

Singularidades Nuas e a Precessão das Órbitas Elípticas

Robson Leone Evangelista e Júlio César Fabris

*Universidade Federal do Espírito Santo
29060-900, Goiabeiras, Vitória, ES, Brasil*

Trabalho recebido em 13 de dezembro de 1994

Resumo

O estudo de Singularidades Nuas adquiriu uma importância maior em Relatividade Geral devido à conjectura da Censura Cósmica. Neste artigo, expomos brevemente as noções básicas relativas aos conceitos de Singularidades Nuas e Censura Cósmica. Em seguida, utilizamos uma solução estática com simetria esférica das equações de Einstein acopladas a campos escalares, que exibe uma singularidade nua (sem entretanto constituir uma violação da Censura Cósmica), e analisamos, neste contexto, o problema das órbitas elípticas.

1. Introdução

Uma singularidade é um ponto do espaço onde as leis da Física deixam de fazer sentido. Nesse ponto, quantidades físicas mensuráveis (como temperatura, densidade, etc.) podem atingir valores infinitos. Ora, um estado físico onde tais quantidades assumem valores indefinidamente grandes, não é suscetível de ser descrito por equações matemáticas. Na Física Clássica elementar, a existência de pontos singulares já é encontrada com uma certa frequência. Podemos pensar, por exemplo, na lei da gravitação newtoniana e na lei de Coulomb, da eletrostática: as expressões matemáticas que representam estas leis físicas divergem no ponto onde está localizada a fonte. Nesses casos a divergência simplesmente revela a impossibilidade de definir o campo gravitacional ou elétrico na posição ocupada pela própria fonte que os cria.

O problema de divergências nas equações físicas aparece nos mais diferentes contextos. Em Teoria Quântica de Campos, é uma das questões centrais e que motivou o desenvolvimento de uma matemática própria para contorná-la. Em Relatividade Geral, existem duas situações particularmente cruciais onde aparece o problema de singularidade: o problema com simetria esférica, seja no caso estático (solução de Schwarzschild), seja no caso do colapso gravitacional, e o

modelo do Big-Bang. No caso do colapso, temos uma singularidade futura, enquanto no modelo do Big-Bang, temos uma singularidade passada. De qualquer forma, a existência de tais singularidades no contexto da Relatividade Geral constitui um desafio teórico relevante: afinal, o que significa fisicamente uma singularidade, como compreendê-la e quais informações podemos extrair nessas circunstâncias extremas?

Nós pretendemos rever alguns aspectos essenciais do problema da singularidade no caso da solução clássica de Schwarzschild. Faremos isso na segunda seção desse artigo. Tal revisão, mesmo que breve e incompleta[1], constitui uma oportunidade para introduzir a noção de horizonte-evento, o que conduz à idéia do Buraco Negro, preparando assim o terreno para a análise do problema das órbitas elípticas que nos propomos a realizar mais adiante.

Em um artigo recente, foi apresentada uma solução estática com simetria esférica que exibe uma Singularidade Nua [2]. Ela é obtida em um contexto bastante diferente do habitual da Relatividade Geral, uma vez que o modelo de base apresenta a gravitação acoplada de uma forma muito peculiar a dois campos escalares. Esse modelo deriva de uma teoria mais fundamental, formulada à cinco dimensões, onde a quinta dimensão (uma dimensão extra em relação às quatro conhecidas) é de

natureza temporal. Essa solução é fundamentalmente diferente da solução clássica de Schwarzschild visto que não exibe um horizonte-evento.

Na terceira seção, recordaremos as principais características desta solução, e a testaremos, nas seções quatro e cinco, no caso de um dos problemas clássicos da Gravitacão: a precessão das órbitas elípticas. Veremos que, apesar desta solução corresponder a um espaço fortemente curvo, a precessão prevista é nula. Discutiremos este resultado na última seção deste trabalho.

