{\ell} \int_0^{s_0} \left( \frac{\ell}{2} - x \right) dx \right] = 4 \frac{\mu \lambda g s_0}{\ell} (\ell - s_0), \quad (9)$$

para o que se usou o fato de que as contribuições entre  $s_0$  e  $\ell$  e entre  $-s_0$  e  $-\ell$  se cancelam e aquelas entre o e  $s_0$  e entre o e  $s_0$  se somam.

$F'_A$  definido como

$$F'_A = \frac{F_A}{\mu \lambda g \ell} \quad (10)$$

em função de  $s_0$  está mostrado também na Fig. 3. Note-se que  $F'_A$  é zero para o eixo colocado no centro de massa da barra e vai aumentando com  $s'_0$  até atingir o valor unidade para  $s'_0 = 0,5$ .

### 4. A barra apoiada acionada por uma força normal que não passa pelo centro de massa

Sobre a barra AB, que pode agora se mover no plano horizontal, agimos com uma força crescente  $F$ , a ela normal e paralela ao plano, aplicada a uma distância  $y_0$  à direita do c.m. da barra. Como a força não está aplicada sobre o c.m. aparecerá uma tendência à rotação além daquela à translação. Enquanto a barra não se move, a força e o momento aplicados devem estar sendo compensados pela força de atrito e seu momento. Fazemos a hipótese de que a barra tenderá a girar em torno do ponto  $s_0$ , centro de rotação, que faz ser tanto a força aplicada igual à força total de atrito  $F_A$ , como o momento aplicado em torno dele igual o momento das forças de atrito  $M_A(s_0)$ . Isto é, impomos  $F$  igual a  $F_A$  Eq. 9

$$F_A = F = 4 \frac{\mu \lambda g s_0}{\ell} (\ell - s_0) \quad (11)$$

e o momento aplicado  $F(y_0 + s_0)$  em torno de o igual a  $M_A(s_0)$  dado pela Eq.5, isto é, (ver Fig.4)

Uma outra grandeza relevante no problema é a força  $F_A$  com que o eixo atua sobre a barra para compensar o atrito. No instante do deslizamento, tendo em conta a Fig. 2,  $F_A$  é

---


$$F(y_0 + s_0) = \mu g \lambda \ell^2 \left[ \frac{1}{6} + 2 \left( \frac{s_0}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{s_0}{\ell} \right)^3 \right] \quad (12)$$

Substituição de  $F$  pela Eq.11 na Eq.12 gera equação cúbica em  $s'_0 = s_0/\ell$ . Após alguma manipulação ela é

$$16s_0'^3 - 12s_0'^2(1 - 2y_0') - 24s_0'y_0' + 1 = 0 \quad (13)$$

em termos de  $y_0'$

$$y_0' = y_0/\ell. \quad (14)$$

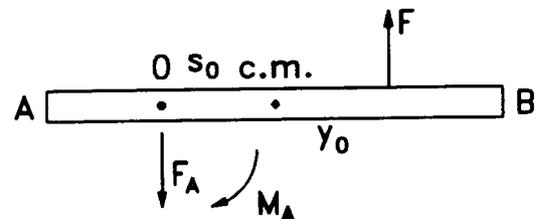


Figura 4. Sobre a barra AB homogênea sobre o plano rugoso age-se com uma força  $F$  perpendicular a ela, e paralelamente ao plano, num ponto distante  $y_0$  do c.m. No instante do deslizamento as forças de atrito tem uma configuração como na Fig. 2.

Achada, para cada valor de  $y_0'$ , a solução da Eq. 13, isto é, a posição do centro de rotação, podemos retornar à Eq. 11 que nos dará, então, a força aplicada necessária para o deslocamento. Usaremos na seção 6 a força reduzida  $F'$  definida como

$$F' = \frac{F}{\mu \lambda g \ell} \quad (15)$$

### 5. O movimento inicial inercial

Qual será o movimento inicial da barra se não houver atrito ou se a força aplicada for muito maior do

que a de atrito? Neste caso o movimento iniciar-se-á com configuração diferente. Fazemos a hipótese de que para determiná-lo diferente devemos achar qual ponto da barra ou de seu prolongamento que tenderá a ser estacionário pela dupla ação da translação uniforme e da rotação em torno do c.m..

