Uma Nota Sobre a Magnetostática e a Lei de Ampère

Eduardo O. Resek
Instituto de Ciências, Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Caixa Postal 50, 37500-000, Itajubá, MG, Brasil

Trabalho recebido em 30 de outubro de 1995

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma dedução alternativa da lei de Ampère do eletromagnetismo. Há, certamente, muitas delas na literatura corrente, mas nenhuma, na nossa opinião, se adequa como a aqui apresentada à bagagem de conhecimentos dos nossos alunos à altura do primeiro contato com a disciplina.

Abstract

In this paper, we consider an alternative approach to derive Ampère's Law of electromagnetism. Though there are many derivations available in the specialized literature (see, for example, references [1,2]), they are, as far as my knowledge extents, either too elaborate or beyond the scope of usual first college courses on the subject. The one shown bellow fits well to the student's profile in our schools.

1. Introdução

No ciclo básico das escolas de física e engenharia a disciplina *Eletricidade e Magnetismo* é geralmente ministrada com base em textos tais como os das referências [3,4]. Embora estes sejam de eficiência devidamente comprovada, pecam, na minha opinião, por não fazer uso pleno de uma preciosa ferramenta que, a esta altura do curso (geralmente terceiro ou quarto semestre) os estudantes já dominam: o cálculo vetorial diferencial e integral. Tal ferramenta propicia uma formulação ao mesmo tempo mais concisa e poderosa das leis do Eletromagnetismo, conquanto exija também do estudante o desenvolvimento de uma destreza no manusear das equações que lhe será muito útil futuramente.

Historicamente, o estudo da magnetostática tomou novo impulso quando, em 1820, Hans Christian Oersted descobriu que correntes elétricas também produzem campos magnéticos. Surgiu então imediatamente a questão de como expressar o campo produzido em função da corrente. Foi Ampère quem, algumas semanas depois do anúncio da descoberta de Oersted, apresentou uma série de resultados experimentais sobre a força com a qual dois circuitos conduzindo corrente se atraem. Expresso em linguagem moderna, estes resultados implicam (ver referência [2]) uma expressão para o campo magnético que é a generalização da lei de Biotsavart. Se a distribuição de correntes for descrita por uma densidade vetorial $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ e limitada a uma região V', o campo magnético[1] criado num ponto $\mathbf{r}$ por uma tal distribuição é dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\vec{\mathbf{r}}') \times (\mathbf{r} - r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \qquad (1)$$

Nesta expressão, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ é a permeabilidade magnética do vácuo.

Nossa proposta é construir a eletrostática [2] e a magnetostática sobre duas leis experimentais básicas, a lei de Coulomb e a lei de Biot-Savart, respectivamente. Estas leis desempenham papéis semelhantes nas duas ciências, haja vista que ambas expressam os campos em função de suas respectivas fontes (carga e cor-

[1] Nossa notação segue de perto a da referência [2].
[2] Para um sumário dos resultados mais importantes da eletrostática, veja o apêndice.

rente elétricas, respectivamente). A partir delas podemos obter a lei de Gauss e a propriedade conservativa do campo elétrico, bem como a lei de Gauss para o campo magnético. Esta última segue diretamente de (1), bastando tomar o divergente com respeito a $\mathbf{r}$ em ambos os membros da equação, inverter a ordem das operações de derivação e integração no segundo membro e utilizar em seguida a identidade vetorial: $\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot \nabla \times bV - \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{W}$, escolhendo $\mathbf{V} = \mathbf{J}(\mathbf{r})'$ e $\mathbf{W} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$; nessas condições, $\nabla \times \mathbf{W} = 0$ pode ser verificada por cálculo direto, enquanto que $c\nabla \times \mathbf{V} = 0$ devido a ser $\mathbf{J}$ uma função das variáveis contidas em $\mathbf{r}'$ e nao em $\mathbf{r}$. Assim, $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$, que é a referida lei na forma diferencial.

