

Expansão Multipolar do Potencial Eletrostático e a Definição do Momento de Quadrupolo

(Multipole expansion of the electrostatic potential and the definition of the quadrupole moment)

Márcio Cyrillo e Márcio José Menon

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Universidade Estadual de Campinas, Unicamp

13083-970 Campinas, SP, Brasil

Trabalho recebido em 16 de abril de 1995

Diferentes definições do momento de quadrupolo e diferentes formulações da expansão em multipolos em referências correntemente utilizadas em cursos de Eletromagnetismo podem, em princípio, dificultar a compreensão por parte dos alunos ingressantes no curso profissional de Física (quinto semestre). Visando esclarecer esses pontos, ressaltando-se as bases físicas e matemáticas da expansão multipolar, apresenta-se uma revisão de duas abordagens usualmente adotadas, explicitando-se as diferenças e equivalências de ambas.

Abstract

Different definitions of the quadrupole moment and different approaches to multipole expansion in references currently used in Electromagnetism classes may, in principle, led primers in Physics (fifth semester) to some misunderstandings. Attempting to clarify this point as well as to stress the mathematical and physical bases of multipole expansion, a review of two approaches currently adopted and a discussion of the differences and equivalences connecting them are presented.

I. Introdução

Alunos provenientes de cursos básicos de Física têm um primeiro contato com uma abordagem formal de teoria de campos (clássicos) através da disciplina Eletromagnetismo. Em geral, dadas as profundas implicações físicas, o assunto mais ressaltado é a conexão equações de Maxwell-equação de onda. Entretanto, trata-se de uma disciplina muito rica em novidades, seja do ponto de vista físico ou matemático. Um desses tópicos, visto pela primeira vez pela grande maioria dos alunos, é a abordagem formal de um problema em três dimensões através das técnicas de expansões. A novidade é que o cálculo "teoricamente exato", isto é, a expressão analítica final e fechada de um problema, tão exercitado no curso básico, passa a ter um caráter formalmente aproximativo, a depender de dimensões, parâmetros, número de termos, ordem, etc. Por outro lado, essa novidade que pode parecer à primeira

vista estranha e até incômoda ao estudante, será fundamental em seu trabalho futuro, pois técnicas de expansões/perturbações, constituem uma das ferramentas mais utilizadas na física e infelizmente esse aspecto não é ressaltado nos livros didáticos.

O primeiro contato com essa nova abordagem ocorre ao se estudar o potencial eletrostático através da expansão em multipolos e, em geral, apenas o caráter intrínseco do formalismo pode já gerar dúvidas. Além disso, junto a esse aspecto surge a identificação em um dos termos da expansão de uma representação matricial do chamado momento de quadrupolo. Dadas as expansões em três dimensões, a introdução de propriedades matriciais/tensoriais e a relativa sutileza das interpretações físicas envolvidas, o assunto acaba dando origem a várias dúvidas e dificuldades para boa parte dos alunos. Nessa circunstância, uma tendência natural dos estudantes pode ser a busca de esclarecimentos

através da literatura correntemente utilizada nos cursos de Eletromagnetismo, tais como Jackson^[1] (Cap. 4, pág 98), Lorrain e Corson^[2] (Cap. 5, pág. 90), Marion e Heald^[3] (Cap. 2, pág. 37), Reitz, Milford e Christy^[4] (Cap. 2, pág. 51), etc. À primeira vista, a consulta dessas obras pode sugerir que as diferenças nos tipos de abordagens estejam apenas no caráter discreto ou contínuo das distribuições de cargas consideradas ou ainda no tipo de sistema de coordenadas utilizado. Entretanto, um ponto crítico é o fato de a definição do momento de quadrupolo apresentada por Lorrain e Corson^[2] não ser equivalente às definições nas demais referências, o que leva a diferentes interpretações físicas e geométricas. Outro aspecto que pode gerar dúvidas é o tratamento das expansões de Taylor em diferentes variáveis ou condições algebricamente distintas como em [4] e em [2,3]. Se essas diferenças não forem claramente identificadas a dificuldade inicial pode tornar-se muito mais ampla e profunda.

