

# Ótica de Campo Próximo e Super-Resolução à Luz do Critério de Rayleigh e do Princípio da Incerteza de Heisenberg

(Near-field optic and super-resolution under light of the Rayleigh criterion and the Heisenberg uncertainty principle)

Francisco E. G. Guimarães

*Instituto de Física de São Carlos - USP*  
*CP 369 - 13560.970 - São Carlos - SP- Brasil*

Trabalho recebido em 30 de março de 1996

## Resumo

Até pouco tempo era amplamente aceito que os efeitos de difração representavam um limite fundamental na resolução de um sistema ótico. Acreditava-se que a obtenção de resolução além do limite clássico de difração (critério de Rayleigh) era uma tarefa praticamente impossível. Trabalhos mais recentes mostram que, com o conceito e as propriedades do campo próximo, é possível explorar a superfície de um objeto iluminado a distâncias muito pequenas e com isto reconstruir imagens com resolução ótica além desse limite. Este trabalho descreve as principais características do campo próximo e desta nova metodologia. Uma vez ultrapassado este limite de difração, o presente trabalho explora o mecanismo desta super-resolução à luz do princípio da incerteza de Heisenberg.

## Abstract

Until rather recently it has been widely accepted that diffraction effects represent a fundamental limit to optical system performance. It was believed to be a hopeless task to resolve beyond the classical diffraction limit (Rayleigh criterion). However, more recent works have shown that, with the concept and properties of the near field, it is possible to explore the surface of an illuminated object at very short distances and reconstruct its image with resolution beyond such limit. This work describes the main characteristics of near field and of this super-resolution. Emphasis will be given on some fundamental aspects of this new concept under the light of the Rayleigh criterion and the Heisenberg principle.

## 1. Introdução

Apesar de ser bem conhecido há quase um século, o conceito de campos não radiativos ou próximos vem sendo intensamente pesquisado atualmente devido à grande possibilidade de aplicação na microscopia de alta resolução, espectroscopia e nas áreas que envolvem a modificação local da estrutura superficial<sup>[1]</sup>. O desenvolvimento e uso de microscópios de campo próximo encontraram um grande campo de aplicação que vai desde problemas básicos na física de estado sólido, passando por semicondutores, polímeros, até às questões

fundamentais na biologia e na medicina<sup>[2,3]</sup>. Neste campo fica sempre uma pergunta no ar no que se refere à capacidade de resolução desta nova técnica. Esta foi a direção tomada neste trabalho: o novo conceito de super-resolução ótica envolvendo campo próximo e formação de imagens são introduzidos e analisados sob o ponto de vista do critério de Rayleigh e do princípio da incerteza de Heisenberg.

## 2. Conceitos e Propriedades Gerais

Segundo a física clássica, as grandezas de um determinado sistema podem ser acessadas, a princípio,

pelos métodos de medida, com a precisão limitada apenas pela habilidade do experimentador. Deste modo, se nos propusermos a inferir a origem ou o ponto de emissão de um fóton (um átomo, por exemplo), bastaria, então, conhecermos diretamente os estados de energia (espectro), de momento (direção) e polarização (campos) deste fóton em um dado ponto do espaço. Deste modo, a relação entre objeto e imagem seria feita univocamente pelos *campos propagantes* responsáveis pela transmissão da informação. Este método nos permitiria obter, então, uma imagem ótica local do sub-mundo atômico, o que resolveria um dos mais antigos sonhos da humanidade desde a invenção do microscópio ótico pelo holandês Leuwenhook (1632-1723).

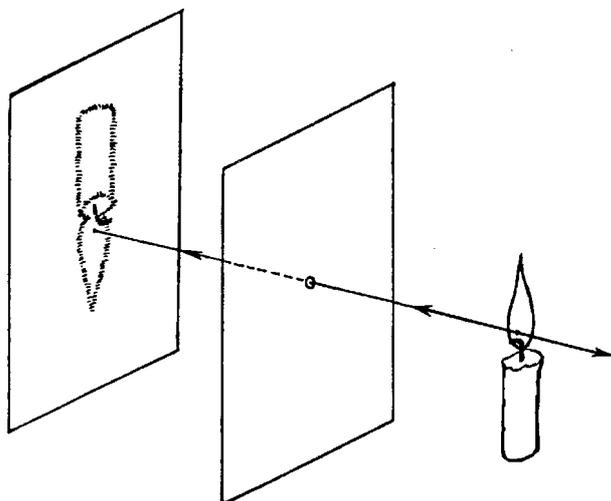


Figura 1: Exemplo mais simples de um sistema ótico: a câmera escura de orifício.

Sabemos, no entanto, que existem dificuldades fundamentais que limitam a resolução ótica do mundo submicroscópico. A primeira dificuldade já é conhecida há mais de um século: é que sempre precisamos de um sistema ótico entre o objeto e a imagem que recolha a informação e a projete em um determinado detetor. O exemplo mais simples deste sistema ótico é a câmera de orifício, figura 1. Um sistema ótico, por mais perfeito que seja, é limitado espacialmente (abertura) e por isto funciona como um filtro de frequências espaciais “*passa-baixa*” dos campos propagantes, delimitando assim o espectro de informação provindo do objeto<sup>[4]</sup>. Foi o cientista alemão Ernest Abbe (1873) que pela primeira vez compilou estes conceitos de um modo equivalente em termos de uma teoria de difração da luz, determinando, assim, o limite de resolução de um dado

instrumento ótico. Um pouco mais tarde Lord Rayleigh (1896), levando em consideração os efeitos de difração, expressou este limite de modo mais conciso pela inequação

$$\Delta x \geq \frac{1,22}{2n \sin \theta} \quad (1)$$

conhecida por *critério de resolução de Rayleigh*. Ela estipula que dois objetos pontuais serão vistos separadamente se a distância  $\Delta x$  entre eles for maior ou igual a relação entre o comprimento de onda  $\lambda$  do feixe luminoso, o índice de refração  $n$  do meio e o semi-ângulo de abertura  $\theta$  da lente objetiva usada para coletar e focalizar o feixe luminoso sobre o detetor. Sabe-se pela experiência ao longo dos anos que mudanças destes parâmetros nos sistemas óticos (menor  $\lambda$ , maior  $n$  e/ou  $\theta$ ) resultaram em um pequeno aumento da resolução (menor  $\Delta x$ ). Em geral, toma-se o limite inferior da relação (1) como  $\Delta x = \lambda/2$  [3], sendo da ordem de 300 nm para luz visível ( $\lambda=600$  nm).

Como vimos acima, estamos acostumados a utilizar métodos óticos que possuem uma dada abertura e que detetam ondas propagantes de um objeto para obter a sua imagem. Esta metodologia vem sendo utilizada há séculos e até pouco tempo acreditava-se que a obtenção de resolução além do limite clássico de difração era uma tarefa praticamente impossível. No entanto, um novo método baseado no conceito de *campo próximo* (ver seção 3.) tem demonstrado, recentemente, que é possível obter resolução ótica além do limite de difração. De acordo com este novo método, se conseguirmos detetar estes campos próximos não propagantes na superfície do objeto, poderemos contornar a difração, que é um fenômeno estritamente ondulatório dos campos espaciais. Com este procedimento, ou seja, através da captação de informação na região de campos próximos, uma resolução ótica abaixo do limite de Rayleigh pode ser obtida.

