

## A Crônica do Cálculo: II. A Época de Newton e Leibniz\*

José Maria Filardo Bassalo

*Departamento de Física da Universidade Federal do Pará  
66075-900, Belém, Pará, Brasil*

Trabalho recebido em 30 de outubro de 1995

Nesta **Crônica** vamos mostrar como se desenvolveu o que hoje conhecemos como **Cálculo Diferencial e Integral**. Nesta segunda parte, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo devido, principalmente, aos trabalhos de Newton e Leibniz.

### Abstract

In this **Chronicle** we show how was developed what today means **Integral and Differential Calculus**. In this second part, we study the development of this Calculus due, mainly, to the Newton's and Leibniz's works.

### 1. Introdução

Na primeira parte da Crônica,<sup>1</sup> vimos como se desenvolveu o **Cálculo Diferencial e Integral** desde a Antiguidade até os trabalhos que antecederam aos de Newton e Leibniz. Nesta segunda parte,<sup>2</sup> estudaremos os trabalhos de Newton e de Leibniz e de seus contemporâneos.

As principais contribuições do físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) para o desenvolvimento do **Cálculo**, aconteceram no período entre 1664 e 1676, quando estudou os principais livros escritos, até então, sobre Matemática.<sup>3</sup> Vejamos essas contribuições.

Newton havia aprendido, no livro de Wallis, como este realizava o cálculo de áreas sob curvas, considerando-as como soma estática de infinitesimais. Para esse cálculo, Wallis utilizava-se de induções, interpolações, aproximações e logaritmos, trabalhando no domínio do infinito, isto é, com séries infinitas.<sup>4</sup> Então, no inverno de 1664-1665, estendeu o método de Wallis usando expansões binomiais em termos dessas séries.<sup>5</sup> Com a expansão (teorema) binomial, Newton observou que poderia encontrar a área abaixo de praticamente qualquer curva algébrica, e expressá-la em loga-

ritmos. Assim, entusiasmado com a descoberta, ele calculou diversos logaritmos das áreas sob uma hipérbole equilátera até 55 casas decimais. Na primavera de 1665, Newton demonstrou que o problema das tangentes (diferenciação, na linguagem atual) e o das quadraturas (integração, também na linguagem atual) apresentavam entre si uma relação inversa, relação que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo.

Na primavera-verão de 1665, Newton descobriu um novo aspecto para tratar o problema das tangentes e quadraturas. Até então, conforme vimos, ele havia considerado as áreas como somas estáticas de infinitesimais, no mesmo estilo de Wallis. No entanto, naquela ocasião, passou a tratar as áreas cinematicamente, como se fossem varridas por uma linha móvel. No outono de 1665, estendeu essa abordagem cinemática à geração de curvas, e tratou-as como o lugar geométrico (**locus**) de um ponto que se deslocava em condições determinadas. Com essa idéia de movimento, passou a considerar suas variáveis como geradas por movimentos contínuos de pontos, linhas e planos, o que lhe permitiu derivar o termo **fluxional** e suas variantes. Assim, a essas variáveis (por exemplo, **x** e **y**) denominou-as de

\*Este artigo é em homenagem ao meu amigo PAULO RENATO BENTIVEGNA, médico paulista, estudioso e entusiasta do Cálculo.

**fluentes** e às suas velocidades chamou-as de **fluxões**, e denotadas por **p** e **q**, respectivamente. Ainda nesse estudo baseado no movimento, Newton afirmou que “as linhas infinitamente pequenas” descritas pelos corpos a cada momento eram as velocidades com que eles as descreviam, e que a razão entre as velocidades de **y** e **x** em qualquer ponto de uma curva, definia a tangente nesse ponto.<sup>6</sup>

O método baseado no movimento foi também explorado por Newton em três outras ocasiões: 13 de Novembro de 1665, 14 e 16 de Maio de 1666. Por fim, em Outubro de 1666, em um manuscrito intitulado *To Resolve Problems by Motion (Para Resolver Problemas pelo Movimento)*, Newton apresentou a exposição de seu **método das fluxões**,<sup>7</sup> embora com uma notação provisória e ainda complicada.

A partir do final de 1666, Newton afastou-se um pouco da matemática e passou a se dedicar ao estudo do movimento dos corpos, da luz e das cores, temas que já havia questionado (juntamente com alguns temas matemáticos), enquanto aluno do Trinity College da Universidade de Cambridge,<sup>8</sup> e que os havia registrado em um caderno de apontamentos, com o título de *Quaestiones quaedam Philosophicae*, escrito, provavelmente, por volta de 1664.<sup>9</sup>

A publicação dos livros do matemático escocês James Gregory (1638-1675), *De Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, em 1667, *Geometriae Pars Universalis e Exercitationes Geometricae*, em 1668, e do livro *Logarithmotechnia* do matemático alemão Nikolaus Mercator (Kauffmann) (1620-1687), também em 1668, fez com que Newton voltasse novamente sua atenção para a Matemática. Nesses livros, há o cálculo de quadraturas por intermédio de representações em série.<sup>10</sup> Como, anteriormente, Newton já havia obtido quadraturas, usando um método que desenvolvera e envolvendo, também, representações em séries, conforme vimos acima, resolveu então expor esse método no manuscrito intitulado *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas (Sobre a Análise de Equações com Número Ilimitado de Termos)*, escrito em 1669.<sup>11</sup>