2. A Solução de Schwarzschild

A primeira solução exata das equações de Einstein refere-se ao problema estático com simetria esférica no vácuo, e foi obtida por K. Schwarzschild em 1916. Nesse problema, admite-se que a métrica, que estabelece a distância espaço-temporal entre dois eventos infinitesimalmente próximos, tem a forma[3]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad . \quad (1)$$

A e B são funções unicamente da distância à origem, onde está localizada a fonte do campo gravitacional. Poderíamos admitir que essas funções dependessem também do tempo t ; entretanto, pelo teorema de Birkhoff, toda métrica esfericamente simétrica, no vácuo, em Relatividade Geral, é necessariamente estática, razão pela qual podemos, sem nenhuma perda de generalidade, nos restringir à forma para a métrica dada por (1).

Se inserirmos a expressão acima nas equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad , \quad (2)$$

onde $R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\sigma\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho}$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$, obtemos as seguintes soluções para A e B :

$$B = A^{-1} = 1 - 2\frac{GM}{c^2 r} \quad , \quad (3)$$

onde associamos M à massa, localizada na origem, que cria o campo gravitacional, sendo r a distância à origem.

Observamos que, na equação (3), parecem existir duas singularidades: uma para $r = 0$ e outra para $r = 2\frac{GM}{c^2}$. Um aspecto fundamental, que demorou um certo tempo a ser compreendido, é que, na verdade, existe apenas a singularidade em $r = 0$; a outra singularidade é um efeito da escolha do sistema de coordenadas. Em especial, os invariantes geométricos são

regulares em $r = 2\frac{GM}{c^2}$. Isto pode ser melhor compreendido reescrevendo a expressão acima nas coordenadas de Kruskal[4]. Neste caso, torna-se claro que o que existe em $r = 2\frac{GM}{c^2}$ é um *Horizonte Evento*: todos os eventos que estão no interior desta distância, não serão acessíveis a um observador que esteja a $r > 2\frac{GM}{c^2}$. A noção de Buraco Negro está diretamente associada à existência de uma singularidade que esteja “coberta” por um horizonte-evento. Assim, o Buraco Negro se caracteriza não apenas pela presença de uma singularidade no espaço-tempo, mas também pelo fato de seu interior $r < 2\frac{GM}{c^2}$ não ser acessível à observação. Se existir uma singularidade do tipo descrito em $r = 0$ acima que não esteja coberta por um horizonte-evento, então estamos em presença de uma Singularidade Nua, uma singularidade acessível à observação.

A presença deste horizonte-evento na solução de Schwarzschild pode, de uma certa forma, ser comprovada se analisarmos o tempo gasto por um raio luminoso, emitido na origem, para alcançar a distância $r = 2\frac{GM}{c^2}$. Neste caso, escrevemos,

$$B(r)dt^2 - A(r)dr^2 = 0 \quad , \quad (4)$$

o que conduz a

$$t = \pm \int_0^r \frac{dr'}{1 - 2\frac{GM}{c^2 r'}} \quad (5)$$

cuja solução é,

$$t = \pm \left(r - 2\frac{GM}{c^2} \right) \pm \ln \left(r - 2\frac{GM}{c^2} \right)^{2\frac{GM}{c^2}} \quad (6)$$

que diverge para $r = 2\frac{GM}{c^2}$.

A conjectura da *Censura Cósmica*[5] estabelece precisamente que toda singularidade em Relatividade Geral se apresenta “coberta” por um horizonte-evento. Visto que não foi ainda possível demonstrar esta conjectura, convertendo-a em um teorema, a busca de contra-exemplos é de grande importância. Entretanto, é preciso ter-se em mente, que a solução de Schwarzschild é estática e válida no vácuo: ao se analisar o problema da Censura Cósmica, e a eventual existência de Singularidades Nusas, é preciso considerar o processo dinâmico de formação da singularidade[6]. A Censura Cósmica só será violada se surgir uma Singularidade Nua no processo dinâmico (não estático) do colapso gravitacional. A existência de uma solução com simetria

esférica, que não contenha um horizonte-evento, mesmo que ainda apresentando uma singularidade na origem, não basta por si só para caracterizar a violação da Censura Cósmica.