O maior obstáculo a esta abordagem da magnetostática reside na lei de Ampère: deduzi-la diretamente a partir de (1) não é tarefa das mais simples– exige conhecimento e domínio da teoria das distribuições (Dirac, Schwartz), com o que nem sempre se pode contar em se tratando de estudantes de segundo ano de um curso técnico-científico. Mostraremos entretanto que é possível manter a abordagem e obter convincentemente a lei de Ampère, tomando (1) como princípio fundamental. Isto é factível através do uso do potencial vetor magnético, introduzido na seção seguinte e de uma analogia com as equações da eletrostática.

2. O Potencial Vetor Magnético

2.1 Definição

No caso do campo eletrostático, podemos definir o campo escalar que denominamos potencial eletrostático graças à propriedade conservativa do campo elétrico, isto é:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Longrightarrow \exists\phi|\mathbf{E} = -\nabla\phi, \text{ pois } \nabla \times \nabla\phi = 0, \forall\phi \quad (2)$$

cujas segundas derivadas existam.

Para o campo magnético, em geral, não é válida a propriedade conservativa, mas ainda assim algo semelhante acontece. Já vimos que a lei de Gauss para o campo magnético estabelece que

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \ , \quad (3)$$

para qualquer campo vetorial $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ real. Por outro lado, do cálculo vetorial, sabemos que é nulo o divergente do rotacional de qualquer campo vetorial cujas segundas derivadas existam. Portanto podemos escrever, de modo análogo ao colocado na equação (2),

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Longrightarrow \exists\mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \mathbf{A} \text{ , pois } \nabla \times \nabla\mathbf{A} = 0, \forall\mathbf{A} \quad (4)$$

Como $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ é obtido essencialmente através de derivação do vetor $\mathbf{A}$, assim como $\mathbf{E}$ o é a partir de ϕ, $\mathbf{A}$ é uma função potencial para o campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, denominada potencial vetor magnético, ou simplesmente potencial vetor.

Desse modo,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

é a relação básica que define $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. A partir daí, vemos que existe a liberdade de adicionarmos a A o gradiente de qualquer função escalar diferenciável, pois se (5) vale para um determinado campo vetorial $\mathbf{A}$, ela vale também para

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi \ , \quad (6)$$

pois

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\psi}_{=0} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \ ,$$

haja vista que o rotacional do gradiente de qualquer função escalar duplamente diferenciável é nulo.

No caso do campo eletrostático somos livres para acrescentar a ϕ qualquer constante, pois $\phi' +$ cte. e ϕ representam o mesmo campo elétrico. Aqui, nossa liberdade é ainda maior. Em geral,é conveniente restringí-la um pouco, impondo alguma condição adicional sobre $\mathbf{A}$ (do mesmo modo que, às vezes, escolhemos a referência zero para o potencial eletrostático em um ponto qualquer em particular, por exemplo, no infinito). Fazemos isso escolhendo arbitrariamente qual deve ser o divergente de $\mathbf{A}$. Esta escolha de modo algum afeta o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, pois embora $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ possuam o mesmo rotacional, eles não possuem necessariamente o mesmo divergente:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\psi \ , \quad (7)$$

de modo que, escolhendo adequadamente a função ψ, podemos fazer $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ igual a qualquer coisa que desejemos.

Como vamos então escolher $\nabla \cdot \mathbf{A}$? Esta é, basicamente, uma questão de pura conveniência matemática e depende fortemente do tipo de situacão que estivermos tratando. Para magnetostática, onde lidamos com correntes estacionárias, escolhemos simplesmente

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \ . \tag{8}$$

Assim, nosso potencial vetor é caracterizado pelas relações (5) e (8), que repetimos aqui:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$$
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \ ,$$

para o caso estático, isto é, quando as correntes não variam no tempo. Além de ser muito útil na obtenção de inúmeros resultados teóricos, as maiores aplicações do potencial vetor ocorrem no estudo de irradiação e propagação de ondas eletromagnéticas.