O método usado por Newton e descrito no *De Analysis*, consistia em obter quadraturas por um processo

geral e inverso ao utilizado para se traçar tangentes a curvas. Com efeito, Newton demonstrou que a área **z** sob a curva  $y = ax^{\frac{m}{n}}$  é dada por  $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$ . Para fazer a demonstração, Newton considerou um acréscimo infinitesimal da variável **x** (denominado por ele de **momento de x** e denotado por **o**), com o correspondente aumento **oy** (**momento da área**) para a área **z**.<sup>12</sup> Com isso, obteve a área aumentada na forma:  $z + oy = \frac{n}{m+n}a(x + o)^{\frac{m+n}{n}}$ . Em seguida, aplicou a expansão binomial ao lado direito dessa equação, cancelou termos semelhantes, dividiu tudo por **o**, desprezou termos que ainda continham **o**, e obteve finalmente que  $y = ax^{\frac{m}{n}}$ .<sup>13</sup>

Uma exposição mais completa sobre o método do cálculo de tangentes e de quadraturas (por intermédio de **fluentes** e **fluxões**), desenvolvido entre 1665 e 1666, foi apresentada por Newton no manuscrito *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum (Tratado dos Métodos das Séries e Fluxões)*, manuscrito iniciado no inverno de 1670-1671 e que, contudo, nunca foi concluído.<sup>14</sup> Ainda nesse manuscrito, Newton apresentou um grande número de aplicações das fluxões, tais como, diferenciações de funções implícitas, cálculos de tangentes, de máximos e mínimos, de pontos de inflexão, e de curvaturas de curvas, chegando, neste último caso, a calcular corretamente os seus raios de curvatura,<sup>15</sup> dado por (na notação de hoje):  $R = \frac{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}$ .<sup>16</sup>

Quando o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) começou a publicar seu trabalho sobre o Cálculo Diferencial, em Outubro de 1684, no *Acta Eruditorum Lipsiensium (Ata dos Eruditos de Lípsia (Leipzig))*, Newton considerou a hipótese de também publicar seus trabalhos sobre Matemática. Assim, em meados de 1691, resolveu dar continuidade a um manuscrito que começara em 1676, intitulado *De Quadratura Curvarum (Sobre a Quadratura das Curvas)*,<sup>17</sup> escrevendo então um novo manuscrito, no qual apresentou um conjunto de problemas resolvidos pelo método das fluxões, problemas semelhantes aos que Leibniz havia resolvido com o seu próprio método. Além disso, considerou um sistema de notações como alternativa ao apresentado por Leibniz. Portanto, foi no *De Quadratura* que adotou, em definitivo, a notação  $\dot{x}$  para representar a fluxão de **x**, assim como a notação

$x'$  para representar o fluente cuja fluxão é  $x$ , além de experimentar o  $Q$  (de **quadratura**) como substituto de  $\int$  usado por Leibniz. E mais ainda, dobrando os pontos (.) e as linhas ('), Newton representou, respectivamente, fluxões de fluxões e fluentes de fluentes.

Ainda no *De Quadratura*, Newton abandonou a idéia de acréscimos infinitesimais e explicou o método das fluxões em termos de **razões**: **primeira razão de quantidade finita nascente** e **última razão de quantidade ínfima**. Vejamos como Newton introduziu esses conceitos, ao calcular, por exemplo, a fluxão da função  $y = x^n$ .<sup>18</sup> Assim, para encontrar a fluxão de  $y$ , Newton deixou  $x$  “fluir”, isto é, tornar-se  $x + o$  e, portanto,  $x^n$  tornar-se-ia:

$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$ . Newton observou então que os aumentos de  $x$  e  $y$ , a saber,  $o$  e  $nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$  estavam relacionados entre si como 1 e  $nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \dots$  que, para ele, significava a **primeira razão**. Ao fazer nesta razão  $o$  desaparecer, encontrou a **última razão**, isto é: 1:  $nx^{n-1}$ . Portanto, concluiu que a fluxão da quantidade  $x$  está relacionada à fluxão da quantidade  $x^n$ . Na linguagem de hoje, teríamos: Se  $y = x^n$ , então  $\lim_{o \rightarrow 0} \left( \frac{o}{(x+o)^n - x^n} \right) = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{\dot{x}}{y}$ . Em vista disso, o **método de razões** é hoje reconhecido como o precursor da **Teoria dos Limites**.

