

Revisitando o Plano Inclinado: Leis de Escala Não-Triviais e a Conexão com Terremotos

(Revisiting the inclined plane: non-trivial scaling laws and the connection with earthquakes)

V. P. Brito

*Universidade Federal do Piauí, Departamento de Física
Campus Ministro Petrônio Portela, 64049-550, Teresina, PI, Brasil*

M.A.F. Gomes

*Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Física,
50670-901, Recife, PE, Brasil*

Trabalho recebido em 5 de abril de 1995

Resumo

Neste artigo descrevemos experimentos de deslizamentos de cilindros maciços de alumínio, latão, teflon e PVC sobre um plano inclinado com evidências de que a distribuição de comprimentos de deslizamentos obedecem a leis de escala não-triviais. Nenhuma dependência significativa do expoente de escala com o material foi observada. Os dados obtidos estão em concordância com a lei de Gutenberg-Richter para a distribuição de terremotos sobre a crosta terrestre e com simulações numéricas exibindo criticalidade auto-organizada realizadas por Chen, Bak e Obukhov.

Abstract

The measured length distributions of slidings (avalanches) from solid cylinders of aluminum, brass, teflon and polyvinyl chloride on a chute show evidence of obeying scaling laws. No significant dependence of the scaling exponent on material was observed and the data obtained are in agreement with Gutenberg-Richter law for the distribution of earthquakes and with numerical simulations exhibiting self-organized criticality made by Chen, Bak and Obukhov.

1. Introdução

Estudos experimentais de dinâmicas sobre superfícies inclinadas remontam a Galileu, no século XVI, e a Coulomb, no século XVIII^[4]. Todo aluno de física elementar sabe, por exemplo, que a distância s percorrida por um objeto de perfil circular descendo um plano inclinado escala (trivialmente) com o tempo t como $s \sim t^2$. Após 1987, ressurgiu o interesse no plano inclinado, principalmente em conexão com criticalidade auto-organizada^[1], atrito em fluxos granulares^[7] e o interesse geral no comportamento de fluxos granulares^[10]. Estes novos problemas apresentam, contudo, leis de es-

cala de um tipo diferente - leis de escala não-triviais, para as quais os expoentes são números não-inteiros de difícil explicação. Especificamente, podemos citar o estudo da distribuição de avalanches que se verifica quando a inclinação de uma pilha de areia excede seu ângulo crítico de repouso ou quando pilhas de areia são perturbadas externamente pela queda de grãos de areia individuais sobre as mesmas^[6,11]. Mais recentemente estudou-se as avalanches de gotas d'água borrifadas sobre uma superfície inclinada^[9]. Distribuições de avalanches de materiais granulares^[6,11,2] ou líquidos^[9] escoando sobre um plano inclinado podem originar leis de escala sobre amplos intervalos de extensões espaciais e

temporais. Estes sistemas (fractais) sem comprimento intrínseco ou escala de tempo próprio têm sido alvo de muita investigação, sendo a sua caracterização e o entendimento das leis de escala um grande desafio. No presente trabalho, reportamos observações da dinâmica de deslizamentos de um único bloco sólido sobre um plano inclinado, as quais evidenciam a existência de leis de escala não-triviais.