Teríamos a equação determinando a translação

$$F = m\gamma \quad (16)$$

e aquela determinando a rotação,

$$F y_0 = I_0 \alpha \quad (17)$$

sendo  $m = \lambda \ell$  a massa da barra,  $I_0$  seu momento de inércia em torno do c.m. e  $\alpha$  a aceleração angular inicial. Um ponto da barra, ou do seu prolongamento,  $-x_0$ , à esquerda de c.m., ficará imóvel solicitado pelas tendências opostas de translação e rotação (ver Fig.5). Este ponto  $x_0$ , centro de rotação, pode ser encontrado das Eqs.16 e 17 impondo ao deslocamento total infinitesimal de amplitude  $dz$  no tempo  $dt$

$$dz = \frac{F}{2m} dt^2 + \frac{F y_0}{2I_0} x dt^2 \quad (18)$$

que será zero quando  $x = -x_0$ , com

$$x_0 = \frac{I_0}{m y_0} \quad (19)$$

Como para uma barra homogênea

$$I_0 = \frac{m \ell^2}{12} \quad (20)$$

então

$$x_0 = \frac{\ell^2}{12 y_0} \quad (21)$$

Para pequenos  $y_0$ ,  $x_0 \gg \ell/2$  e a barra tem essencialmente, uma translação. Porém, para  $y_0 \geq \ell/6$ ,  $x_0 \leq \ell/2$  e agora o centro de rotação é um ponto da barra.



Figura 5. A barra AB, representada aqui sem espessura, solicitada por uma força à direita do c.m., tende a ter um movimento de translação (setas verticais iguais) e outro de rotação (só mostrado à esquerda do c.m.). O ponto  $x_0$  da barra ou de seu prolongamento à esquerda do c.m. que tende a se manter estacionário é o centro de rotação inicial.

Esta solução inercial prediz movimento inicial de configuração bem diferente daquela com atrito. Em apêndice damos a solução geral para a força inicial de valor qualquer.

## 6. Resultados e discussão

Nesta seção vamos mostrar a que nos leva a solução proposta na seção 4 do problema do movimento inicial e da força mínima necessária para colocar a barra em movimento, bem como quando solicitada por uma força qualquer, que é obtida combinando-se os tratamentos das Seções 4 e 5 e está desenvolvida no Apêndice.

### 6.1. Força mínima e movimento inicial

Na Fig.6 mostramos a raiz  $s'_0$  da Eq. 13, de nosso interesse, em função de  $y'_0$ , bem como o valor da força mínima obtida da Eq.11, em termos de  $F$  definido na Eq.15.

Vê-se que  $s'_0$ , posição do centro de rotação, parte de 0,5 para  $y'_0 = 0$  e avança para o c.m., embora não o atinja, para  $y'_0$  crescentes. Para módicos valores de  $y'_0$  a barra tende a girar em torno de um ponto próximo da extremidade oposta, mas este ponto rapidamente caminha para o centro para maiores  $y'_0$ . Para  $y'_0 = 0,5$ ,  $s'_0$  atinge 0,0841, um pouco à esquerda do c.m..

A força  $F'$  começa com o valor unitário para  $y'_0 = 0$  e diminui até 0,308 para  $y'_0 = 0,5$ . Estes resultados parecem-nos intuitivamente corretos, pois a barra parece oferecer progressivamente menor resistência à medida que se age mais distante do centro.