Newton conseguiu publicar suas idéias sobre o Cálculo em seu famoso livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural)*, editado em 1687.<sup>19</sup> Embora esse livro seja bastante conhecido como aquele em que apresentou os fundamentos da Física e da Astronomia em linguagem de geometria pura, em algumas partes do mesmo, Newton lançou mão de métodos analíticos. Com efeito, o **método de razões** que havia desenvolvido no *De Quadratura*, ele o utilizou para a demonstração de diversos Lemas do Livro I, intitulado *O Movimento do Corpus*. Por exemplo, o Lema I, diz que: - “As quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do fim daquele tempo aproximam-se mais de uma da outra do que por qualquer diferença dada, tornando-se finalmente iguais”. Isto é, certamente, uma

tentativa de definir limite de uma função. Por outro lado, no Lema VII, ele demonstrou que a secante a um arco transforma-se em uma tangente, quando se usam “as últimas razões”.<sup>20</sup>

Muito embora Newton haja utilizado o método das razões na demonstração de alguns Lemas do Livro I, conforme registramos acima, somente no Livro II do *Principia*, apresentou os algoritmos de seu método de cálculo.<sup>21</sup> Por exemplo, no Lema II do Livro, escreveu: - “O momento de qualquer genitum é igual aos momentos de cada um dos lados geradores, multiplicado pelos índices das potências desses lados, e por seus coeficientes continuamente”. Para demonstrar esse Lema, Newton primeiro definiu o **genitum** e seu **momento**.<sup>22</sup> Em seguida, designando por  $a, b, c$  os momentos respectivos de  $A, B, C$ , calculou o momento de alguns **genita**. Por exemplo, para o genitum  $A^3B^4C^2$ , obteve o seguinte momento:  $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$ , assim como para o genitum  $A^3B^{-2}$ , o momento respectivo obtido por Newton foi  $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$ . Por essas expressões, vê-se que os **momentos** introduzidos por Newton, significam os **diferenciais** de hoje.

Novas contribuições para o desenvolvimento do **Cálculo**, porém, diferentemente das de Newton, foram apresentadas por Leibniz no período de 1672 a 1676, quando se encontrava em Paris, cumprindo uma missão diplomática, e a partir de 1676, quando tornou-se bibliotecário e conselheiro do Elector de Hanover. Logo que chegou a Paris, em 1672, encontrou-se com o físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695), que trabalhava na Academia Francesa de Ciências. Como Leibniz já havia feito alguns trabalhos envolvendo Matemática,<sup>23</sup> nesse encontro, mostrou desejo de tornar-se um matemático, o que motivou Huygens<sup>24</sup> a recomendá-lo, principalmente, a leitura dos trabalhos dos matemáticos, os franceses René Descartes (1596-1650) e Pascal, o belga René-François Sluse (1622-1685), o escocês Gregory e o italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Assim, em 1673, ao estudar o “triângulo” dos acréscimos nos trabalhos de Pascal (ao qual deu o nome de **característico**, conforme já dissemos), Leibniz apresentou sua **regra de transmutação**: - “A área sob uma curva pode ser considerada como sendo a soma

das áreas de retângulos pequenos, mas também como a soma das áreas de triângulos pequenos”. Ao aplicar essa regra a um grande número de curvas, pôde deduzir facilmente a quadratura da parábola e da hipérbole. Por outro lado, ao aplicá-la “à quadratura aritmética do círculo”, encontrou a famosa série:  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ .<sup>25</sup>

Ainda em 1673, Leibniz foi a Londres onde se encontrou com cientistas ingleses (dentre eles, Boyle, Collins e Hooke) e, também, com Oldenburg, que era secretário da **Royal Society**, conforme já referimos. Nessa ocasião, tomou contato com os trabalhos de Barrow e de Gregory, e percebeu que havia redescoberto técnicas que já eram conhecidas por esses dois matemáticos, técnicas essas que indicavam que as determinações de áreas e de tangentes são operações inversas.

De volta à França, Leibniz começou a preparar os famosos manuscritos de 1675 (datados de 25, 26 e 29 de Outubro e 1 e 11 de Novembro) que constituem suas principais contribuições ao Cálculo. Assim, nos manuscritos de 25 e 26 de Outubro, iniciou seus estudos sobre o cálculo de áreas, usando o simbolismo introduzido por Cavalieri, quer dizer, ele escreveu “*omn.ℓ*”, como abreviação para “*omnes ℓ*” (“*todos os ℓ*”), para indicar a área de uma curva cujas ordenadas são *ℓ*. No manuscrito de 29 de Outubro, inicialmente, Leibniz apresentou a regra de integração por partes: *omn. xℓ*  $\square$  *x omn. ℓ* - *omn.omn. ℓ e*, com ela, mostrou que *omn. x<sup>3</sup>* =  $\frac{x^3}{3}$ . No entanto, ainda nesse manuscrito, Leibniz decidiu, repentinamente, substituir **omn.** pelo símbolo *f*, que é o **s** estilizado de calígrafo, que significa **suma** (soma). Ainda nesse manuscrito, Leibniz encontrou regras para operar com *f*: *f a ℓ* = *a f ℓ*, se **a** for uma constante e *f (y + z)* = *f y* + *f z*, bem como introduziu o símbolo **d** para denotar a diferenciação como operação inversa de tomar a quadratura; porém, esse símbolo atuava como um denominador, conforme se pode ver segundo escreveu nesse manuscrito: -“Suponha que *f ℓ*  $\square$  *ya*. Seja *ℓ*  $\square$   $\frac{ya}{d}$ , então, assim como *f* aumenta, **d** diminui as dimensões”. Mais tarde, no manuscrito de 11 de Novembro observou que nem *f* aumenta a dimensão, e nem **d** diminui, e que, realmente, *f* significa

uma **soma** e **d** uma **diferença**. Desse modo, passou a usar **dy**, e começou a procurar regras para o símbolo **d**, pois estava convencido de que  $d(uv) \neq du \cdot dv$  e  $d(\frac{u}{v}) \neq \frac{du}{dv}$ .