2. O Experimento

O arranjo experimental utilizado é ilustrado na Fig. 1, consistindo de uma calha de alumínio de dimensões $320 \times 25 \times 25$ mm ajustável para qualquer ângulo θ , $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, com a horizontal, com uma precisão de $0,1^\circ$. Sobre a parte superior da calha existe um corte em V com 300 mm de comprimento, para servir de guia para os deslizamentos do cilindro. Foram utilizados cilindros de alumínio, latão, teflon e PVC, cujas dimensões são 10 mm a 40 mm de comprimento e 7 mm de diâmetro. Todo o arranjo foi mantido fixo sobre uma mesa isolada de vibrações mecânicas. Acoplado à base da calha existe um martelo de 100,4 g, com liberdade de movimento no plano vertical, permitindo perturbar o cilindro através de impactos controlados. No momento do impacto, a velocidade do martelo era de 50 cm/s. Um experimento consiste, após fixado o ângulo θ , em determinar os comprimentos, λ , de $N_0 = 1000$ eventos de deslizamentos, para cada um dos cilindros. Os ângulos θ escolhidos satisfazem $\theta < \theta_c = \tan^{-1} \mu_e$ (μ_e é o coeficiente de atrito estático) com $0 < (\theta_c - \theta)/\theta_c < 0,33$. Cada deslizamento ocorre em consequência de uma perturbação externa produzida pelo impacto do martelo. Limpezas da calha e cilindro com etanol foram realizadas a cada 100 deslizamentos. Cada experimento, totalizando 1000 eventos, consistia de diversos grupos de λ 's, sendo que cada grupo terminava quando o cilindro colidia com a extremidade inferior da calha. Quando ocorria a colisão, o último evento era descartado e o cilindro recolocado no topo da calha, para iniciar um novo grupo. Os cilindros eram marcados para assegurar as mesmas condições macroscópicas de contato entre estes e a calha. Durante os experimentos, adotamos um valor mínimo de corte de 1 mm para uma avalan-

che e um valor máximo de 278 mm (um grande evento), limitado pelo tamanho da calha utilizada. Para cada um dos materiais (alumínio, latão, teflon e PVC) o experimento foi repetido para 5 diferentes valores de θ , sendo realizados, após os ajustes necessários do arranjo experimental, 20.000 medidas, todas com cilindros de 20 mm de comprimento. Cada deslizamento do cilindro se inicia em um estado meta-estável no qual a interface cilindro-calha é constituída por um número particular de contatos. Quando em repouso, o cilindro armazena uma certa quantidade de tensão distribuída não-homogeneamente entre estes contatos. Após a perturbação pelo martelo, a tensão sobre a interface se modifica. Se em algum desses contatos a tensão superar um certo valor crítico, a tensão total armazenada é liberada e o cilindro escorrega até que o mesmo seja capturado em um novo estado meta-estável, com um diferente padrão de contatos e uma diferente distribuição de tensões. Na verdade, o cilindro vai de um estado meta-estável para outro, devido à perturbação externa. A ausência de qualquer comprimento característico para o sistema é um indicativo claro da ausência de um padrão característico de contatos na interface cilindro-calha e da ausência de qualquer distribuição característica de tensões nesta interface.

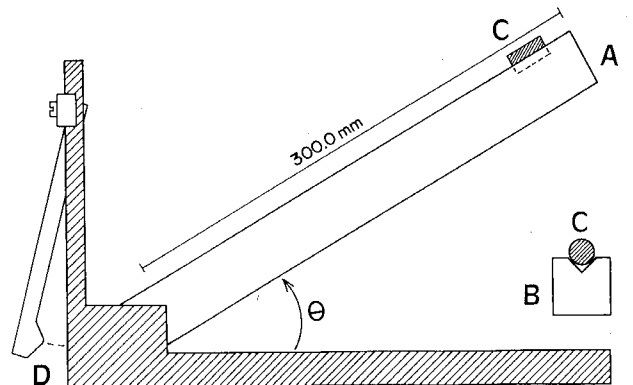


Figura 1: Diagrama esquemático do arranjo experimental: o plano inclinado (A) tem um sulco de 300 mm de comprimento (a secção reta é mostrada em B). Os cilindros (C) são feitos de alumínio, latão, PVC e teflon e tem comprimentos variando de 10 mm a 40 mm. O martelo de 100,4 g (D) se choca com a base do plano inclinado com uma velocidade de 50 cm/s. O arranjo está isolado de vibrações mecânicas externas.