No entanto, a existência de campos não radiativos já é bem conhecida há quase um século (na realidade eles são deduzidos diretamente das Equações de Maxwell<sup>[5]</sup>). Em 1928, Syngé<sup>[6]</sup> propôs este esquema para suplantar o limite de difração na microscopia ótica, mas só depois de 40 anos é que Ash e Nicholls<sup>[7]</sup> demonstraram experimentalmente com microondas uma resolução de  $\lambda/60$ . Mas somente há 10 anos, com os

recursos de rastreamento fino dos microscópios de tunelamento (STM), é que se foi possível obter super-resolução ótica e imagem do mundo em escalas nanométricas<sup>[8]</sup>. Uma vez suplantada a dificuldade fundamental imposta pelo limite clássico de Rayleigh, resta agora analisar a super-resolução destes sistemas óticos sob o ponto de vista de outro aspecto fundamental que é o princípio da incerteza de Heisenberg. Esta será a abordagem final deste trabalho. Antes disso, consideraremos os conceitos de campo próximo e limites impostos pela difração na formação de imagens de um dado objeto.

### 3. Do “Walkman” ao Campo Próximo

Quem já teve a oportunidade de ouvir um concerto sinfônico ou de jazz através do fone de ouvido de um “walkman” deveria ter ficado espantado com o que estava ouvindo: música em uma região de contra baixo de 100 Hz corresponde a um comprimento de onda de 3 metros! Geralmente, a reprodução musical na faixa de frequência até 500 Hz é feita por alto-falantes, conhecidos como “woofers”, de 25 a 30 cm de diâmetro. Isto se deve à grande quantidade de ar que deve ser movida para transmitir sinais de grandes comprimentos de onda. Além disso, como o critério de Rayleigh vale para todas as ondas, também é aplicado às ondas sonoras, ou seja, a resolução acústica de uma onda de 3 m é 1,5 m ( $=\lambda/2$ ). Deste modo, não deveria fazer nenhuma diferença se o fone de ouvido se situar diretamente sobre o ouvido ou deslocado de 1 cm. Mas a experiência pessoal mostra que a apreciação musical para o fone deslocado é diferente e ao mesmo tempo pior, e o nosso primeiro reflexo é o de voltar o fone à situação original, próxima ao ouvido. Isto demonstra que conseguimos situar perfeitamente o local do fone com uma precisão de pelo menos 1 cm =  $\lambda/300$ , muito abaixo do previsto pelo limite de resolução estipulado por Abbe e Rayleigh. Existe ainda algo mais interessante neste experimento do “walkman”. Chegue perto de um ouvinte entusiástico e você perceberá que a música tocada é quase que totalmente ininteligível. Pode-se perceber apenas os tons mais altos, mas não os baixos, por que? Fones de ouvido são placas metálicas que funcionam como dipolos emissores de ondas acústicas e uma compressão à frente da placa corresponde a uma rarefação

do lado de trás. Ou seja, a onda emitida pela frente é defasada de 180° da emitida por trás. Isto significa que as ondas de baixas frequências serão automaticamente curto-circuitadas na região de  $\lambda/2$  por causa do fluxo de ar da frente para trás ou vice-versa, mas não para as altas frequências, pois o ar não teria tempo de contornar o fone. Isto tudo demonstra que o campo sonoro próximo se compõe diferentemente do campo distante. Existe uma componente próxima não propagante e outra componente distante que se propaga. Como experimentamos com o “walkman”, apenas na componente próxima, ou mais precisamente, no campo próximo, está contida toda a informação. O que nós experimentamos no caso do “walkman” vale também para outros sistemas.

No caso de uma minúscula fonte de radiação localizada no espaço, tal como uma lâmpada distante, podemos abordá-la como se fosse um dipolo oscilante com momento de dipolo  $\mathbf{p}$ , localizado na origem  $O$  (figura 2). De acordo com a teoria eletromagnética<sup>[5]</sup>, os campos produzidos pelo dipolo elétrico, aparte a dependência temporal, são

$$\mathbf{B} = k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right)$$

$$\mathbf{E} = k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} \quad (2)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário na direção do raio vetor. De acordo com (2) existem duas regiões limites de interesse: uma zona de campos próximos não propagantes ( $kr \ll 1$  ou  $r \ll \lambda/2\pi$ ) e outra zona de campos distantes radiativos ( $kr \gg 1$  ou  $r \gg \lambda/2\pi$ ).

Na zona de campos distantes (em que os termos  $r^{-2}$  e  $r^{-3}$  são desprezíveis) os campos são transversos ao raio vetor e decaem como  $r^{-1}$ , ou seja, os campos do dipolo podem ser aproximados por

$$\mathbf{B} = k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{n}, \quad (3)$$

onde o termo  $e^{ikr}/r$  representa o comportamento típico de campos radiativos ou propagantes.

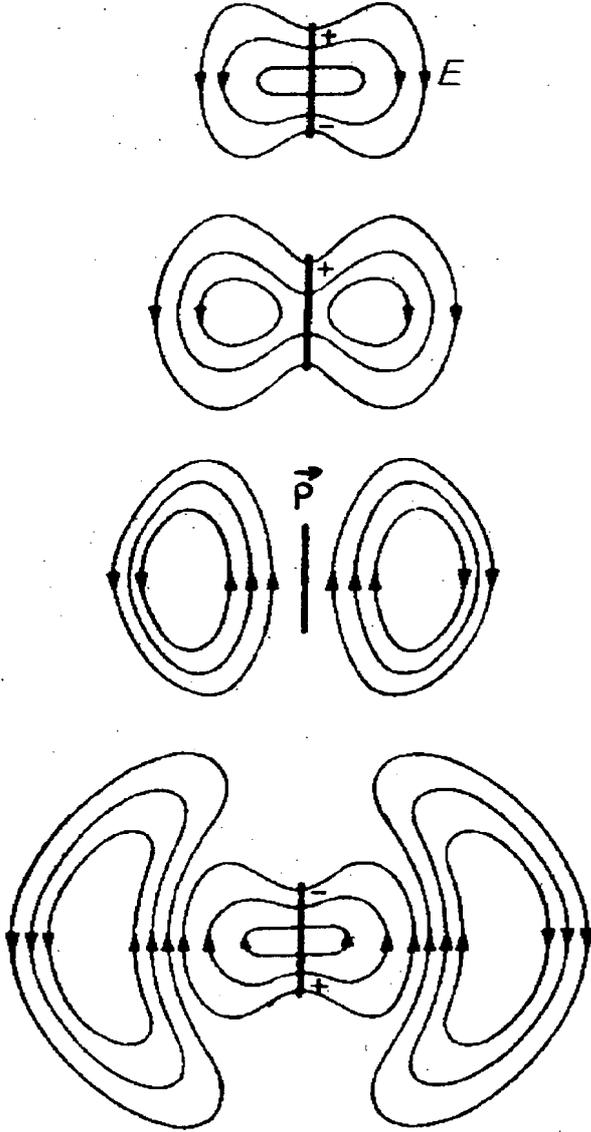


Figura 2: Representação esquemática de um dipolo oscilante.