Novos resultados para o desenvolvimento de **seu** Cálculo, Leibniz os obteve a partir de 1676, já em Hannover. Por exemplo, em um manuscrito de 26 de Junho desse ano, demonstrou que a melhor maneira de encontrar tangentes a curvas é obter  $\frac{dy}{dx}$ , onde **dy** e **dx** são diferenças e  $\frac{dy}{dx}$  representa um quociente. Para chegar a esse resultado, considerou (sem nenhuma explicação) que o produto *dy.dx* e potências mais altas de **dx** deveriam ser desprezados. Em manuscrito escrito em Novembro daquele mesmo ano, Leibniz encontrou regras gerais para  $dx^n = nx^{n-1}dx$  e  $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , com **n** inteiro ou fracionário, assim como obteve a **regra da cadeia** ao escrever: - “Para diferenciar a expressão  $\sqrt{a + bz + cz^2}$ , façamos  $a + bz + cz^2 = x$ , diferenciemos  $\sqrt{x}$  e multipliquemos o resultado por  $\frac{dx}{dz}$ ”.

Em um manuscrito datado de 11 de Julho de 1677, Leibniz apresentou as regras corretas para se obter a diferencial da soma, do produto e do quociente de duas funções, porém, sem demonstrá-las. Em 1680, atribuiu para **dx** e **dy** os significados, respectivos, de diferenças de abscissas e de ordenadas, sendo que para **dy** nomeou especificamente de **diferença momentânea**. Ainda nesse mesmo ano, mostrou que para se obter a área sob uma curva, bastaria somar retângulos de altura **y** e de base **dx**, isto é, bastaria calcular  $\int y dx$ ; apresentou, também, a fórmula para calcular o elemento de arco ( $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ) e o volume de um sólido de revolução obtido pela revolução de uma curva em torno do eixo dos **x**:  $V = \pi \int y^2 dx$ .

O cálculo desenvolvido por Leibniz em manuscritos, conforme vimos até aqui, foi finalmente publicado no *Acta Eruditorum* o primeiro periódico científico da Alemanha, criado em 1682.<sup>26</sup> Assim, em Outubro de 1684, esse periódico trouxe um artigo de Leibniz,<sup>27</sup> no qual as regras de operação de **d**, apresentadas em 1677, foram então demonstradas.<sup>28</sup> Ainda nesse artigo, Leibniz fez aplicações de seu método ao demonstrar como se calcula tangentes, máximos e mínimos ( $dv = 0$ ), concavidade e convexidade, e pontos de inflexão ( $d dv = 0$ ),

para diversas curvas.

Leibniz continuou apresentando, no *Acta*, novos resultados decorrentes da aplicação de seu método de cálculo. Para mostrar que, em algumas situações, o seu método era melhor, no artigo publicado no *Acta* de Junho de 1686, obteve a equação da cicloide na forma  $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$ . Ainda nesse trabalho, Leibniz estudou a curvatura e o círculo oscultriz de uma curva em um dado ponto,<sup>29</sup> bem como apresentou a célebre fórmula para calcular a derivada enésima do produto de duas funções.<sup>30</sup> Nos *Acta* de 1692, 1693 e 1694, Leibniz encontrou um método geral para se obter o envelope de uma família de curvas,<sup>31</sup> como, também, mencionou regras para a diferenciação de funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais.<sup>32</sup>

As últimas contribuições de Leibniz para o desenvolvimento do cálculo, apareceram em cartas que escreveu a John Bernoulli, em 1697. Nelas, apresentou a diferenciação de uma integral, com relação a um determinado parâmetro. Também, apresentou a idéia de que muitas integrais indefinidas poderiam ser resolvidas se fossem reduzidas a formas conhecidas, assim como pensou num modo de preparar tabelas para tais reduções, isto é, **tabelas de integrais**. Procurou ainda definir diferenciais de ordens mais altas, tais como **ddy** e **ddydy**, procurando encontrar, sem muito êxito, um significado para **d<sup>α</sup>y**, onde  $\alpha$  é qualquer número real. Por fim, em 1714, dois anos antes de sua morte, Leibniz escreveu *Historia e Origo Calculi Differentialis (História e Origem do Cálculo Diferencial)* no qual relatou o desenvolvimento de seu próprio pensamento sobre o Cálculo. Nesse livro, Leibniz usou a palavra **função** para representar quantidades que dependem de uma variável.