Dada a importância das técnicas de expansões, o profundo significado físico envolvido e as dificuldades usualmente demonstradas pelos alunos no estudo da expansão multipolar, visa-se neste trabalho apresentar uma revisão básica e didática desse tópico, voltada preferencialmente para alunos que já tenham tido um primeiro contato com o assunto. O aspecto novo e original é a ênfase nas origens das diferenças entre as abordagens citadas e às interpretações físicas e geométricas delas decorrentes, mostrando-se que o estudo comparativo e crítico dessas diferentes definições e abordagens traz à tona novas informações físicas e matemáticas que não são discutidas na literatura. Com esse objetivo, na seção II discute-se as motivações teóricas e práticas para a expansão multipolar, definindo-se a no-

menclatura que será utilizada ao longo do trabalho. Na seção III considera-se duas abordagens diferentes do assunto^[1-4], explicitando-se as diferentes condições na estrutura da expansão e no tratamento algébrico das equações. Na seção IV é demonstrada a equivalência do termo de quadrupolo nas duas formulações referidas, as diferenças na definição do momento de quadrupolo e são discutidas as implicações físicas e geométricas. Um resumo dos resultados essenciais e alguns comentários são apresentados na seção V.

Ao longo do trabalho faremos uso do sistema MKS de unidades e a discussão será limitada às situações eletrostáticas.

II. Bases da expansão em multipolos

Um dos problemas essenciais do Eletromagnetismo é a determinação do campo eletrostático \vec{E} produzido por uma dada distribuição de cargas. A lei de Gauss, embora de aplicação simples, é útil somente em um número reduzido de casos, quando a simetria é conveniente e quando se tem informações adequadas sobre a própria incógnita que se quer determinar. Uma abordagem útil é, evitando-se o caráter vetorial de \vec{E} , determinar primeiro o potencial eletrostático Φ (grandeza escalar) e a seguir o campo por derivação,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi.$$

No caso mais geral, as cargas fonte podem constituir-se tanto de distribuições discretas como contínuas (lineares, superficiais e volumétricas). Nesse caso a lei de Coulomb leva à expressão formal (solução da equação de Poisson):

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{q_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|} + \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{l'} \frac{\lambda(\vec{r}')dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (1)$$

Neste trabalho, visando uniformizar e compactar a nomenclatura, consideraremos somente uma distribuição volumétrica de cargas caracterizada por uma

densidade $\rho(\vec{r}')$, como esquematizado na figura 1 Nas referências o mesmo tipo de distribuição contínua é utilizado em [1,2,4] e discreta em [3]. A passagem do caso

contínuo para o discreto pode ser obtida diretamente através das prescrições:

$$\vec{r}' \rightarrow r'_\alpha$$

$$\int_{v'} \rho(\vec{r}') dv' \dots \rightarrow \sum_\alpha q_\alpha \dots$$

ou pela introdução da função delta de Dirac.

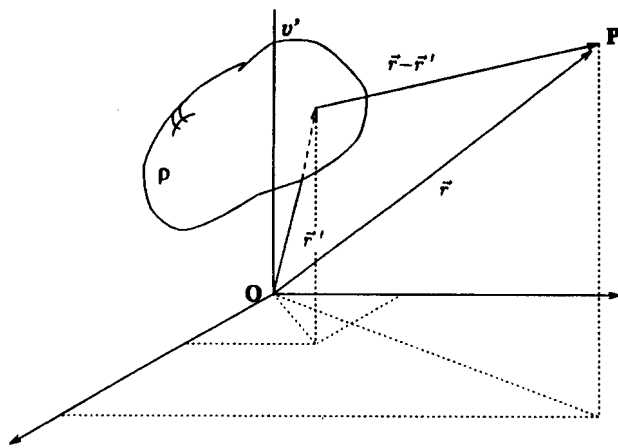


Figura 1. Esquema de uma distribuição contínua (volumétrica) de cargas originando no ponto de observação P um potencial $\Phi(\vec{r})$.

Limitaremos então a discussão ao cálculo do potencial através da expressão

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1)$$

A identificação do primeiro termo não nulo fornece importantes informações físicas sobre a distribuição, independentemente de se ter a expressão exata do potencial produzido. Vários exemplos podem ser consultados nas referências citadas.

A razão de ordem prática está associada ao fato de que nem sempre a equação (1) pode ser calculada analiticamente. Um procedimento possível é utilizar cálculos numéricos e resolver adequadamente o problema através de sistemas computacionais. Entretanto, em muitos casos práticos, devido às condições experi-

onde (figura 1) \vec{r}' caracteriza a posição do elemento dv' no interior da amostra de volume v' e densidade de carga $\rho(\vec{r}')$ e \vec{r} a posição do ponto de observação P onde o potencial é calculado.