2.2 Uma Equação Diferencial para A

Vamos agora tentar obter algumas expresões que nos possibilitem determinar o potencial vetor a partir da distribuição de correntes que produz o campo magnético. Como vimos, o campo gerado por uma distribuição especificada pela densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ é dado pela lei de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \ . \tag{9}$$

Entretanto, podemos escrever

$$\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ ,$$

de modo que (9) fica

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \ . \tag{10}$$

Do cálculo vetorial conhecemos a seguinte identidade:

$$\nabla \times (\psi \mathbf{F}) = \nabla\psi \times \mathbf{F} + \psi \nabla \times \mathbf{F} \ . \tag{11}$$

Escolhendo nesta expressão

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \ .$$

temos

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ .$$

Como as derivadas presentes em $\nabla\times$ são calculadas com relação às variáveis x, y, z e, por outro lado, $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ não depende dessas variáveis, temos $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, de modo que

$$-\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]$$

Substituindo essa expressão na lei de Biot-Savart (10), ficamos então, sucessivamente, com:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] dV' \ . \\ &= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'\right] \ , \end{aligned} \tag{12}$$

onde a inversão na ordem das operações $\int_{V'}$ é $\nabla\times$ é lícita devido a se tratarem de operações sobre variáveis distintas. Comparando (12) e (5), concluímos então que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \ , \tag{13}$$

onde em geral, de acordo com o exposto acima, podemos somar a esta expressão o gradiente de qualquer função escalar bem comportada ψ. Esta equação é importante na medida em que permite determinar o potencial vetor a partir do conhecimento da distribuição de correntes numa certa região do espaço, após o que se pode fazer uso da equação (5) para calcular $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, a grandeza física de maior interesse.

Assim, cada uma das componentes cartesianas de $\mathbf{A}$ se escreve

$$A_\xi(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{J_\xi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \ , \tag{14}$$

onde ξ pode ser qualquer uma das variáveis x, y, z.

Por outro lado, quando estudamos o potencial eletrostático, verificamos ser $\phi(\mathbf{r})$ dado por uma integral semelhante:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \ , \tag{15}$$

que, por sua vez, era solucão da equação de Poisson,

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \ . \tag{16}$$

Ora, as expressões (14) e (15) são estruturalmente idênticas, bastando fazer a correspondência

$$A_\xi \leftrightarrow \phi \ , \mu_0 \leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \ , J_\xi \leftrightarrow \rho \tag{17}$$

de modo que $J_\xi(\mathbf{r})$ deve ser solução de uma equação análoga a (16), respeitando a correspondência expressa em (17):

$$\nabla^2 A_\xi(\mathbf{r}) = -\mu_0 J_\xi(\mathbf{r}) \ . \tag{18}$$

Considerando a definição do laplaciano de um vetor,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{z}} \ ,$$

concluímos então que o potencial vetor satisfaz a uma equação vetorial de Poisson,

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \ . \tag{19}$$

Se uma determinada região do espaço for livre de correntes, A será solução de uma equação vetorial de Laplace,

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \ .$$

3. A Lei de Ampère

De acordo com o teorema Helmholtz, todo campo vetorial fica completamente especificado numa determinada região do espaço, se conhecermos o seu rotacional e o seu divergente em todo o espaço, desde que ele seja não nulo em apenas uma região finita. Para o campo elétrico, no caso estático, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \ , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \ .$$

Para o campo magnético, sabemos que deve ser nulo seu divergente,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \ , \tag{20}$$

mas nada sabemos ainda sobre como se comporta o rotacional desta grandeza. Nesta seção vamos utilizar o conhecimento que adquirimos a respeito do potencial vetor para determinarmos uma expressão para $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$, válida para o caso estático (correntes estacionárias). Partimos de (5), tomando o rotacional em ambos os membros desta equação:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \ ,$$

que pode ser expandida através da conhecida identidade vetorial, fornecendo:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \ . \tag{21}$$