Ao concluirmos essa segunda parte da **Crônica do Cálculo** na qual estudamos as principais contribuições de Newton e Leibniz para o seu desenvolvimento, vejamos as principais diferenças entre essas contribuições. A primeira delas refere-se às **quantidades variáveis**. Enquanto Newton considerou-as como **dependentes do tempo**, Leibniz tomou-as como **percorrendo seqüências de valores infinitamente próximos**. A segunda diferença relaciona-se

com o conceito de variação daquelas quantidades. Newton tratou a taxa de variação de uma variável através do conceito de **fluxão**. Leibniz, por sua vez, tratou-a por intermédio do conceito de **diferencial**. A terceira diferença está ligada ao conceito de integração. Para Newton, esta tinha como tarefa apenas a função de encontrar os **fluentes** para as fluxões dadas. Já Leibniz interpretou-a como um somatório. Os **infinitesimais** constituem a quarta diferença. Newton considerou-os apenas como mecanismo de encontrar as fluxões. Leibniz, contudo, tratou-os realmente como pequenos acréscimos.<sup>33</sup>

A quinta diferença entre as contribuições de Newton e Leibniz ao desenvolvimento do Cálculo, diz respeito ao uso de **séries** para representar as funções resultantes da solução das equações diferenciais. Newton usou-as sistematicamente, enquanto Leibniz preferiu a forma fechada. Por fim, a maneira de trabalhar com o Cálculo constitui a sexta diferença. Newton era empírico e concreto, Leibniz era especulativo e generalista. Por exemplo, enquanto Leibniz usou notações para representar a diferenciação (d) e a integração ( $\int$ ), e obteve regras para essas operações, Newton usou apenas a notação (.) para representar as fluxões e não se preocupou em obter regras para aquelas operações.<sup>34</sup>

## Notas e Referências Bibliográficas

1. BASSALO, J. M. F. 1995. *A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz*. CCEN-DF-005/95.
2. Para escrever este artigo, nos baseamos nos seguintes textos: BARON, M. E. 1985. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*, Unidades 1 e 2; BARON, M. E. e BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidade 3; BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidades 4 e 5, da Open University. Editora da Universidade de Brasília; BOYER, C. B. 1968. *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons; CASINI, P. 1995. *Newton e a Consciência Européia*. Editora UNESP; KLINE, M. 1974. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University

- Press; PLA, C. 1945. *Isaac Newton*. Espasa-Calpe Argentina, S.A.; RONAN, C. A. 1987. *História Ilustrada da Ciência*. Jorge Zahar Editor; SEDGWICK, W. T., TYLER, H. W. e BIGELOW, R. P. 1950. *História da Ciência*. Editora Globo; STRUIK, D. J. (Editor) 1969. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press; WESTFALL, R. S. 1995. *A Vida de Isaac Newton*. Editora Nova Fronteira.
- Segundo seu próprio depoimento, Newton estudou o *Elementos de Geometria* do matemático grego Euclides de Alexandria (323-285); o *Exercitationes Mathematicae (Exercícios de Matemática)* (1657) e o *Geometria a Renato Des Cartes (Geometria de René Descartes)* (1659) do matemático holandês Frans van Schooten (1615-1660); o *Clavis Mathematicae (A Chave da Matemática)* (1631) do matemático inglês William Oughtred (1574-1660); o *Arithmetica Infinitorum (Aritmética do Infinito)* (1655) do matemático inglês John Wallis (1616-1703); e o *In Artem Analyticem Isagoge (Introdução à Arte Analítica)* (1591) do matemático francês François Viète (1540-1603). Essas leituras, possivelmente, levaram Newton a escrever para o físico Robert Hooke (1635-1703), sua famosa frase: - “Se vi mais longe do que Descartes, foi porque subi em ombros de gigantes”.
  - Em seu *Arithmetica Infinitorum*, Wallis chegou a demonstrar que  $\sum_{n=1}^p \frac{1}{n^{p+1}} \rightarrow \frac{1}{p+1}$ , onde **p** pode assumir qualquer valor, positivo, negativo, ou fracionário. Usando seu método, Wallis tentou resolver o problema da quadratura do círculo expandindo  $\sqrt{1-x^2}$  em série e, para depois, integrá-la termo a termo. Não obteve sucesso, porém conseguiu encontrar o valor de  $\pi$  por intermédio de um produto infinito:  $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \dots}$ . Observe-se que esse problema foi resolvido por Newton, ao descobrir a expansão binomial, conforme veremos a seguir.
  - Para chegar à expansão ou teorema binomial  $((x+y)^m)$ , com **m** inteiro ou fracionário, positivo ou negativo), Newton se baseou num outro conceito novo, a fração decimal, que podia ser usada para calcular, por exemplo, o valor de  $\pi$ , tão rigorosamente quanto se quisesse, bastando para isso aumentar o número de casas decimais. Essa expansão binomial foi descrita por Newton em duas cartas que enviou, em 13 de Junho e 24 de Outubro de 1676, a Henry Oldenburg (c.1615-1677), secretário da **Royal Society**, e que, por sua vez, as enviou a Leibniz. (Note-se que a expansão binomial para **m** inteiro, já era conhecida pelos trabalhos dos matemáticos, o persa Omar Khayyam (c.1050-1123), o chinês Yang Hui (f.c.1261-1275), o alemão Peter Apian (1495-1552), o italiano Niccolò Fontana de Brescia (Tartaglia) (c.1550-1557), e o francês Blaise Pascal (1623-1662).)
  - A idéia de velocidade considerada por Newton escondia uma outra variável, invisível: o **tempo**. Desse modo, parece que é neste ponto que o conceito de **tempo absoluto** entrou como fundamentação lógica no pensamento newtoniano. (WESTFALL, op. cit.)
  - Esses trabalhos de Newton só foram organizados e publicados em 1962, por A. Rupert Hall e M. Boas Hall, pela Cambridge University Press, com o título: *Unpublished Scientific Papers of Sir Isaac Newton*.
  - Newton foi matriculado nesse Colégio no dia 5 de Junho de 1661, como pensionista pobre (**subsizar**), e percorreu regularmente todas as etapas do currículo: **Scholar** em 1664, **Bachelor of Arts** em 1665, **Major Fellow** e **Master of Arts** em 1668.
  - Essas *Questiones* resultaram de reflexões que Newton fez sobre a leitura de vários autores, dentre os quais se destacam o químico inglês Robert Boyle (1627-1691), o filósofo francês Pierre Gassendi (1592-1655), o poeta e filósofo inglês Henry More (1614-1687), além de Descartes e Hooke.