3. Solução com Singularidade Nua

Em geral, o acoplamento das equações de Einstein a um campo escalar não traz muitas modificações à solução envolvendo simetria esférica analisada anteriormente. Entretanto, em alguns casos específicos, podemos obter um comportamento completamente diferente. É o caso quando consideramos a gravitação acoplada a dois campos escalares, Φ e Ψ , que se acoplam não trivialmente entre si [2].

Especificamente nós aplicamos a métrica (1) às equações de Einstein acopladas aos dois campos escalares:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{3}{2\Phi^2}(\Psi_{;\mu}\Psi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Psi_{;\rho}\Psi^{;\rho}) + \frac{1}{\Phi}(\Phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square\Phi) \quad , \quad (7)$$

$$\square\Phi - \frac{\Psi^{;\rho}\Psi_{;\rho}}{\Phi} = 0 \quad , \quad (8)$$

$$\square\Psi - \frac{\Phi_{;\rho}\Psi^{;\rho}}{\Phi} = 0 \quad . \quad (9)$$

Não desenvolveremos aqui os detalhes técnicos do processo de escrever as equações diferenciais para $A(r)$ e $B(r)$, e resolvê-las. Tais detalhes podem ser obtidos na referência [2]. As soluções para as funções métricas são:

$$A(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^{\pm 2} \quad , \quad (10)$$

$$B(x) = \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^{\pm 2} \quad , \quad (11)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{B(x)} \quad , \quad (12)$$

$$\Psi' = \Psi_0 \frac{\Phi}{r^2} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (13)$$

onde $x = \frac{r}{k}$ e k é uma constante de integração. A respeito da expressão (12), nota-se que a função Φ representa a componente métrica da dimensão interna, que

tem caráter temporal, ao passo que B é a componente métrica da dimensão tempo “externa”. Essa constante pode ser fixada através do limite newtoniano

$$B(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 - 2\frac{GM}{c^2 r} \quad . \quad (14)$$

Este limite nos fornece $k = \frac{GM}{c^2}$.

Para nos convenceremos que esta solução representa uma singularidade nua, escrevamos a expressão do tempo gasto por um fóton emitido radialmente a partir de $x = 0$. Utilizando (4) e (10, 11), obtemos para os expoentes positivo e negativo, respectivamente,

$$t = k(\sqrt{1+x^2} - 1) \quad , \quad (15)$$

$$t = \sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^2) \quad , \quad (16)$$

de onde podemos ver que esse fóton atinge qualquer distância finita da origem em um tempo finito: não há conseqüentemente um horizonte-evento relacionado ao espaço-tempo descrito por (10,11). Entretanto, existe uma singularidade em $r = 0$ como pode ser visto em (10,11). É claro que podemos estar diante apenas de um efeito de coordenadas: para nos assegurarmos da existência de uma singularidade em $r = 0$ devemos estudar os invariantes de curvatura, que são independentes do sistema de coordenadas utilizado. A partir de (7,8,9), podemos calcular o o escalar de Ricci R . Obtemos,

$$R = \frac{3}{2} \left(\frac{\Psi}{\Phi} \right)^2 . \quad (17)$$

Introduzindo no segundo membro as soluções para Ψ e Φ , podemos facilmente ver que R diverge em $r = 0$. A singularidade em $r = 0$ é física.

A análise da trajetória do fóton, com a ausência de um horizonte-evento, mostra que se trata de uma *Singularidade Nua*. Entretanto, visto que a métrica é estática, essa solução não constitui uma violação da Censura Cósmica.