3. Resultados

Os dados coletados foram divididos em 8 grupos correspondendo aos intervalos de valores de λ (em mm): [1,2), [2,4), [4,8), ..., [128,256), objetivando a construção de gráficos $\log \times \log$ da distribuição normalizada de deslizamentos com comprimentos maiores ou iguais a λ , $N(\lambda)/N_0$. Na Fig.2 é mostrado o gráfico de $N(\lambda)/N_0 \times \lambda$ para o cilindro de alumínio de 20mm, de comprimento, para o ângulo $\theta = 35^\circ$, enquanto que na janela da mesma figura é mostrado o gráfico para o cilindro de teflon, de 20mm de comprimento, para $\theta = 15^\circ$. $N(\lambda)$ escala com λ segundo $N(\lambda) \sim \lambda^{-B}$, sobre aproximadamente duas décadas em λ , com $B = 0,55 \pm 0,05$ para o alumínio, $B = 0,55 \pm 0,05$ para o latão, $B = 0,45 \pm 0,05$ para o teflon e $B = 0,50 \pm 0,05$ para o PVC. Assim, dentro da precisão de determinação de B , nenhuma dependência significativa com o material foi observada. Além disso, o expoente B independe de θ no domínio de ângulos investigados.

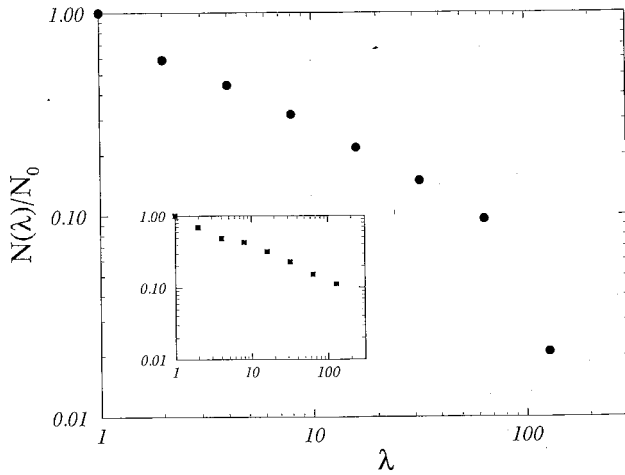


Figura 2: A distribuição normalizada de avalanches com comprimentos maiores ou iguais a λ , $N(\lambda)/N_0$, $N_0 = 1.000$, para um cilindro de alumínio, para $\theta = 35,0^\circ$. Na janela mostramos a mesma função para um cilindro de teflon ($\theta = 15,0^\circ$). Na região de escala $N(\lambda) \sim \lambda^{-B}$ com $B = 0,55 \pm 0,05$ para o alumínio e $B = 0,45 \pm 0,05$ para o teflon (ver seção 3 do texto para detalhes).

Definindo $\bar{\lambda}$ como o comprimento médio de deslizamento, mostramos na Fig. 3 o gráfico $\log \times \log$ de $\bar{\lambda}$ como função de $\theta_c - \theta$, para o cilindro de alumínio. Neste caso, $\bar{\lambda} \sim (\theta_c - \theta)^{-\beta}$, com $B = 0,21$. Para o latão, o teflon e o PVC, o expoente β assume os valores 0,14; 0,23 e 0,32; respectivamente. Da análise da Fig.