10. No *De Vera Circuli*, Gregory apresentou uma série de cálculos de quadraturas usando o método dos infinitesimais. Ainda nesse livro, Gregory definiu uma **função** como uma quantidade obtida de outras quantidades por intermédio de uma sucessão de operações algébricas ou por um outro tipo de operação inimaginável, sendo esta última uma espécie de passagem ao limite. Nos outros dois livros, Gregory obteve a representação em série de algumas funções, por intermédio do método de quadraturas. Por exemplo, ele encontrou a representação em série da função  $\arctg x$ , dividindo 1 por  $1 + x^2$  e aplicando o método da quadratura a cada termo da série resultante dessa divisão. Na linguagem atual, essa **série de Gregory**, é obtida da seguinte maneira:  $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctg x$ . Gregory também obteve a representação em série de outras funções trigonométricas, mais tarde obtidas pelos matemáticos, o inglês Brook Taylor (1685-1731) e o escocês Colin Maclaurin (1698-1746). Em seus trabalhos, Gregory observou que o cálculo de quadraturas e de retificação de curvas, era inverso ao cálculo de traçar tangentes a curvas, assim como havia demonstrado que (na notação moderna)  $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tg x)$ . Por sua vez, usando o método de Gregory, Mercator obteve uma representação em série para a função  $\ln(1+x)$ . Na linguagem atual, essa **série de Mercator** é obtida da seguinte maneira:  $\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x)$ . É oportuno observar que o termo **logaritmo natural** ( $\ln$ ), já havia sido usado pelo matemático italiano Pietro Mengoli (1625-1686), em 1650.

11. Newton mostrou esse trabalho a seu amigo, o matemático inglês Isaac Barrow (1630-1677) que, imediatamente, o enviou ao matemático inglês John Collins (1625-1683) (que era, também, um empresário da Matemática), em nome de “um amigo meu daqui que tem uma certa qualidade

para tratar este assunto”. Somente em agosto de 1669, Collins soube que “esse amigo de Barrow”, era Newton. Collins, por sua vez, fez circular esse manuscrito de Newton entre os maiores matemáticos europeus (menos a Wallis, devido sua fama de plagiador), sendo finalmente editado pelo matemático inglês William Jones (1675-1749), em 1711. Aliás, é oportuno destacar que foi esse matemático quem introduziu o símbolo  $\pi$ , para representar a relação entre o comprimento e o diâmetro da circunferência, em 1706, no livro *Synopsis Palmariorum Matheseos (Nova Introdução à Matemática)*.

12. Antes de escrever o *De Analysi*, Newton usava a notação **o** que representava pequeno intervalo de tempo e as notações **op** e **oq** para representar as pequenas variações experimentadas por **x** e **y** durante esse mesmo intervalo de tempo. Por exemplo, a tangente à curva  $y^n = x^m$ , era calculada por Newton, da seguinte maneira:  $(y + oq)^n = (x + op)^m$ . Em seguida, expandia ambos os termos pelo teorema binomial, dividia tudo por **o**, desprezava os termos que ainda continham **o** e, por fim, obtinha:  $\frac{q}{p} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$ , que representa a tangente à curva  $y = x^{\frac{m}{n}}$ . No *De Analysi*, conforme dissemos, Newton usou **o** para representar um pequeno acréscimo na variável independente, a mesma notação usada por Gregory, em seu *Geometriae*, de 1668, e que substituiu a notação **E** usada pelo matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) em seu livro *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam (Método de Encontrar Máximos e Mínimos)*, de 1637, e a notação e usada por van Schooten. Aliás, é oportuno destacar que a escolha da notação **o** para representar uma quantidade pequena e, que, subsequentemente deve ser considerada nula, já havia sido utilizada por Jean de Beaugrand por volta de 1638, ao estudar os trabalhos de Fermat.

13. Na linguagem moderna, Newton demonstrou, por exemplo, que: - Dado  $z = ax^s$  (com  $s$  inteiro ou fracionário) então:  $\frac{dz}{dx} = y = sax^{s-1}$ . Isso signi-

fica, também, que: - Dada uma curva  $y = sax^{s-1}$ , a área sob a mesma vale  $z = ax^s$ .