Entretanto o resultado que dá para  $y'_0 = 0$ ,  $s'_0 = 0,5$  e  $F' = 1$  parece surpreendente. Nesta situação, o ponto o na Fig. 4 estaria na extremidade A e vê-se que todas forças de atrito elementares se opõem ao movimento, com momento máximo em relação àquele ponto. Mas se raciocinarmos no espírito do movimento inicial inercial da Seção 5, poderíamos aduzir que o movimento inicial seria de translação pura, também com  $F' = 1$  (com centro de rotação no infinito). Porém não podemos dar solução a este dilema dentro das hipóteses simplificadas com que o problema foi abordado, no sentido de prevermos aquele comportamento único com que a barra irá responder á ação da força aplicada exatamente no

centro. Tomamos a barra fina e a força exatamente perpendicular, idealizações que se tornam precárias para o estudo do efeito da força aplicada nas vizinhanças do c.m.. Além disto, o atrito foi suposto uniforme em todo o contacto e a força ser crescida com suficiente lentidão para a determinação do valor mínimo. Estas hipóteses dificultam a solução do dilema tanto teoricamente como na prática. Será pois mais razoável admitir que a região de validade da solução proposta exclua a região de  $y'_0$  pequeno. Corrobora esta atitude o fato de nossa solução fornecer valor infinito para a derivada  $ds'_0/dy'_0$ , em  $y'_0 = 0$  (da Eq.13 e da Fig.6). Na abordagem que damos no Apêndice ao problema do movimento inicial sob uma força inicial qualquer, admitimos que a solução da Seção 4 é correta e que a força inicial parte do valor mínimo e dado na Fig. 6 para cada  $y'_0$ .

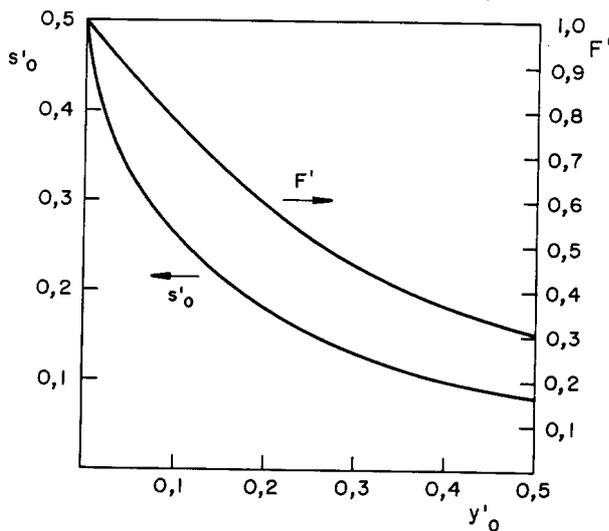


Figura 6. Posição do centro de rotação do movimento inicial,  $s_0$ , ordenadas à esquerda, e a força mínima, ordenadas à direita, em função do ponto de aplicação reduzido,  $y'_0 = y_0/\ell$ , em abscissa.

### 6.2. Movimento inicial para uma força qualquer

O valor  $F'$  como função de  $s'_0$  para cada valor de  $y'_0$  pode ser tirado da Eq. A9. Para melhor enquadrar os resultados são apresentados em escala  $\log \times \log$  na Fig. 7. Escolhemos três valores da  $y'_0$ : para este último caso o valor de  $s'_0$  inercial, dado na Eq.21, está no interior da barra e vê-se que  $s'_0$  se desloca para valores crescentes, para  $F'$  crescentes, tendendo ao valor limite inercial. Já para  $y'_0 = 0,05$  e  $0,10$ , o valor limite inercial de  $s'_0$  está além de  $0,5$ . Vê-se então que  $s'_0$  começa no

interior e para crescentes  $F'$  se encaminha para a extremidade,  $0,5$ , obedecendo à Eq. A9. Como discutido no Apêndice, para  $s'_0 > 0,5$  a Eq.7 cessa de ser válida (porque a força de atrito atinge seu valor máximo e o seu momento em relação ao c.m. se anula). Vale agora a Eq. A10, próxima da solução inercial, com os comportamentos mostrados para as curvas correspondentes a  $y'_0$  igual a  $0,10$  e  $0,05$  para  $s'_0 > 0,5$ .