2, podemos verificar que a região de escala não se estende para os grandes valores de λ . Para λ grande existe uma tendência para um decréscimo mais rápido em $N(\lambda)$, o que pode ser interpretado como uma consequência do tamanho finito da calha, sendo $N(\lambda)$ dado por $N(\lambda) = N_0 \lambda^{-B_0} \exp[-m(\lambda/\bar{\lambda})]$, onde o termo exponencial é uma função de *crossover*, $\bar{\lambda}$ depende de θ , como indicado no parágrafo anterior, e desempenha o papel de um comprimento de corte, enquanto m é um parâmetro ajustável. Definindo uma distribuição reescalada $\mathcal{N}(\lambda) = N(\lambda)/\{N_0 \exp[-m(\lambda/\bar{\lambda})]\}$, para todos os cilindros e ângulos estudados neste trabalho, construímos o gráfico $\log \times \log$ de $\mathcal{N}(\lambda) \times \lambda$ mostrado na Fig. 4. $\mathcal{N}(\lambda) \sim \lambda^{-B_0}$ para todo o intervalo de comprimento de λ , com $B_0 = 0,45 \pm 0,05$ e $m = 0,11$. As Figs. 2 a 4 se referem aos cilindros de 20mm de comprimento com massas variando por um fator de aproximadamente 5,9. Outros experimentos realizados com cilindros de PVC, com 10mm de comprimento, e latão, com 40mm de comprimento, estendendo a variabilidade de massa por um fator de aproximadamente 23,7, mostram que os expoentes previamente discutidos são independentes da massa do cilindro neste intervalo.

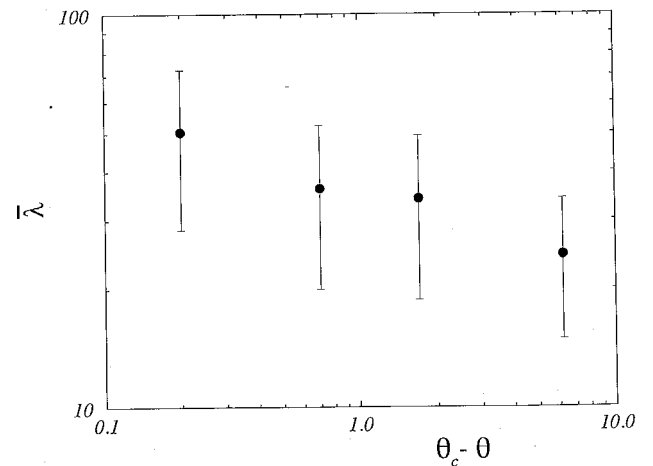


Figura 3: O comprimento médio das avalanches, $\bar{\lambda}$, e as barras de erro para o cilindro de alumínio como uma função de $\theta_c - \theta$. $\bar{\lambda} \sim (\theta_c - \theta)^{-\beta}$, com $\beta = 0,21$. $\theta_c = tg^{-1} \mu_e$, onde μ_e é o coeficiente de atrito estático.

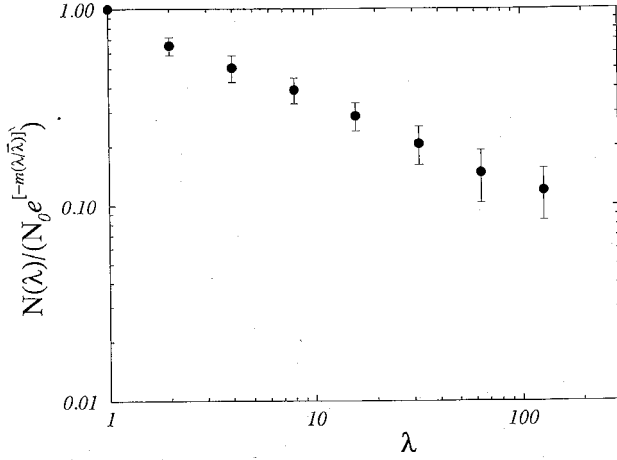


Figura 4: A distribuição reescalada de avalanches $\mathcal{N}(\lambda) = N(\lambda)/\{N_0 \exp[-m(\lambda/\lambda_0)]\}$ para todos os cilindros e ângulos estudados. $\mathcal{N}(\lambda) \sim \lambda^{-B_0}$, $B_0 = 0,45 \pm 0,05$ e $m = 0,11$.