14. Esse manuscrito é baseado num comentário feito por Newton (a pedido de Barrow, no outono de 1669), sobre o livro *Algebra* do matemático holandês Gerard Kinckhuysen, que havia sido recentemente traduzido do holandês para o latim. É interessante destacar que, muito embora Newton, desde 1665, usasse ora a notação “com ponto”, ora a notação literal, para representar as fluxões, na versão original do *Methodis*, de 1671, Newton usou apenas os símbolos literais l, m, n, r para representar, respectivamente, as fluxões de v, x, y, z. Somente na década de 1690, passou a adotar somente a notação “com ponto”, segundo veremos mais adiante. Destaque-se, ainda, que Jones fez uma transcrição do *Methodis*, em 1710, em que inseriu a notação “com ponto”, a qual foi copiada em todas as edições publicadas desse manuscrito, a partir de 1736, sua primeira edição na língua inglesa, feita por John Colson ( ? -1760).
15. É oportuno registrar que as primeiras investigações sobre curvatura foram realizadas por Newton, em 20 de fevereiro de 1665, em meio aos exercícios quadregesimais, prática comum naquela época em que as pessoas ficavam **in quadregesima**, durante o período da Quaresma.
16. Ainda no *Methodis*, Newton apresentou suas primeiras contribuições ao desenvolvimento da Geometria Analítica, ao sugerir novas maneiras de representar curvas em oito sistemas coordenados. Por exemplo, na “terceira maneira”, Newton introduziu a hoje chamada coordenada bipolar. Assim, se **x** e **y** significam as distâncias de um ponto variável a dois pontos fixos ou pólos, então as equações:  $x + y = a$ ,  $x - y = b$  e  $ax + by = c$ , representam a elipse, a hipérbole e as ovais de Descartes, respectivamente. A sua “sétima maneira”, utilizada para encontrar a subtangente da espiral de Arquimedes, é a hoje familiar coordenada polar. Usando esse tipo de coordenada, Newton obteve a seguinte expressão para o raio de curvatura R:  $R \sin \phi = \frac{y + yzz}{1 + zz - \frac{y}{z}}$ , onde  $z = \frac{\dot{y}}{y}$  e  $\phi$  é o ângulo entre a tangente e o raio vetor.
17. Esse trabalho de Newton foi incorporado por Wallis no Volume II de sua *Opera Mathematica*, publicado em 1693. Newton, contudo, o publicou como apêndice de seu *Opticks* (*Óptica*), em 1704, sendo o mesmo reimpresso por Jones, em 1711. É interessante registrar que Newton incorporou ainda um segundo apêndice a esse livro, qual seja, o pequeno trabalho intitulado *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* (*Enumeração das Curvas de Terceiro Grau*), escrito também em 1676, no qual essas curvas são, pela primeira vez, representadas em gráficos de dois eixos coordenados, envolvendo, inclusive, coordenadas negativas, já que estas não eram muito familiares aos matemáticos da época. Desse modo, através desse trabalho, Newton apresentou mais uma grande contribuição à Geometria Analítica. Devemos ainda registrar que Newton também contribuiu para o desenvolvimento da Álgebra, num trabalho escrito entre 1673 e 1683, e publicado em 1707, com o título *Arithmetica Universalis* (*Aritimética Universal*). Nesse livro, há fórmulas (conhecidas como **Identidades de Newton**) para se conhecer a soma das potências das raízes de uma equação polinomial. Esse assunto já havia sido tratado pelos matemáticos, o francês Viète, o italiano Gerolamo Cardano (Jerome Cardan) (1501-1576), e o flamengo Albert Girard (1590-1633). Este, em 1629, havia demonstrado como calcular a soma dos quadrados, cubos e quarta potência daquelas raízes, porém, foi Newton quem a generalizou. Ainda nesse livro, Newton generalizou também as regras obtidas pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), para determinar o número de raízes imaginárias de um polinômio, e o limite superior das raízes positivas desse mesmo polinômio.
18. Newton não usava a notação  $(x^n)$  para representar a potência **n-ésima de x** e sim  $\neg$  encimando