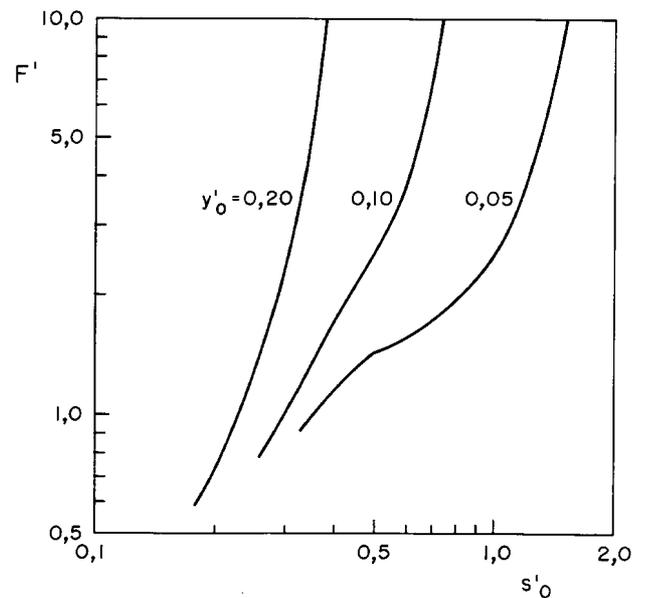


Figura 7.  $\log F' \times \log s'_0$  para três valores da posição do ponto de aplicação da força ( $y'_0 = y_0/\ell$ )  $y'_0 = 0,20, 0,10$  e  $0,05$ . Para o primeiro caso o centro de rotação fica sempre no interior da barra. Para os outros dois casos,  $s'_0$ , se move do interior ao exterior para  $F'$  crescentes.

### 7. Considerações Finais

Procuramos dar solução teórica ao problema de uma barra apoiada com atrito uniforme solicitada por uma força crescente normal, mas paralela ao plano de apoio, obtendo a força mínima e o ponto em torno do qual ela tende a girar na iminência de movimento. A barra deve ser suficientemente fina para definir uma única direção das forças de atrito na seção de contacto entre ela e o plano. Talvez a hipótese mais difícil de ser realizada experimentalmente esteja no valor único do coeficiente de atrito que admitimos. Além disto, tratando-se da força mínima, ela deve ser aplicada com suficiente lentidão para uma determinação mais precisa. Possíveis dificuldades com a nossa solução estão comentadas na Seção 6.1.

Usamos para a pressão de sustentação da barra aquela sugerida por Hibbeler, Eq. 1, mas esta mesma pode ser testada e eventualmente corrigida de acordo com a Eq. 8. Neste caso, os cálculos e os gráficos deveriam ser adaptados para o novo perfil de pressão.

A diferença entre a posição do centro de rotação obtida para o início do movimento com atrito, Eq. 13, e aquela no caso puramente inercial, Eq. 21, nos convida a estudarmos o caso geral qual seja o de obter o centro de rotação inicial para qualquer valor da força aplicada sobre um dado ponto do eixo. Isto é brevemente indicado no apêndice que segue.

### Agradecimento

O autor agradece a bolsa de pesquisador concedida pelo CNPq. e pela preparação do artigo à Sra. Rosângela M. Marcondes de Oliveira e Sr. Samuel Alvarez.

### Referência

R. C. Hibbeler, *Mecânica-Estática*, Editora Campus RJ, pg 322.

### Apêndice

Aqui obteremos rapidamente o centro de rotação inicial da barra quando uma força  $F$ , maior do que a mínima para o dado ponto de aplicação  $y_0$ , é exercida (Fig. 5). Faremos essencialmente o mesmo raciocínio que empregamos na Seção 4, Eqs. 16 a 21, mas agora introduziremos as forças e momentos de atrito em torno do c.m., respectivamente  $F_{CMA}$  e  $M_{CMA}$ .