4. A Precessão das Órbitas Elípticas

Vamos analisar agora uma consequência física da solução estática e simetricamente esférica determinada na referência [2]. Especificamente, vamos considerar o caso da precessão das órbitas elípticas. Seguiremos o método empregado por Straumann[7], utilizando o fato que uma partícula-teste segue uma geodésica. Esse procedimento é igualmente legítimo no presente caso: se introduzirmos matéria no nosso modelo, acoplando-a ao nível do lagrangiano, podemos ver que o tensor momento-energia se conserva. A equação da geodésica é então obtida da mesma maneira que na Relatividade Geral. Neste caso, nós estamos procedendo de uma forma inteiramente análoga ao da teoria de Brans-Dicke que é como um protótipo de teorias escalares tensoriais.

Assim, escrevemos o lagrangeano associado à partícula em um campo gravitacional

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu , \quad (18)$$

onde a derivação é relativa a um parâmetro invariante λ , que pode ser, por exemplo, o tempo próprio da

partícula. Usando a métrica (1), este lagrangeano se reduz a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (B\dot{t})^2 - A(\dot{r})^2 - r^2(\dot{\theta})^2 - r^2 \sin^2\theta(\dot{\phi})^2 . \quad (19)$$

Usando o princípio variacional podemos obter as equações para t , r , θ e ϕ . Entretanto, nós podemos fazer, sem nenhuma perda de generalidade, $\theta = \frac{\pi}{2}$, visto que o movimento está contido em um plano. Além disso, as variáveis t e ϕ são cíclicas. Assim, obtemos,

$$r^2 \dot{\phi} = \frac{L}{M} = cte , \quad (20)$$

$$B\dot{t} = \frac{E}{M} = cte . \quad (21)$$

Deste modo, impondo que o lagrangeano deve ser constante ao longo da trajetória (visto que sua variação é nula neste caso), ficamos com uma única equação para a variável r :

$$\dot{r}^2 + \frac{1}{A} \left(1 + \left(\frac{L}{Mr} \right)^2 \right) = \frac{E^2}{ABM^2} . \quad (22)$$

Introduzindo a mudança de variável de $t \rightarrow \phi$, de tal forma que

$$\dot{r} = r' \dot{\phi} = \frac{L}{Mr^2} r' \quad (23)$$

onde L é o momento angular total definido a partir de (20) podemos reescrever a equação (22) como,

$$\left(\frac{L}{Mr^2} \right)^2 r'^2 + \frac{1}{A} \left(c^2 + \left(\frac{L}{rM} \right)^2 \right) = \frac{E^2}{BAM^2 c^2} . \quad (24)$$

Definindo $u = \frac{1}{r}$ e substituindo em (24), obtemos finalmente,

$$\left(\frac{L}{M} \right)^2 u'^2 + \frac{1}{A} \left(c^2 + \left(\frac{Lu}{M} \right)^2 \right) = \frac{E^2}{BAM^2 c^2} . \quad (25)$$

A equação (25) não admite solução exata para o caso em que empregamos as funções A e B da métrica de Schwarzschild, e tampouco para o caso em que empregamos as soluções (10,11). Assim, nós vamos procurar uma solução aproximada. Estamos interessados no caso em que k é pequeno; conseqüentemente, neste limite, x é grande. Esta aproximação é justificada pelo fato de k estar diretamente ligado ao termo $\frac{GM}{c^2}$. Para esta situação podemos fazer uma expansão em série das funções A e B dadas por (10,11). Fazendo esta expansão, obtemos

$$A \simeq 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} , \quad (26)$$

$$B \simeq 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} . \quad (27)$$

O limite newtoniano nos leva a $k = \frac{GM}{c^2}$. Introduzindo a expansão acima em (25), derivando a expressão resultante em relação a ϕ obtemos a seguinte equação diferencial para u :

$$u'' + \left(1 - 6\frac{G^2M^4}{L^2c^2}\right)u = G\frac{M^3}{L^2} - 3\frac{GM}{c^2}u^2 \quad , \quad (28)$$

onde retivemos os termos até ordem $\frac{1}{c^2}$.