Na zona de campo próximo, por outro lado, os campos possuem a forma limite de

$$\mathbf{B} = ik(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{1}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \frac{1}{r^3}, \quad (4)$$

sendo estes equivalentes a um campo de dipolo estático. O campo de indução magnética é menor do que o campo elétrico por um fator  $kr$ , mostrando que a região de campo próximo ( $kr \ll 1$  ou  $r \ll \lambda/2\pi$ ) é predominantemente de natureza elétrica. Observa-se que, da equação (2) e (3), apenas o termo do campo em  $r^{-1}$  contribui para a transferência de energia. Os termos dependendo de  $r^{-2}$  e  $r^{-3}$  são estritamente não radiativos

(apesar de serem oscilantes no tempo) e são omitidos geralmente nos problemas envolvendo a detecção do campo distante. Isto quer dizer que, ao detetarmos o campo distante, perdemos a informação dos campos próximos. Estes campos é que definem a configuração de corrente e carga que determinam o dipolo<sup>[9]</sup>. Na verdade, sem os campos próximos nenhuma informação contida no limite  $r \ll \lambda/2\pi$  pode ser transferida pelos campos propagantes. Isto é equivalente ao critério de Rayleigh, ou seja, o dipolo será resolvido como uma esfera de raio aproximadamente  $\lambda/2$ . É exatamente o que acontece quando observamos o dipolo a grandes distâncias, ou seja, a detecção clássica dos campos distantes é limitada em bandas de frequência (ver seção 4.). Como exemplo, seja um dipolo emitindo no comprimento de onda de 632 nanômetros. Para se detetar o campo próximo,  $r$  tem que ser menor que 100 nanômetros.

#### 4. Generalização para objetos mais complicados: Teoria da Difração

O exemplo anterior do dipolo corresponde a uma abordagem discreta da matéria e a teoria eletromagnética clássica fornece uma expressão geral para o campo em termos do inverso da potência da distância do objeto. Nesta abordagem, os campos próximos e distantes são simplesmente um caso limite da fórmula geral (2). No entanto, estamos interessados em obter informação local de objetos que possuem uma dada extensão espacial. Deste modo, a análise anterior pode ser estendida a objetos mais complicados se assumirmos que estes são compostos de dipolos elementares oscilantes<sup>[10]</sup>. Basta, então, generalizar a análise anterior através da integração sobre todo o espaço contendo os dipolos. A maneira mais simples de abordar o problema consiste em considerar os campos gerados como uma configuração espacial macroscópica e contínua determinada pela superposição dos campos de cada dipolo. Se estamos distantes do objeto, a informação local é transmitida por campos radiativos (campos distantes). Neste caso, fenômenos de difração se tornam importantes devido à extensão espacial do objeto e a natureza ondulatória da luz. Para tratar este problema, utiliza-se um método muito usado pelos físicos da área de ótica, que aplica a teoria de difração e analisa os campos em termos do espectro angular (análise de Fourier).

Um exemplo seria tratar a difração da luz por uma pequena abertura e considerar o campo difratado como a superposição de ondas planas elementares, em que a amplitude e o vetor de onda dependem da forma da abertura<sup>[4]</sup>.

#### 4.1. Difração da Luz

Considere no ponto Q uma fonte pontual de luz (coerente, por simplicidade) iluminando um objeto limitado espacialmente, do qual queremos obter informação de sua estrutura superficial local (figura 3). Esta luz pode ser em parte transmitida ou refletida (espalhada) na superfície do objeto. Nesta interação, pode-se pensar que os campos incidentes induzem dipolos que oscilam com uma fase definida relativa à onda incidente e irradia energia em outras direções. Esta abordagem é equivalente às transições eletrônicas feitas por átomos excitados do objeto que emitem aleatoriamente fótons em todas as direções e que guardam entre si a mesma fase espacial. É importante evidenciar que estamos interessados aqui apenas no aspecto ondulatorio dos campos eletromagnéticos e não no seu caráter vetorial. Assim, se considerarmos que a fonte pontual está suficientemente distante do objeto, então a onda incidente pode ser aproximada por uma onda plana propagando na direção do vetor de onda  $\mathbf{k}_0$ . Num dado ponto  $P$  do objeto e no num tempo  $t$  a amplitude da onda incidente é descrita por

$$U_P(\mathbf{r}, t) = U_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{r}) - i\omega_0 t} \quad (5)$$

onde  $|\mathbf{k}_0| = 2\pi/\lambda_0 = \omega_0/c$ . Agora, permitimos que a onda incidente seja espalhada pelo material. Desta maneira, todo ponto  $P$  da superfície do material emite ondas eletromagnéticas (equação (2)), onde as amplitudes e fases, relativas à onda incidente, são determinadas por uma função densidade de espalhamento  $g(\mathbf{r})$ , dependente do material e da forma da interação envolvida. A função  $g(\mathbf{r})$  corresponde fisicamente, por exemplo, à refletância ou à transmitância na superfície do material. De acordo com (3), a onda espalhada observada em um ponto  $P_0$  distante do objeto ( $|\mathbf{R}' - \mathbf{r}| \gg \lambda/2\pi$ ) será uma onda esférica descrita por

$$U_{P_0}(\mathbf{r}, t) = U_P(\mathbf{r}, t) \cdot g(\mathbf{r}) \cdot \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}' - \mathbf{r})}}{|\mathbf{R}' - \mathbf{r}|}, \quad (6)$$

cuja amplitude e fase dependem da onda incidente  $U_P$  e do fator  $g(\mathbf{r})$  no ponto  $P$  do objeto. Uma vez que estamos observando a onda espalhada num ponto fixo  $P_0$ , temos que o seu vetor de onda  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{R}' - \mathbf{r}$  têm a mesma direção. Considerando grandes distâncias do objeto ( $|\mathbf{R}' - \mathbf{r}| \approx \mathbf{R}'$ ) e inserindo  $U_P$  em (6), podemos escrever  $U_{P_0}$  por

$$U_{P_0}(\mathbf{r}, t) = \frac{A_0}{R'} \cdot e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}'} e^{-i\omega_0 t} g(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}. \quad (7)$$

Se considerarmos que  $g(\mathbf{r})$  não depende do tempo, temos que a dependência temporal de  $U_{P_0}$  só contém frequência em  $\omega_0$ , ou seja, a energia é conservada e o espalhamento é elástico ( $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$ ). A amplitude total de espalhamento num ponto de observação  $P_0$  é dada pela integração sobre todo a região de espalhamento  $\mathbf{r}$  e vale

$$U_{P_0} \propto e^{-i\omega_0 t} \int g(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (8)$$

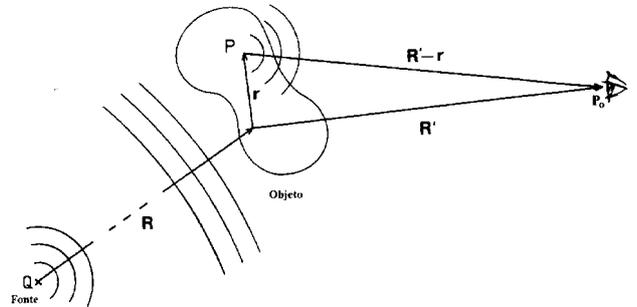


Figura 3: Ilustração esquemática do fenômeno de espalhamento da luz por um objeto, indicando os principais parâmetros envolvidos na derivação da cinética de espalhamento. Considera-se aqui que a fonte pontual de luz está muito afastada do objeto de modo que as ondas esféricas incidentes são consideradas planas na sua superfície.