- x.
19. Na primeira edição do *Principia* (1687), Newton admitiu que Leibniz havia também desenvolvido um método de cálculo semelhante ao seu. Contudo, na 2<sup>a</sup> (1713) e 3<sup>a</sup> (1726) edições desse livro, Newton omitiu o nome de Leibniz, muito embora haja citado outros nomes que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo.
  20. NEWTON, I. 1990. *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, NOVA STELLA/EDUSP.
  21. Nesse Livro II, Newton tratou de problemas relacionados com corpos que se movem em um meio que oferecem resistência ao movimento. Na notação atual, Newton resolveu problemas do tipo:  $\ddot{x} = g - k\dot{x}$  e  $\ddot{x} = g - k(\dot{x})^2$ .
  22. Newton denominou de **genitum** o que hoje chamamos de **termo**, que depende de uma variável, e de **momento de um genitum** a um aumento infinitesimal do genitum.
  23. Os trabalhos realizados por Leibniz envolvendo Matemática, foram os seguintes. Em 1666, em sua Tese de Doutorado em Direito, intitulada *De Arte Combinatoria (Sobre a Arte de Combinações)*, defendida na Universidade de Altdorf, em Nuremberg, ele havia considerado seqüências de números, e suas diferenças de primeira, segunda e ordens mais altas. Em 1670 e 1671, escreveu artigos sobre mecânica e, em 1671, construiu uma máquina de calcular.
  24. No outono de 1672, Huygens solicitou a Leibniz para encontrar a soma da série cujos termos são os inversos dos números triangulares, isto é, calcular a seguinte série:  $\sum_{r+1}^{\infty} \frac{2}{r(r+1)}$ . Assim, usando as seqüências de diferenças que havia utilizado em sua Tese de Doutorado, encontrou o valor 2 para aquela soma.
  25. Para encontrar essa série, Leibniz usou a técnica que Mercator havia empregado em seu *Logarithmotechnia*, de 1668. Observe-se que essa série já havia sido encontrada por Gregory, em 1671.
  26. No *Acta* de 1683, o matemático saxão Conde Ehrenfried Walter Tschirnhaus(en) (1651-1708) apresentou um método para determinar tangentes e quadraturas de curvas algébricas. Esse método, contudo, era parcialmente incorreto e muito obscuro. Ainda em 1683, Tschirnhaus(en) apresentou sua famosa **transformação** com a qual pretendia resolver equações algébricas de grau **n**. Por exemplo, ele mostrou que as transformações usadas por Viète e Cardan para resolver equações cúbicas, eram casos particulares de sua transformação.
  27. O nome desse artigo de Leibniz é: *Nova Methodus pro Maximis et Minimis itemque Tangentibus quae nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur et Singulare pro illis Calculi genus (Um Novo Método para Máximos e Mínimos assim como para Tangentes não Impedido por Quantidades nem Fracionais nem Irracionais e um Importante tipo de Cálculo para elas)*. Nesse artigo, Leibniz usou pela primeira vez a palavra **transcendental**, no sentido de não-algébrico, assim como introduziu a expressão **Calculus Differentialis (Cálculo Diferencial)**. Antes, Leibniz usava o nome **Methodus Tangentium Directa**, para representar esse cálculo, e a denominação **Methodus Tangentium Inversa** ou **Calculus Summatorius**, para representar o que, em 1698, ele chamou (juntamente com o matemático suíço Jean (Johann, John) Bernoulli (1667-1748)) de **Calculus Integralis**. (Antes, em 1690, o matemático suíço Jacques (Jakob, James) Bernoulli (1654-1705), já o denominara de **Integralis**.) É oportuno observar que Leibniz, no *Acta* de 1683, já havia aplicado o seu **Methodus de Maximis et Minimis** no estudo das leis da reflexão e refração da luz.
  28. Por exemplo, para obter  $d(xy)$ , fez o seguinte. Se **dx** e **dy** representam as pequenas diferenças para **x** e **y**, respectivamente, então:  $d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dx.dy$ . Para obter

o resultado desejado, Leibniz desprezou o termo  $dx \cdot dy$ .

29. O nome **círculo oscultriz** foi conferido por Leibniz, e significa um círculo cujo centro é o próprio centro de curvatura e seu raio é, também, o próprio raio de curvatura da curva em estudo. Portanto, ele representa o círculo de mais próximo contato com a curva. É interessante observar que Leibniz cometeu um erro ao calcular esse círculo oscultriz, ao afirmar que o mesmo tinha quatro pontos coincidentes de contato com a curva, ao invés de apenas três.
30. Na linguagem atual, a famosa **Regra de Leibniz** tem o seguinte aspecto (os expoentes entre parênteses indicam as ordens de derivação):

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}.$$

31. O conceito de envelope de uma família de curvas foi introduzido por Tschirnhaus(en), em 1682. Na notação atual, significa o seguinte: seja uma família de curvas  $f(x,y,\alpha) = 0$ , onde  $\alpha$  é o parâmetro da família. Para obter o envelope dessa família, deve-se encontrar  $\alpha$  resolvendo-se as equações:  $f = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ . Por outro lado, no trabalho de 1684, Leibniz introduziu o termo **subtangente** para a projeção sobre o eixo horizontal, do segmento da tangente compreendida

entre o ponto de tangência e sua intersecção com esse mesmo eixo horizontal.

32. Note-se que, ainda em 1693, em cartas escritas ao matemático francês, o marquês Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704), Leibniz foi um dos primeiros a falar em determinantes, ao representar um conjunto de equações algébricas simultâneas, por números colocados em um "array" formado de linhas e colunas.
33. O trato com os **infinitesimais** demarcou bem o pensamento filosófico entre Newton e Leibniz, pois enquanto Newton os considerou para definir o conceito central de seu cálculo - a **velocidade**, Leibniz ligou-os com as últimas partículas da matéria, às quais denominou **mônadas**, um dos conceitos fundamentais de sua filosofia.
34. Apesar de Newton conhecer como calcular a derivada do produto de duas funções (na linguagem atual: se  $z = uv$ , então  $\dot{z} = \dot{u}v + u\dot{v}$ ), não se preocupou em generalizar essa regra, como o fez Leibniz, para obter  $d^n(uv)$  (veja essa regra na nota 30). Além do mais, a notação pontual newtoniana exigia que todas as variáveis fossem consideradas como função do tempo e, portanto, não poderia ser estendida a situações em que as variáveis dependessem de mais de uma variável independente. A notação leibniziana, por sua vez, permitia essa extensão.