A equação (28) difere da sua equivalente em Relatividade Geral, na mesma ordem em $\frac{1}{c^2}$, pela presença do termo $-\frac{6G^2M^4}{L^2c^2}$ no coeficiente do termo linear em u e pelo sinal do termo não linear no segundo membro.

A equação (28) é não linear em u . Procuraremos então uma solução aproximada, resolvendo inicialmente a parte linear, substituindo o resultado no termo não linear, e buscando por fim uma solução para a equação linear e não-homogênea resultante. A solução da parte linear é

$$u = \frac{1}{P} \left(1 + e \cos(\alpha\theta)\right) \quad , \quad (29)$$

onde $P = \frac{L^2}{GM^3\alpha^2}$, e é a excentricidade da órbita e $\alpha = \sqrt{1 - 6\frac{G^2M^4}{L^2c^2}}$. Essa solução representa uma elipse girante. Entretanto, nós podemos observar que o parâmetro α pode ser expandido em série, fornecendo,

$$\alpha = 1 - 3\frac{G^2M^4}{L^2c^2} \quad . \quad (30)$$

Reinserindo (30) em (29), obtemos uma elipse girante no sentido do movimento do planeta, com o mesmo valor que o previsto pela Relatividade Geral:

$$\Delta\phi = 6\pi\frac{G^2M^4}{L^2c^2} \quad . \quad (31)$$

Para obtermos a solução completa até ordem $\frac{1}{c^2}$, nós introduzimos a solução da parte linear, encontrada anteriormente, no termo não-linear em u da equação (28). Obtemos assim uma equação linear, mas não homogênea:

$$u'' + \alpha^2u = \frac{GM^3}{L^2} - 3\frac{GM}{c^2P^2} - 6\frac{GM}{c^2P^2}e\cos\alpha\phi - 3\frac{GM}{c^2P^2}e^2\cos^2\alpha\phi \quad . \quad (32)$$

Em primeira aproximação, podemos obter uma solução da equação não-linear somando (29) à solução da não-homogênea de (32). Uma vez que estamos interessados unicamente na questão da precessão das órbitas elípticas, apenas alguns termos de (32) terão importância para nós. De fato, o segundo membro de (32) contém um termo constante, um que depende de $\cos\alpha\phi$ e outro de $\cos2\alpha\phi$. A solução da parte não homogênea de (32) contém, conseqüentemente, um termo constante, uma combinação de $\phi\text{sen}\alpha\phi$, $\cos\alpha\phi$ e $\cos2\alpha\phi$. O termo constante implica numa correção dos parâmetros da órbita; o termo em $\cos2\alpha\phi$ é periódico e não contribui para o fenômeno da precessão. Unicamente o termo $\phi\text{sen}\alpha\phi$ constitui um termo acumulativo ao longo da trajetória e contribuirá diretamente para a precessão. Assim, retendo apenas os termos que nos interessam, escrevemos a solução da equação não linear, em pri-

meira aproximação, como

$$u \simeq \frac{1}{P} \left(e\cos\alpha\phi - \frac{3GM\epsilon}{\alpha c^2 P} \phi\text{sen}\alpha\phi \right) \quad . \quad (33)$$

Esta solução pode ser escrita, mantendo a aproximação em $\frac{1}{c^2}$ como

$$u \simeq \frac{\epsilon}{P} \cos\phi \quad . \quad (34)$$

Surpreendentemente, as duas contribuições para a precessão da órbita se cancelam de maneira que, até a ordem de aproximação considerada, inexistente a precessão do periélio quando a geometria que descreve o espaço-tempo é dada por (10,11).

O termo α existente no primeiro membro de (28) contribui para uma precessão que é igual à prevista pela Relatividade Geral, e no sentido do movimento orbital; mas o termo não linear no segundo membro fornece a mesma contribuição só que no sentido contrário ao do movimento orbital. Existe, assim, em (28) dois efeitos concorrentes, um implicando na precessão no sentido

do movimento orbital e outro no sentido contrário. Os dois são de mesma ordem e se cancelam.