Em um experimento de difração, não é a amplitude de espalhamento que é medida e sim a intensidade das ondas espalhadas:

$$I_{P_0}(\mathbf{k}_s) = |U_{P_0}|^2 \propto \left| \int g(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2. \quad (9)$$

Nesta equação introduzimos o vetor de espalhamento  $\mathbf{k}_s = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ . Observamos que a intensidade em  $P_0$  é proporcional ao módulo ao quadrado da transformada de Fourier da densidade de espalhamento  $g(\mathbf{r})$  com relação ao vetor de espalhamento  $\mathbf{k}_s$ . A onda plana

ao incidir sobre o objeto é espalhada em todas as componentes de Fourier que compõem o objeto através de  $g(\mathbf{r})$ . Isto equivale dizer que a onda incidente ao interagir com o objeto é desviada pelos vetores de onda de espalhamento  $\mathbf{k}_S$  disponíveis do objeto. Dizemos que  $I_{P_0}$  é a decomposição espectral no espaço  $\mathbf{k}_S$  da função de  $g(\mathbf{r})$ . Para um  $\mathbf{k}_0$  determinado (fixo) e para o espalhamento elástico em consideração, o vetor  $\mathbf{k}$  varia somente em direção de acordo com as direções de  $\mathbf{k}_S$ , sendo, portanto, um *vetor de onda espacial*, pois as ondas espalhadas serão encontradas dentro de um determinado ângulo sólido. Deste modo, o vetor de onda  $\mathbf{k}$  contém informação de uma determinada estrutura do objeto, no caso  $g(\mathbf{r})$ . Este experimento é equivalente ao espalhamento de raios-x por um sólido. A direção de  $\mathbf{k}$  pode ser descrita pelos cossenos diretores  $\alpha = k_x/k$ ,  $\beta = k_y/k$ , e  $\gamma = k_z/k$ , em que  $k = 2\pi/\lambda = |\mathbf{k}|$ , ou em termos das *freqüências espaciais*  $u = \alpha/\lambda$ ,  $v = \beta/\lambda$ , de modo que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 2\pi(ux + vy + wz), \quad (10)$$

em que  $x, y$  e  $z$  são os os vetores unitários na direção dos eixos de coordenadas. Podemos dizer então que  $g(\mathbf{r})$  e  $I(\mathbf{k}_S)$  descrevem, respectivamente, a distribuição em amplitude e em fase dos campos sobre o objeto e os campos difratados num plano de observação que passa por  $P_0$ . Em um ponto  $P_0$  distante, veremos a intensidade correspondente ao vetor  $\mathbf{k}$  específico para aquela posição. Este experimento de difração por um objeto limitado é equivalente à difração em uma fenda em um anteparo<sup>[4]</sup>: de acordo com o princípio de Babinet (1794-1872), se trocarmos o objeto por uma abertura de mesma forma em um anteparo, teremos o mesmo padrão de difração. Ou seja, o fenômeno de difração em um fio de cabelo é o mesmo que o de uma fenda de igual espessura. Consideremos assim o exemplo uma fenda unidimensional iluminada uniformemente (transmitância=1), ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} A & \text{para } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{para } x < -a/2 \text{ e } x > a/2 \end{cases} \quad (11)$$

então a transformada de Fourier desta fenda (eq. 8) é

$$U_{P_0} \propto Aa \left( \frac{\text{sen} \pi ua}{\pi ua} \right) = Aa \text{sen} c(\pi ua) \quad (12)$$

Estas duas funções estão representadas na figura 4. Vemos que a imagem é imperfeita sob o ponto de vista

da ótica geométrica, ou seja, ela não forma uma representação exata do objeto por causa dos efeitos de difração. Deste modo, a imagem de um objeto pontual não é um ponto e sim um padrão de difração denominado padrão de difração de Ayri (figura 5b). Considerando o mesmo exemplo em uma dimensão, podemos generalizar este efeito para objetos de forma arbitrária e, geralmente, veremos um padrão de difração com uma intensidade máxima para um dado vetor de espalhamento e com uma dada largura  $\Delta k_x$ . Segundo a teoria de Fourier<sup>[11]</sup>, a largura  $\Delta k_x$  (ou seja, o domínio do espaço  $k_x$  em que  $U_{P_0}(\mathbf{k})$  é diferente de zero) se relaciona com a extensão finita do objeto  $\Delta x$  de acordo com a relação,

$$\Delta x \Delta k_x \geq 2\pi. \quad (13)$$

Matematicamente, podemos concluir desta relação que quanto menor o objeto (em relação ao comprimento de onda da luz espalhada), maior o número de componentes de Fourier de alta freqüência espacial (maior  $\Delta k_x$ ) necessárias para resolvermos o objeto, ou seja, mais largo será o seu espectro espacial. Fisicamente, ela significa que, quanto menor for o objeto, mais os campos da radiação incidente serão perturbados e, portanto, mais espalhados ou difratados.

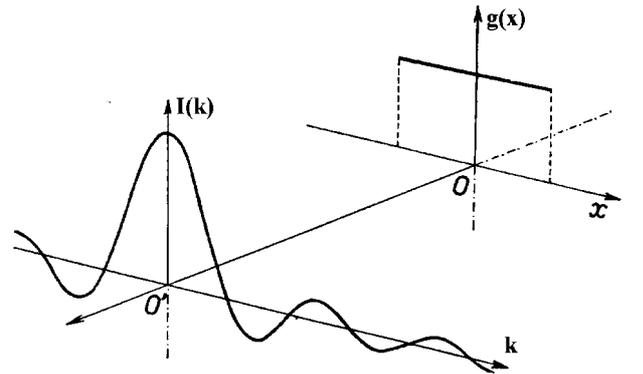


Figura 4: Distribuição de intensidades da luz incidente sobre uma fenda retangular e sobre o anteparo após ser difratada.