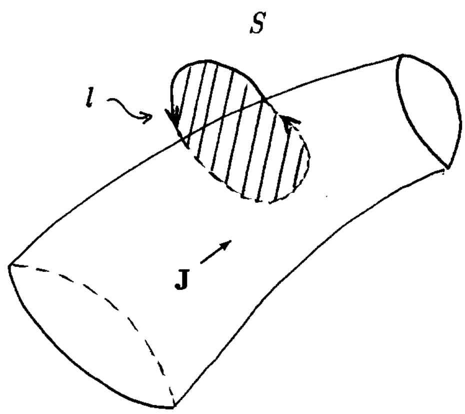
Usando a escolha (8) (percebe agora o porquê dela?)[3], ficamos com

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \mathbf{A} \ .$$

Levando em conta (19), temos finalmente

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \ , \tag{22}$$

que é conhecida como lei de Ampère para o campo magnético, apresentada aqui na forma diferencial.



Para obtermos a versão integral da lei de Ampère, basta integrarmos ao longo de uma superficie S delimitada por um contorno l,

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \ ,$$

e utilizarmos o teorema de Stokes no primeiro membro, de modo a obtermos

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \ , \tag{23}$$

que é a lei de Ampère na forma integral.

Podemos ainda escrevê-la de forma um pouco mais simplificada, notando que, como S é a superfície delimitada por l, o segundo membro de (23) representa a corrente total envolvida pelo percurso l escolhido. Representêmo-la por I_{env}:

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{env} \ , \tag{24}$$

[3]Pode-se mostrar facilmente, entretanto, que o resultado a ser obtido é independente desta escolha particular.

O percurso de integração é muitas vezes denominado *espira amperiana*, em analogia com a *superfície gaussiana* utilizada na lei de Gauss.

Note que I_{env} é a corrente total envolvida por l, cujo sinal deve ser considerado positivo se concordar com o sentido apontado pelo polegar quando os dedos da mão direita abraçam o contorno no sentido convencionado como positivo para este (regra da mão direita), e negativo em caso contrário.

Apendice: Eletrostática

A lei básica da eletrostática é a lei de Coulomb: a força elétrica entre duas cargas q_1 e q_2 situadas respectivamente nos pontos $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ é dada por

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^3} = -\mathbf{F}_{21} \ ,$$

sendo $\mathbf{F}_{12}$ a força exercida pela partícula 2 sobre a carga q_1. Com a definição usual de campo elétrico, o campo produzido num ponto $\mathbf{r}$ por uma distribuição contínua de cargas restrita a um volume V'no espaço e caracterizada por uma densidade volumétrica $\rho(\mathbf{r}')$ é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}dV'$$

A partir daí pode-se mostrar facilmente, através de cálculo direto, que o campo elétrico estático é conservativo, isto é, possui rotacional nulo,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \ ,$$

e que, portanto, admite um potencial escalar, ou seja,

$$\exists\phi|\mathbf{E} = -\nabla\phi \ . \tag{25}$$

O potencial criado por uma distribuição volumétrica de cargas tal como a citada anteriormente é, a menos de uma constante arbitrária,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}dV' \ .$$

Por outro lado, o campo elétrico de uma carga puntiforme, o conceito de ângulo sólido e o princípio da superposição permitem também deduzir a lei de Gauss:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

onde Q_i é toda a carga interior à superfície S. Na forma diferencial esta lei se escreve

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \ .$$

Combinando com (25), resulta a equação de Poisson para o potencial eletrostático,

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \ .$$

Referências

1. J. A. Baêta Segundo, W. J. S. Ursi, *Eletricidade e Magnetismo–Notas Compiladas*, EFEI, 1979.
2. J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1979.
3. D. Halliday, R. Resnick, *Fisíca* , 4a ed., LTC, Rio de Janeiro, 1984.
4. P. A. Tipler, *Fisica*, 2a ed., Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1985.