5. As Órbitas Elípticas com o Potencial Newtoniano Modificado

No tratamento que nós demos anteriormente ao problema da precessão das órbitas elípticas, partimos de uma solução estática com simetria esférica em uma teoria relativística da gravitação, inserimos esta solução nas equações relativísticas de movimento e, realizando aproximações nas expressões resultantes, determinamos a órbita. Um outro enfoque possível, seria de, à partir das soluções das equações relativísticas, determinarmos o potencial newtoniano correspondente, identificando as correções em primeira ordem e, a partir daí, resolvermos as equações clássicas, newtonianas, do movimento. Neste caso, não estamos propriamente estudando o limite newtoniano do modelo original, mas sim analisando desde o início um problema puramente newtoniano, onde o potencial da gravitação não é mais o tradicional, e sim um outro "inspirado" no modelo relativístico.

Consideremos as equações newtonianas para um potencial que depende apenas de r . Admitiremos que o potencial que o potencial efetivo difere do tradicional newtoniano pela presença de um termo do tipo $\frac{1}{r^2}$. Se escrevermos o potencial efetivo como

$$V(r) = \frac{C}{r} + \frac{C'}{r^2} \quad , \quad (35)$$

e injetando-o nas equações do movimento

$$m\vec{a} = -m \frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad (36)$$

obtemos as seguintes equações diferenciais para as coordenadas esféricas r e ϕ :

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\left(\frac{C}{r^2} + 2\frac{C'}{r^3}\right) \quad ; \quad (37)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \quad . \quad (38)$$

Transformando as derivadas em relação a t em derivadas em relação a ϕ , definindo $u = \frac{1}{r}$ e eliminando $\dot{\phi}$ através da relação acima, obtemos a seguinte equação diferencial para u :

$$u'' + \left(1 - 2\frac{m^2 C'}{L^2}\right)u = \frac{m^2 C}{L^2} \quad , \quad (39)$$

cujas soluções em termos de r é:

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \alpha \phi} \quad (40)$$

onde $\alpha = \sqrt{1 - 2\frac{m^2 C'}{L^2}}$ e $P = \frac{m^2 C}{L^2 \alpha}$. Essa solução corresponde a uma elipse girante, com uma precessão dada por

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{m^2 C'}{L^2} \quad . \quad (41)$$

Para que esta precessão concorde com o resultado da Relatividade Geral, devemos ter $C' = 3\frac{G^2 M^2}{c^2}$.

O potencial newtoniano é obtido a partir da solução com simetria esférica da Relatividade Geral como primeira aproximação do termo em B da equação (1). Se utilizarmos a expansão (27), podemos escrever o potencial newtoniano para o nosso caso, com uma correção em $\frac{1}{c^2}$. Como $k = \frac{GM}{c^2}$, obtemos $C = GM$ e $C' = -\frac{G^2 M^2}{c^2}$. Utilizando as equações newtonianas do movimento e o potencial newtoniano modificado previsto pelo nosso modelo, temos uma elipse que gira no sentido contrário ao movimento orbital, com um valor que é um terço do observado.

6. Conclusão

A existência de Singularidades Nuas, singularidades que não seriam cobertas por um horizonte-evento, é proibida pela Censura Cósmica. Entretanto, a Censura Cósmica continua sendo uma conjectura e não um teorema matemático. Assim, a busca de uma violação desta conjectura continua sendo de grande interesse. A violação da Censura Cósmica ocorreria se, num processo dinâmico de colapso gravitacional, uma singularidade se formasse sem que ela fosse coberta por um horizonte-evento. Em certos casos, é possível obter Singularidades Nuas considerando problemas com simetria esférica mas estáticos. Mesmo que estes casos não cheguem a constituir uma violação da Censura Cósmica, eles constituem soluções interessantes que podem nos trazer algumas informações sobre as propriedades das Singularidades Nuas no caso mais geral, não estático.