De acordo com Rayleigh, dois pontos próximos serão resolvidos se a distância entre os dois máximos de difração for igual ou maior do que o dobro da distância entre o máximo e o primeiro mínimo do pico (figura 5). Se olharmos agora o objeto através de um microscópio clássico (figura 5a), a sua objetiva de índice

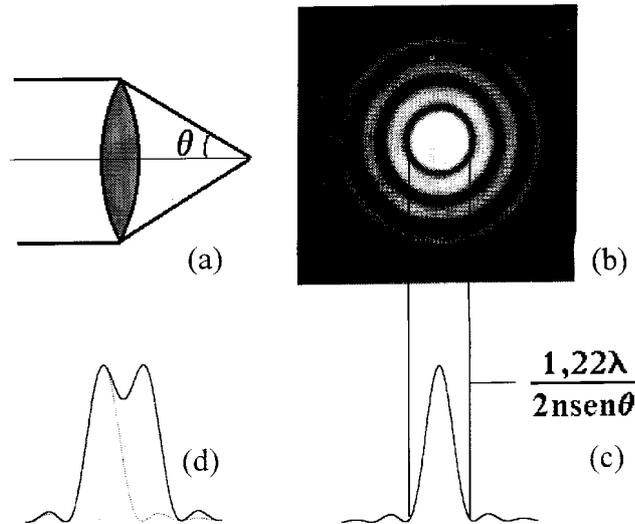


Figura 5: Ilustração do limite de difração segundo o critério de Hayleigh: (a) um ponto observado por um microscópio de abertura definida pelo ângulo  $\theta$ . A sua imagem consiste de padrões de difração que aparecem como anéis concêntricos (b). A distribuição de intensidade real é mostrada em (c) e o critério de Rayleigh para a resolução ótica entre dois pontos é mostrada em (d).

de refração  $n$  aceitará apenas valores de  $k$  dentro de um restrito ângulo de abertura  $2\theta$ , ou seja, somente vetores de onda espaciais com componentes dentro do domínio  $\Delta k_x = 2kn\text{sen}\theta$  alcançarão o observador. Levando este resultado em (13), temos

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{2n\text{sen}\theta} . \quad (14)$$

Este resultado corresponde, a menos de um fator 1.22, ao critério de Rayleigh definido em (1) e ilustrado na figura 5. Na prática,  $\Delta x \approx \lambda/2$ . Como vimos acima, estamos acostumados a utilizar métodos óticos que possuem uma dada abertura e que detetam ondas propagantes de baixa frequência espacial de um objeto para obter a sua imagem. De acordo com (13), restringir  $\Delta k_x$  ou filtrar altas frequências espaciais significa diminuir a resolução ou perder a definição de suas bordas. Esta metodologia vem sendo utilizada há séculos e até pouco tempo acreditava-se que a obtenção de resolução além do limite clássico de difração (critério de Rayleigh) era uma tarefa praticamente impossível. Todo método ótico possui uma dada abertura ótica e isto é o que produz a difração quando detetamos apenas os campos propagantes ou distantes.

#### 4.2. Quebrando Tabu

Como vimos anteriormente, a limitação na resolução dada pela equação (14) corresponde à largura do primeiro máximo no espectro espacial, ou angular, no

ponto de observação. Esta limitação é consequência da abertura ótica dos equipamentos que coletam  $\mathbf{k}$  ( $|\mathbf{k}| = k = \omega/c$ ), com componentes, por exemplo  $k_x$ , variando no domínio  $[-\omega\text{sen}\theta/c, +\omega\text{sen}\theta/c]$ . O que aconteceria se de algum modo conseguirmos quebrar a limitação tecnológica da abertura ótica? De acordo com a teoria de Fourier poderíamos detetar frequências espaciais do objeto correspondentes a  $k_x$  mais altas e com isso aumentar a resolução ótica. A questão agora é qual o maior valor que a componente  $k_x$  pode assumir? A resposta pode ser obtida se analisarmos mais de perto os campos que transportam a informação. Como vimos pela relação geral (6), estes campos são descritos por ondas esféricas propagantes e que possuem um termo exponencial do tipo

$$B(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} , \quad (15)$$

onde  $k_x = \alpha k$ ,  $k_y = \beta k$  e  $k_z = \gamma k$  são as projeções de  $\mathbf{k}$  nos eixos de coordenadas e  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . Fazendo agora  $k_x = (k^2 - k_y^2 - k_z^2)^{1/2}$  temos que

$$B(x, y, z) = e^{i(k^2 - k_y^2 - k_z^2)^{1/2} x} e^{i(k_y y + k_z z)} . \quad (16)$$

Sendo assim, a propagação dos campos distantes requerem que  $k_y^2 + k_z^2 < k^2 = (\omega/c)^2$ , ou seja, que as componentes de  $\mathbf{k}$  sejam reais. Neste caso as ondas incidentes serão difratadas pelo objeto. Se permitirmos agora que as componentes de  $\mathbf{k}$  possam assumir valores

complexos, então podemos estender os valores de  $\mathbf{k}$  ao limite de altas frequências espaciais  $k_y^2 + k_z^2 > (\omega/c)^2$ . Isto é possível se o espectro espacial do objeto conter frequências maiores que  $\omega/c$ . Neste domínio, o expoente em  $x$  da equação (16) é real e teremos ondas evanescentes nesta direção. Este caso é equivalente à situação de uma onda plana incidindo sobre uma fenda em que as suas dimensões são menores que o seu comprimento de onda. Para frequências espaciais altas o feixe de luz é intensamente perturbado pela fenda de maneira a ter reflexão total de um lado e ondas evanescentes do outro lado da fenda.

A figura 6 ilustra muito bem estes conceitos através do espectro angular de um objeto (fenda circular, por exemplo) para diferentes valores de sua dimensão. Estamos interessados aqui em comprimentos de onda no intervalo da luz visível e infravermelho, responsável pela maioria das excitações em sólidos e moléculas. Quando o tamanho do objeto é muito grande (maior que  $\lambda/2$ ), os valores de  $k$  estão dentro do domínio  $[-\omega/c, +\omega/c]$  de campos propagantes e a maior parte do espectro angular entre  $-\omega \sin\theta/c < k < +\omega \sin\theta/c$  poderá ser detetado por um microscópio ótico clássico (figura 6a). Neste caso a imagem do objeto pode ser recuperada em boas condições. Isto ainda vale quando o tamanho do objeto é da ordem de  $\lambda/2$  (figura 6b). No entanto, quando as dimensões forem menores que  $\lambda/2$  (figura 6c), a maior parte do espectro angular se torna evanescente (ou seja,  $k_y^2 + k_z^2 > (\omega/c)^2$ ) e parte da informação sobre a imagem é perdida ao ser detetada no regime de campos distantes. O mais importante deste último resultado é que se torna impossível distinguir a imagem de um objeto de outro ainda menor (curva pontilhada na figura 6c). Os campos detetados nesta situação aparecerão idênticos na região de campos distantes, como se viessem de uma única fonte de dimensão  $\lambda/2$ . Para se obter uma melhor resolução é necessário detetar um espectro mais amplo em valores de  $k$ , ou seja, temos que medir os campos evanescentes ou próximos ao objeto. Por exemplo, se medirmos valores de  $k$  pertencentes ao domínio  $[-K, +K]$ , nós poderemos distinguir os dois objetos correspondentes à curva contínua e pontilhada da figura 6c. Infelizmente microscópios clássicos detetam somente as ondas propagantes, que verificam a relação  $|\mathbf{k}| = \omega/c$  e, conseqüentemente, a melhor resolução possível seria  $\lambda/2$ . Podemos, então, concluir que

um feixe de luz incidindo sobre um objeto de tamanho limitado será sempre convertido em ondas espalhadas propagantes de baixas frequências que alcançarão o detetador e ondas evanescentes de altas frequências espaciais confinadas à superfície. Nos campos evanescentes estão contidas todas as informações relacionadas a fina estrutura menor que  $\lambda/2$  do objeto. Este resultado é a chave para se obter resolução abaixo do comprimento de onda da luz, como veremos a seguir.