A equação (1) é o ponto de partida para a expansão em multipolos que será efetuada na seção seguinte. Nesta seção vamos discutir as razões pelas quais se faz uso desse tipo de formalismo. Como veremos, a compreensão dessas motivações será útil para o entendimento das diferenças nas abordagens e na definição do momento de quadrupolo.

Podemos identificar duas razões para a expansão, uma de caráter teórico e outra de ordem prática.

A motivação de caráter teórico, que tem profundo significado físico não aparente na forma da equação (1), está no fato de que, uma vez feita a expansão, esta apresenta uma estrutura peculiar: uma soma infinita de termos, o primeiro correspondendo ao potencial produzido por uma carga pontual (monopolo), o segundo a duas cargas pontuais de sinais contrários (dipolo), o terceiro a quatro cargas pontuais duas a duas com sinais contrários (quadrupolo), o quarto a oito cargas pontuais duas a duas com sinais contrários, distribuídas em cubo, (octupolo) e assim por diante. Dessa forma obtém-se uma decomposição de multipolos, representada usualmente por

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi^{(1)}(\vec{r}) + \Phi^{(2)}(\vec{r}) + \Phi^{(4)}(\vec{r}) + \Phi^{(8)}(\vec{r}) + \dots + \Phi^{(2^n)}(\vec{r}) + \dots \quad (2)$$

mentais, pode não ser necessária uma solução completamente exata do problema. O caso típico é aquele no qual o ponto de observação está a uma distância da amostra muito maior que as dimensões da própria amostra. Se a dimensão da amostra pode ser representada por um comprimento l_{max} e R representar a distância da amostra ao ponto de observação, a condição geométrica acima pode ser algebricamente formulada por

$$\frac{l_{max}}{R} \ll 1. \quad (3)$$

A idéia mais intuitiva numa abordagem por expansões

é procurar expressar as distâncias que aparecem na equação (1) em termos da razão (3). Obtido isso, podemos expandir (1) em série de Taylor na variável que obedece (3) ou que seja da mesma ordem de grandeza desta. Sendo a expansão em potências inteiras desse parâmetro, cada termo consecutivo é menor que o anterior. Na prática podemos dizer que quando o valor do termo de uma certa ordem for menor que a imprecisão experimental, os termos de ordem mais elevada podem ser desprezados. Com isso, ficamos com um número finito de termos em (2) com características conhecidas, como comentado no parágrafo anterior, e que em geral são mais fáceis de serem integrados. Essa é a formulação de Reitz, Milford e Christy^[4] e que será revisada na seção III.1.

Alternativamente, uma maneira equivalente de se chegar aos mesmos resultados é tratar expansões em torno da origem do sistema de coordenadas como aparece em [2,3]. A condição (3) é usada, então, para levar a expansão apenas até a segunda ordem. Isto, no entanto, não é explicitado nessas referências, o que pode levar a interpretações conceitualmente questionáveis.

Outro aspecto, independente do anterior, que estamos interessados em fazer um estudo comparativo é, uma vez obtida a expansão, analisar o tratamento algébrico dado ao termo de quadrupolo $\Phi^{(4)}(\vec{r})$. Como será mostrado, as diferenças, entre [2] e [1, 3, 4] residem exclusivamente em se fatorizar ou não as grandezas associadas à amostra e ao ponto de observação.

Estaremos assim interessados em duas comparações independentes: expansão em termos de uma razão ou expansão em torno da origem e fatorização ou não das grandezas envolvidas no termo de quadrupolo. Como citado nos dois parágrafos anteriores esses aspectos estão um pouco misturados nas referências. Para procurar compactar a discussão utilizaremos uma nomenclatura unificada e denominaremos:

- “Primeira abordagem”: formulação através da expansão em termos da razão (3) e fatorização do termo de quadrupolo. Esta corresponde ao tipo de expansão de [4] e ao momento de quadrupolo de [1, 3 e 4].
- “Segunda abordagem”: formulação através da expansão em torno da origem e não fatorização do

termo de quadrupolo. Esta corresponde ao tipo de expansão de [2 e 3] e ao momento de quadrupolo de [2].

Em [1] a expansão é feita em termos de esféricos harmônicos. A expansão de Taylor em torno da origem em coordenadas retangulares é deixada pelo autor como exercício ao leitor.

O núcleo de nossa discussão está centrado no termo de quadrupolo $\Phi^{(4)}(\vec{r})$ e na representação matricial a ele associada, o momento de quadrupolo. Discussões sobre os demais termos podem ser encontrados em quaisquer das referências.