4. Conclusões

Em resumo, observamos distribuições de deslizamentos tipo-leis de escala para um único bloco sólido sobre uma calha inclinada fracamente perturbada. Tais distribuições são análogas a outras observadas em sistemas não-sólidos como pilhas de areia^[6,11] e líquidos^[9]. Como o número de deslizamentos com comprimentos maiores ou iguais a λ escala com $N(\lambda) \sim \lambda^{-B}$, $0,4 < B < 0,6$, a frequência de deslizamentos de comprimento λ , definida como $n(\lambda) = dN(\lambda)/d\lambda$, segue a lei de potência $n(\lambda) \sim \lambda^{-(1+B)}$, com $1,4 < (1+B) < 1,6$, independentemente da escolha do material. A última lei de escala lembra a lei de Gutenberg-Richter^[5] a qual implica em que a frequência, $n(m)$, de terremotos de momento sísmico (ou energia) m segue a lei fenomenológica $n(m) \sim m^{-(1+b)}$, onde $b \approx 0,5 - 0,6$, como estimado do catálogo de terremotos^[3]. O momento sísmico, m , de um terremoto é dado por $m = \mu A \delta$, onde μ é o módulo de cisalhamento da rocha na qual a falha está localizada, A é a área da falha e δ é o deslocamento médio através da falha durante o terremoto^[12]. Em nosso experimento λ tem um papel similar a δ . O expoente $B \approx 0,4 - 0,6$ em nosso experimento tem o mesmo valor, dentro das barras de erro, do correspondente expoente b ($b \approx 0,4$ em $2D$ e $b \approx 0,6$ em $3D$) obtido por Chen, Bak e Obukhov^[3], com o modelo de propagação de falhas. A interface cilindro-calha mostra um comportamento similar às regiões de falhas sujeitas a esforços e deslizamentos no modelo da Ref. 3.

Finalmente, conjecturamos que a interface cilindro-calha tem uma dimensão fractal, D , relacionada ao expoente crítico $B \approx 0,4$ a $0,6$ por $D = d - B$, sendo $d (= 3)$ a dimensão do espaço no qual a interface se encontra imersa.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FINEP e pelo CNPq. Um de nós (VPB) agradece bolsa de pós-doutorado do CNPq e a hospitalidade do LFTC - Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco. MAFG agradece a O. N. Mesquita e I.C. Moreira pelas discussões úteis sobre o trabalho.

Referências

1. P. Bak, C. Tang and I. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
2. M. Bretz, J.B. Cunningham, P.L. Kurczynski and F. Nori, Phys. Rev. Lett. **69**, 2431 (1992).
3. K. Chen, P. Bak and S.P. Obukhov, Phys. Rev. A **43**, 625 (1991).
4. R. Dugas, *A History of Mechanics* (Dover, New York, 1988).
5. B. Gutenberg and C.F. Richter, Ann. Geofis. **9**, 1 (1956).
6. G.A. Held, D.H. Solina II, D.T. Keane, W.J. Haag, P.M. Horn and G. Grinstein, Phys. Rev. Lett. **65**, 1120 (1990).
7. H.M. Jaeger, C.-h. Liu, S.R. Nagel and T.A. Witten, Europhys. Lett. **11**, 619 (1990).
8. H.M. Jaeger, C.-h. Liu and S.R. Nagel, Phys. Rev. Lett. **62**, 40 (1989).
9. B. Plourde, F. Nori and M. Bretz, Phys. Rev. Lett. **71**, 2749 (1993).
10. T. Pöschel, J. Phys. II France **3**, 27 (1993); Proceedings of the Workshop on Dynamics of Powder Systems, Y.-h. Taguchi, H. Hayakawa, S. Sasa, and H. Nishimori (eds), Int. J. Mod. Phys. B **7**, N9&10 (1993).
11. J. Rosendahl, M. Vekić and J. Kelley, Phys. Rev. E **47**, 1401 (1993).
12. D.L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).