Na realidade, esta barreira ao mundo submicroscópico não é inteiramente impenetrável pela luz. De acordo com Abbe, precisamos detetar as mais altas frequências espaciais da luz para se obter uma imagem de alta resolução. Para isso devemos chegar o mais próximo possível do objeto e aumentar ao máximo a abertura ótica da sonda. No entanto, se assim conseguirmos detetar os campos evanescentes não propagantes próximos à superfície do objeto, poderemos contornar a difração, que é um fenômeno estritamente ondulatório dos campos espaciais. Com este procedimento, ou seja, através da captação da informação na região de campos próximos, é possível obter uma resolução ótica abaixo do limite de Rayleigh. De acordo com os recentes avanços tecnológicos<sup>[1-3,7-9]</sup> já é possível detetar estes *campos próximos*. Uma vez ultrapassado este limite de resolução, quais seriam então as próximas barreiras para se obter imagem do mundo submicroscópico? A questão ainda seria: até quanto podemos estender os valores de  $\Delta k_x$ . Neste trabalho abordaremos um desses limites sob o ponto de vista do princípio da incerteza de Heisenberg.

## 5. O Princípio da Incerteza de Heisenberg

Em seu famoso trabalho de 1927 [12] Heisenberg usou o exemplo de um experimento para ilustrar a origem física do princípio da incerteza. Ele consiste em observar a posição de um elétron através de um microscópio clássico, usando radiação  $\gamma$ . Logo depois, em 1928, este experimento foi aprimorado por Bohr<sup>[13]</sup> e foi chamado mais tarde de microscópio de Heisenberg<sup>[14]</sup>. O seu funcionamento é baseado nos princípios ordinários da ótica (figura 7), apesar de ser extremamente difícil lidar com radiação  $\gamma$  usando lentes convencionais.

Considere, então, esta radiação de comprimento de

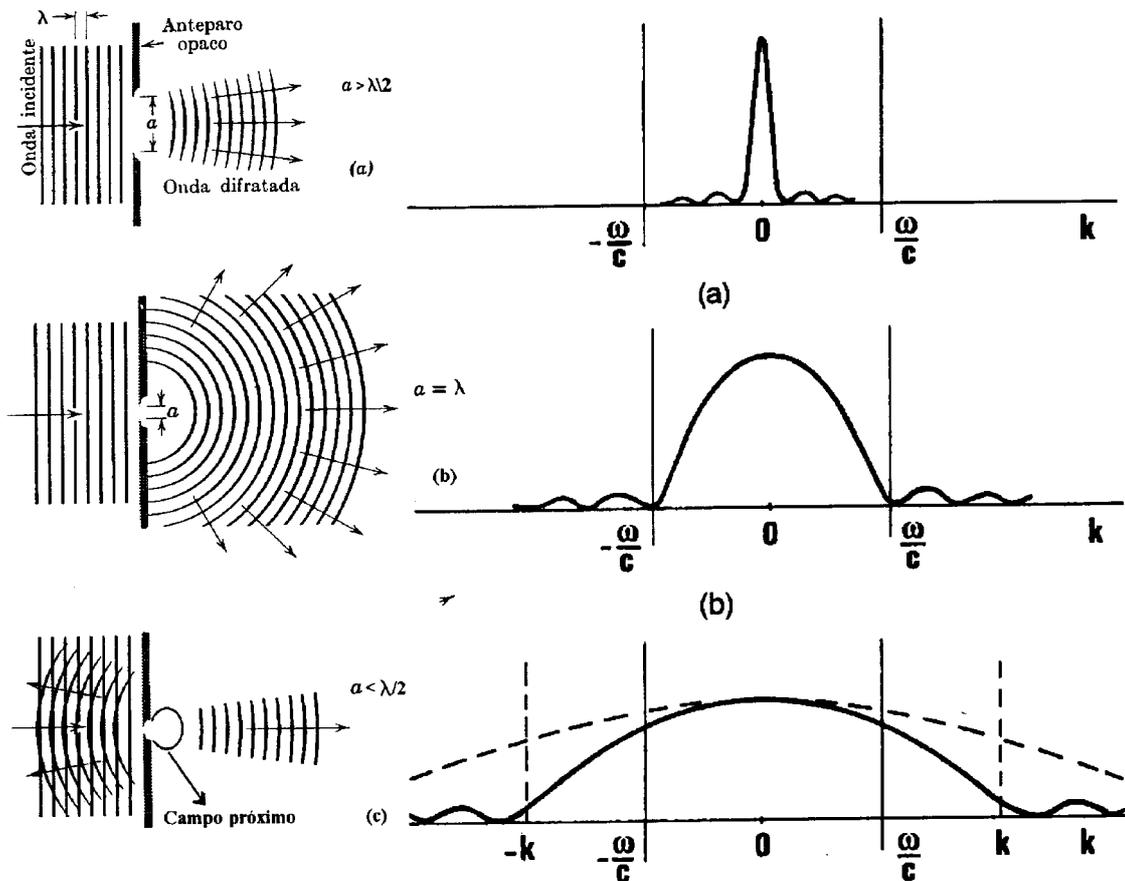


Figura 6: Representação do espectro angular ou espacial para diferentes dimensões de uma fenda (objeto): (a) quando a largura da fenda é muito maior que  $\lambda/2$ ; praticamente todo o espectro pode ser detectado no campo distante. (b) Se a largura da fenda é da ordem de  $\lambda/2$  o mesmo resultado pode ser ainda obtido. No entanto, quando a sua largura é menor que  $\lambda/2$  (c), a parte do espectro de altas frequências, ou  $k > \pm\omega/c$ , corresponde a das ondas evanescentes, que são, consequentemente, perdidas no campo distante. Neste caso é impossível distinguir outro objeto de dimensões maiores (linha pontilhada).