Temos as equações

$$F - F_{CMA} = m\gamma \quad (A1)$$

$$Fy_0 - M_{CMA} = I_0\alpha \quad (A2)$$

Admitiremos primeiro que  $F$  é um pouco maior do que a força mínima para o dado valor de  $y_0$ . Com isto o valor de  $s_0$ , embora diferente do valor correspondente à força mínima, ainda será menor do que  $\ell/2$ . O novo valor de  $s_0$  será então determinado das Eq. A1 e A2 pondo-se o deslocamento de translação  $dz$ , e angular  $d\theta$ , no tempo infinitesimal  $dt$ .

$$dz = \frac{1}{2}\gamma dt^2 = \frac{1}{2}\frac{F - F_{CMA}}{m}dt^2 \quad (A3)$$

$$d\theta = \frac{1}{2}\alpha dt^2 = \frac{1}{2}\frac{Fy_0 - F_{CMA}}{I_0}dt^2 \quad (A4)$$

e achando-se  $s_0$  tal que

$$dz = s_0\Delta\theta \quad (A5)$$

Naturalmente que  $F_{CMA}$  e  $M_{CMA}$  são funções de  $s_0$ ,  $F_{CMA}$  como função de  $s_0$  está dado na Eq. 11. Por outro lado a Eq.5 dá o momento em relação a o e para obtê-lo em relação ao c.m. basta usar a conhecida relação entre os momentos referido a dois eixos, ou seja (lembrado que  $M_A$  e o momento em relação a o, Fig. 4)

$$M_{CMA} = M_A - Fs_0 \quad (A6)$$

Com isto temos, de A3 - A6,

$$\frac{\ell^2}{12} \left[ F - 4\mu\lambda g s_0 \left( 1 - \frac{s_0}{\ell} \right) \right] = s_0 \left[ Fy_0 - \frac{8\mu\lambda g}{\ell} \left( \frac{\ell^3}{48} - \frac{\ell s_0^2}{4} + \frac{s_0^3}{3} \right) \right] \quad (A7)$$

equação quártica que determinará  $s_0$  para cada  $F$  e  $y_0$ . Usando-se a variável  $s'_0$ , isto é  $s'_0 = s_0/\ell$ , e expressando  $F$  em termos de  $\mu\lambda g\ell$ ,  $F'$ ,

$$F' = F/\mu\lambda g\ell \quad (A8)$$

chega-se à equação

$$F' - 4s_0(1 - s'_0) = s'_0 \left[ F'y'_0 - 8 \left( \frac{1}{48} - \frac{s'^2_0}{4} + \frac{s'^3_0}{3} \right) \right] \quad (A9)$$

que determina  $s'_0$  até, eventualmente, atingir-se o valor 0,5. De fato, como vimos na Seção 5, se  $y'_0 \leq 1/6$ , o centro de rotação inercial estará no prolongamento da barra e a Eq. A9 cessa de valer. A partir de  $s'_0 = 0,5$  a força de atrito atinge seu valor máximo e está em todos os pontos se opondo ao movimento. Nesta situação o momento das forças de atrito em relação ao c.m. se anula. Pondo-se  $M_{CMA} = 0$  e  $F'_A = 1$ , valor máximo,

nas Eq. A1 e A4 tem-se

$$s'_0 = \frac{F' - 1}{12F'y'_0} \quad (A10)$$

válida para  $s'_0 > 1/2$ . As curvas correspondentes a  $y'_0 = 0,05$  e  $0,10$  na Fig. 7 espelham este comportamento para  $s'_0 > 1/2$  e vê-se também que para  $F'$  grande suficientemente reobtem-se o valor inercial para  $s'_0$  (Eq. 21).