Neste trabalho procuramos analisar a solução estática com simetria esférica obtida por Baptista, Baptista e Fabris[2] para o caso em que a gravitação está acoplada a dois campos escalares. Essa solução exibe uma Singularidade Nua, sendo por outro lado estática. Um raio de luz emitido a partir da origem, onde há uma singularidade, atinge qualquer ponto do espaço-tempo em um tempo finito. Poderíamos dizer, de certa forma, que o horizonte-evento para esta solução se localiza no infinito. A solução possui um limite newtoniano bem definido, prevendo correções ao potencial newtoniano tradicional em ordens crescentes de $\frac{1}{c^2}$.

Nossa análise se restringiu às consequências de tal solução para o problema das órbitas elípticas. Fizemos esta análise em duas circunstâncias: na primeira, utilizamos as equações relativísticas do movimento; na segunda, determinamos o potencial newtoniano corrigido em primeira ordem em $\frac{1}{c^2}$ e utilizamos as equações não relativísticas do movimento.

A referida solução possui uma constante de integração, k , que está associada a $\frac{GM}{c^2}$. O limite newtoniano impõe que k seja positivo. Constatamos a existência de dois efeitos concorrentes, um implicando numa precessão no sentido do movimento orbital e outro no sentido contrário. Os dois efeitos são de mesma ordem, resultando em uma órbita elíptica que não precessa. Para o caso em que utilizamos as equações newtonianas do movimento e k positivo, o valor da precessão é um terço do observado (se considerarmos a órbita de Mercúrio) mas no sentido contrário ao do movimento orbital.

Mesmo que os resultados não conduzam ao que a observação revela, notamos que o modelo original, de onde esta solução foi extraída, deve se aplicar ao regime de energias extremamente altas. Mas o fato que a nossa análise explicitou a existência de fenômenos concorrentes, revela a complexidade desta solução. Notamos sobretudo que esta solução corresponde a uma variedade Riemanniana fortemente curva. Entretanto, seu efeito gravitacional no que diz respeito ao problema das órbitas elípticas é idêntico ao newtoniano, o que era

completamente inesperado.

O problema da existência e natureza de singularidades em Relatividade Geral é de grande importância, e constitui um dos principais pontos de debate atualmente. Muito embora, o estudo teórico da estrutura destas singularidades esteja em franca expansão (basta observar a grande quantidade de publicações sobre os buracos negros, muitos versando sobre a estrutura interna de tais objetos), existem divergências profundas sobre a real existência de estruturas singulares no Universo. Afinal, os buracos negros continuam não sendo um verdadeiro e incontestável objeto astronômico. Questões como a da existência ou não de singularidades no espaço-tempo e da presença de um horizonte-evento em torno dessas singularidades, permanecem, no sentido estrito, em aberto.

Agradecimentos

Beneficiamos de valiosas discussões, ao longo deste trabalho, com J.P. Baptista, A.B. Batista, L.E. Ferracioli da Silva e Philippe Tournenc. Contamos também com apoio financeiro do CNPq.

References

- [1] S. Hawking, G.R.F. Ellis, **The Large Scale Structure of Space-Time**, Cambridge University Press, Cambridge(1973);
- [2] J.P. Baptista, A.B. Batista e J.C. Fabris, *Int. J. Mod. Phys.* **D2**, 431(1993);
- [3] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology**, Wiley, New York(1972);
- [4] R. Wald, **General Relativity**, Chicago University Press, Chicago(1984);
- [5] C.J.S. Clarke, *Class. Quant. Grav.***10**, 1375(1993);
- [6] P.S. Joshi e I.H. Dwivedi, *Phys. Rev.* **D47**, 5357(1993);
- [7] N. Straumann, **General Relativity and Relativistic Astrophysics**, Springer-Verlag, Berlin(1991).