onda  $\lambda$  no vácuo propagando-se na direção do eixo óptico  $z$  da lente e espalhando-se com o elétron que se propaga na direção do eixo  $x$ . De acordo com a relação de De Broglie, o momento do fóton é  $p = h/\lambda$  (onde  $h$  é a constante de Planck). Como a luz não é um prova neutra, ela transfere momento para o elétron e é espalhada em todas as direções depois da interação. Como vimos na seção anterior, apenas uma fração dos fótons espalhados dentro de uma região angular  $2\theta$  é captada pela lente do microscópio. Com esta delimitação, a componente  $x$  do momento do fóton pode variar de  $-psen\theta$  a  $psen\theta$ . A lei de conservação do momento exige que o elétron receba um momento na direção  $x$  igual em módulo à variação da componente  $x$  do momento da luz neste intervalo, de modo que a sua incerteza depois do espalhamento é

$$\Delta p_x = 2 \frac{h sen\theta}{\lambda} . \tag{17}$$

Por outro lado, vimos na seção precedente que a co-

ordenada  $x$  do elétron tem também uma incerteza dada pela resolução ótica do microscópio. Considerando o índice de refração  $n = 1$ , a teoria de difração (14) nos dá que a incerteza em  $x$  é

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2 sen\theta} . \tag{18}$$

Se tomarmos agora o produto das incertezas verificamos que

$$Dx \Delta p_x \approx h , \tag{19}$$

que concorda razoavelmente com o resultado fixado pelo princípio da incerteza. De acordo com Heisenberg, a relação (19) não é específica dos microscópios. Ela se estende a todo tipo aparelho e a todo o domínio da física quântica e traz consigo uma limitação inerente na determinação da posição e momento.

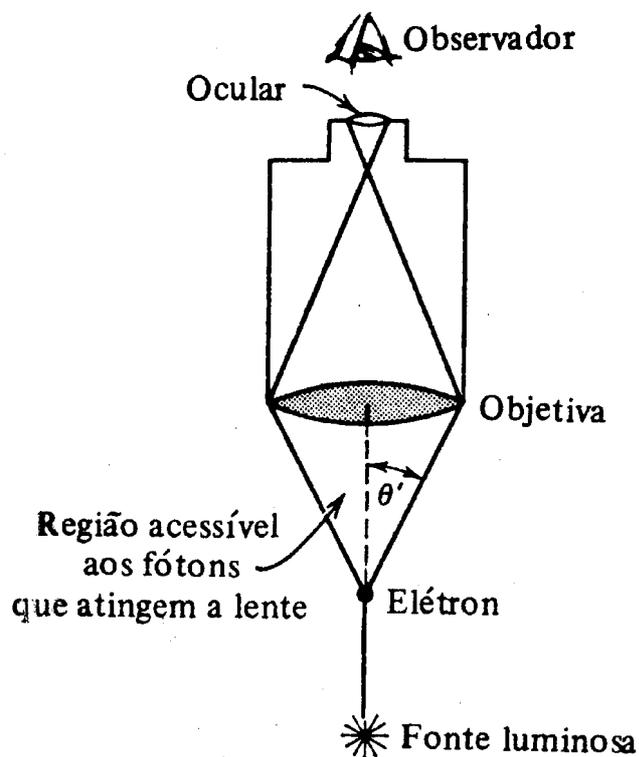


Figura 7: Esquema experimental do microscópio de Heisenberg.

O resultado do experimento acima mostra que existe uma equivalência matemática entre o princípio da incerteza de Heisenberg e o limite de resolução de Rayleigh. Isto se deve ao fato de ambos terem origens comuns. Na realidade, a mecânica de Heisenberg e o critério de Rayleigh originam-se do mesmo método matemático estabelecido já há muito tempo por J.B.J. Fourier (1768-1830). Como vimos anteriormente (seção 4.1), este formalismo matemático implica que certas grandezas físicas, tais como a posição e o momento (vetor de onda), não podem ser determinadas simultaneamente a menos de uma incerteza. De acordo com Rayleigh a resolução ótica é ditada pelo fato de usarmos instrumentos restritos em abertura e pelo fenômeno de difração. Já a incerteza de Heisenberg diz respeito ao processo intrínseco de medida e expressa o fato de que sempre existe uma interação não determinável entre o observador e o que é observável. Segundo Heisenberg, não podemos fazer nada para evitar esta interação ou corrigir os seus efeitos. São estes pontos de divergências que distinguem o princípio de Heisenberg e a teoria de Rayleigh. Deste modo, o princípio da incerteza não limita os valores assumidos por  $k$ . Ele simplesmente estipula um limite de acuidade em  $\Delta x$  para um dado

$\Delta k_x$  e, além disso, diz que é impossível especificar precisamente e simultaneamente os valores do momento e da posição do elétron ou da radiação. De acordo com a previsão teórica (19) podemos reduzir a incerteza na posição do elétron aumentando a incerteza no seu momento. Em ótica, isto é equivalente a dizer que aumentar a resolução de um dado objeto significa espalhar mais as ondas eletromagnéticas e aumentar a incerteza no vetor de onda espacial. Isto é ruim para os metrologistas que utilizam instrumentos com abertura limitada.

Dentro do que vimos acima, o critério de Rayleigh e princípio da incerteza são equivalentes no intervalo de  $k$  correspondendo a ondas propagantes (difração clássica). Resta saber se este último é aplicável na região de ondas evanescentes em que as componentes de  $k$  podem assumir valores complexos (seção 4.2). Tomemos para este fim as relações de incerteza de Heisenberg que são escritas como<sup>[11]</sup>

$$\Delta x \Delta k_x \geq 2\pi, \quad \Delta y \Delta k_y \geq 2\pi, \quad \Delta z \Delta k_z \geq 2\pi \quad (20)$$

Vamos restringir nossa discussão à direção  $x$  no plano  $xy$  e inverter o procedimento anterior. Como  $k_x$  pode tomar valores tanto positivos como negativos,  $\Delta k_x$  é duas vezes o valor máximo desta componente no intervalo. Se  $\theta$  o ângulo de projeção de  $\mathbf{k}$  sobre o eixo  $x$ , então  $\Delta k_x = 2k_x \sin \theta$ . Num meio de índice de refração  $n$  temos que  $k = 2\pi n/\lambda$ . Deste modo, a equação (20) em  $x$  pode ser escrita como

$$\Delta x \geq \lambda/2n \sin \theta. \quad (21)$$

Como era de se esperar, as relações de incerteza nos leva ao critério de Rayleigh para a difração clássica de ondas propagantes se o ângulo  $\theta$  e, conseqüentemente, o vetor  $k$  forem reais. Poderíamos estender este limite, ou seja, diminuir a incerteza em  $x$  se fizermos  $\sin \theta > 1$ , ao permitirmos, como em (16), que as componentes do vetor  $k$  assumam valores complexos (ou  $\theta$  imaginário). Esta situação corresponde a das ondas evanescentes ( $k_y^2 + k_z^2 > (\omega/c)^2$  na seção 4.2)) geradas pela interação entre luz e o objeto com dimensão menor que o comprimento de onda. Matematicamente estas idéias são factíveis, mas será que elas se aplicam à situação física em consideração? Primeiramente, estamos tratando os fenômenos dentro de uma região muito

menor que o comprimento de onda da radiação que está sendo espalhada. Os campos (bem como os vetores de onda) não estão bem definidos nesta região de transição e suas dependências no espaço e no tempo não são tão simples<sup>[10]</sup>: eles contêm componentes capazes de propagar e componentes confinadas à superfície cujas propriedades estão intimamente relacionadas com os estados eletrônicos do objeto. Podemos dizer que a existência de uma componente depende da existência da outra e vice-versa. O problema da separabilidade destas duas componentes na região campo próximo tem alimentado inúmeros debates já há muito tempo<sup>[10,15]</sup>. Em segundo lugar, esta região de transição corresponde ao domínio de campos estáticos não propagantes. Se não existe uma distribuição espacial ondulatória, não existe difração. Sendo assim, não temos um padrão de difração dado pelas relações (8) e (9), ou seja, o método de Fourier não é aplicável na região de campo próximo. Se não temos como definir  $k_x$  neste domínio (o vetor  $k = p/h$  é definido no contexto de uma onda plana propagante), também não temos razão para considerar uma incerteza  $\Delta k_x$ . Estes argumentos sugerem que o princípio da incerteza de Heisenberg não é aplicável no domínio de campos próximos, não sendo, portanto, um fator de limitação à resolução ótica.

O fato do princípio da incerteza não se aplicar ao domínio de campos próximos faz com que estes campos possam variar nesse intervalo menor que o comprimento de onda da luz, não fazendo nenhuma restrição ao tipo de campo eletromagnético que nós estamos tratando. Na realidade, são estes campos evanescentes que se relacionam com a estrutura do objeto, ou seja, são eles que contêm a informação dos detalhes menores que o comprimento de onda. Se conseguirmos detectar estas pequenas variações do campo próximo, poderemos ultrapassar o critério de Rayleigh e quebrar definitivamente esta barreira. O princípio de detecção destes campos evanescentes tem que ser diferente daqueles que estamos acostumados a usar na região de campos distantes. Como vimos anteriormente, um pequeno objeto gera ondas evanescentes ao ser iluminado por ondas propagantes. Analogamente, se aplicarmos o princípio da reciprocidade, um pequeno objeto (detetor) colocado no campo evanescente oscilante no tempo converte parte deste em campos propagantes. Esta é a base para a detecção do campo próximo. O único requerimento é

que este detetor possua um espectro espacial cuja extensão seja maior que a do espectro gerado pelo objeto, de modo a ser excitado pelos modos evanescentes e propagantes gerados por este último. Este problema é análogo ao casamento de impedâncias em uma linha de transmissão em eletrônica. A solução para detectar ondas evanescentes consiste em colocar uma sonda ótica (por exemplo, uma ponta de fibra ótica) de dimensões menores que o comprimento de onda da luz incidente e o mais próximo possível da superfície a ser explorada e analisada, sem com isto perturbar a estrutura local que determina estes campos. São estes os pontos (tamanho e distância da ponta de prova) que determinarão agora a resolução espacial nestes domínios. Como consequência desta metodologia, podemos fazer imagem de fontes de luz de dimensões nanométricas. Está claro que este novo tipo de detecção é filosoficamente muito novo, porque estamos acostumados a trabalhar desde Galileu e Newton com ondas propagantes, de modo que a maioria dos fenômenos físicos foram deduzidos de observações envolvendo somente os conceitos de campos distantes.

## 6. Conclusão

O desenvolvimento e uso de microscópios de campo próximo de super-resolução ainda estão em fase de experimentação. As suas aplicações são extremamente numerosas indo desde problemas básicos na física de estado sólido, passando por semicondutores, polímeros, até as questões fundamentais na biologia e medicina. No entanto, fica sempre uma pergunta no ar no que se refere à capacidade de resolução desta nova técnica. Foi esta a direção tomada por este trabalho: o novo conceito de super-resolução ótica envolvendo campo próximo e formação de imagens foram introduzidos e, então, analisados sob o ponto de vista do critério de Rayleigh e do princípio da incerteza de Heisenberg.

Sob essa ótica, acredito que este trabalho é uma boa ilustração do uso da relação de incerteza de Heisenberg. Vimos que ela é equivalente ao critério de Rayleigh no domínio de ondas propagantes devido ao fato da imagem ser a transformada de Fourier do objeto. No entanto, o princípio da incerteza não é aplicável quando consideramos os limites campos próximos ou evanescentes muito menores que o comprimento de onda da luz espalhada. Seria aplicável se o que estivesse sendo

medido neste domínio fosse a transformada de Fourier do campo eletromagnético. Como consequência, podemos ter uma resolução infinita no que diz respeito ao princípio da incerteza. Na realidade, devemos apenas acrescentar em nossa descrição do universo os campos não radiativos. São neles que estão contidas todas as informações menores que  $\lambda/2$  de um dado objeto e que até agora não foram consideradas pelos metrologistas - a maioria das observações, análises e medidas de fenômenos físicos foram descritas levando em conta apenas os campos propagantes. A necessidade de se detectar estes campos próximos implicará numa mudança nos conceitos de detecção e certamente levará a novos problemas que ainda terão que ser resolvidos. Todas estas questões relativas à detecção estão sendo trabalhadas atualmente e não foram especificamente cobertas por este trabalho. Os leitores interessados poderão aprofundar o assunto na bibliografia especializada ou naquelas referidas abaixo.

### Agradecimentos

O autor gostaria de agradecer o Prof. Lidério C. Ioriatti Junior pelas valiosas discussões.

### Referências

1. D. W. Pohl, em: *Advances in Optical and Electron Microscopy*, Ed. C. J. R. Sheppard e T. Mulvey, Vol. 12, (Academic Press, London, 1991), p.243.
2. E. Betzig e J. K. Trautman, *Science*, **257**, 189 (1992).

3. T. D. Harris, R.D. Grober, K. Trautman e E. Betzig, *Appl. Spectrosc.*, **48**, 14A (1994).
4. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, McGraw-Hill Physical and Quantum Electronics Series, McGraw-Hill Book Company, 1968 e M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics: Eletromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Pergamon Press, 1975.
5. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1975.
6. E. H. Synge, *Phil. Mag.*, **6**, 356 (1928).
7. E. A. Ash e G. Nicholls, *Nature*, **237**, 510 (1972).
8. E. C. Valadares, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **14**, 63 (1992); G. Massey, *Appl. Opt.*, **23**, 658 (1984) e D. W. Pohl, *Appl. Phys. Lett.*, **44**, 651 (1984).
9. D. Courjon e C. Bainier, *Reports on Progress in Physics*, **57**, 989 (1994), e J. M. Vigoureux e D. Courjon, *Applied Optics*, **31**, 3171 (1992).
10. C. Girard e D. Courjon, *Phys. Rev. B*, **42**, 9340 (1990).
11. A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Volume 1, North-Holland Publishing Company, 1991.
12. W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
13. N. Bohr, *Nature* **121**, 580 (1928).
14. R. Eisberg e R. Resnick, *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, Editora Campus Ltda, 1979.
15. Wolf e M. Nieto-Vesperinas, *J. Opt. Soc. Am. A/2*, 886 (1985).