III. Cálculo do termo de quadrupolo

Utilizaremos uma notação unificada de modo a permitir extensões simples a qualquer das nomenclaturas das obras citadas. Representaremos como em [1],

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad \vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3).$$

A notação de [2] é obtida fazendo corresponder

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x, y, z) \quad (x'_1, x'_2, x'_3) \rightarrow (x', y', z').$$

III.1. Primeira abordagem

O ponto de partida é considerar a distribuição de cargas da figura 1 localizada em torno da origem, como mostrado na figura 2. Nesse caso a condição (3) é corretamente representada por

$$\frac{r'}{r} \ll 1, \quad \forall |\vec{r}'| \quad (4)$$

Notemos que essa expressão contém informações sobre a distância entre a amostra e o ponto de observação. Tratando-se de uma razão, a amostra não precisa ser “pequena” ou localizada próxima de um ponto específico do espaço; (4) é verificada tomando-se $|\vec{r}'|$ suficientemente grande.

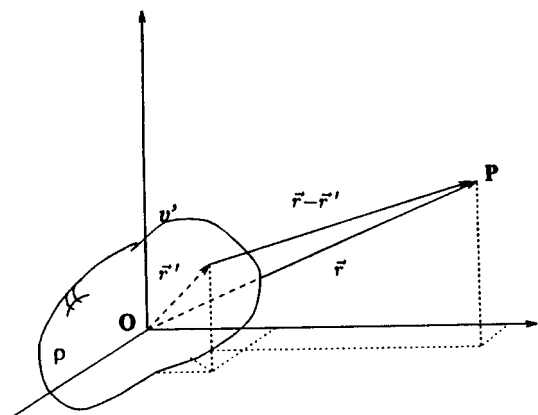


Figura 2. Distribuição volumétrica de cargas em torno da origem.

Seguindo o raciocínio da seção 2, o primeiro passo é expressar o termo $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ de (1) em função da razão

em (4)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(\frac{\vec{r}'}{r}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Sendo \vec{r}/r um versor, a condição (4) implica que o terceiro termo dentro do colchete é $\ll 1$ e menor ainda o segundo. Dessa forma, a soma dos dois escalares obedece

$$\left| \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(\frac{\vec{r}'}{r}\right) \right| \ll 1.$$

Denotando por x esse termo, podemos expandir o binômio $[1 + x]^{-\frac{1}{2}}$ em série de Taylor

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$

Com isso, até termos de segunda ordem em r'/r , obtemos:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right], \tag{5}$$

e daí a expansão para o potencial

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{v'} \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \int_{v'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{v'} \left[3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] \rho(\vec{r}') dv'. \tag{6}$$

O primeiro e segundo termos correspondem às contribuições de monopolo, $\Phi^{(1)}(\vec{r})$, e dipolo, $\Phi^{(2)}(\vec{r})$, respectivamente, como indicado em (2).

Fixaremos agora a atenção no terceiro termo, a contribuição de quadrupolo $\Phi^{(4)}(\vec{r})$. Primeiro observemos que nesse termo entra tanto a variável associada à distribuição (\vec{r}'), como a associada ao ponto de observação (\vec{r}) e de uma forma um tanto misturada. Na abordagem

de [1, 3 e 4] o que se faz é fatorar essas dependências, isto é, separar as dependências na forma de um produto, de modo a ser possível estudar cada dependência separadamente. Isso de fato nos levará a identificar todas as características da amostra num termo que definirá o momento de quadrupolo. Para tanto será útil “abrir” os produtos escalares em termos das coordenadas anteriormente definidas:

$$\Phi^{(4)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int_{v'} \left[3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x'_i x_j x'_j - \sum_{i=1}^3 x_i^2 r'^2 \right] \rho(\vec{r}') dv'.$$

Expressando

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \delta_{ij},$$

com δ_{ij} sendo a Delta de Kronecker, podemos pôr em evidência todas as coordenadas associadas ao ponto de observação, obtendo a forma compacta,

$$\Phi^{(4)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j Q_{ij}, \quad (7)$$

onde Q_{ij} depende exclusivamente das variáveis que caracterizam a distribuição de cargas,

$$Q_{ij} = \int_{v'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') dv'. \quad (8)$$

Vemos que tratam-se de 9 elementos que podem ser representados na forma de uma matriz 3x3:

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Pode-se mostrar que esse termo corresponde à representação matricial de um tensor e é denominado *tensor momento de quadrupolo* [1, 3 e 4]. Na seção 4 estudaremos algumas propriedades dessa representação.

III.2. Segunda abordagem

O ponto de partida para a expansão é também o termo $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$. Como comentado a primeira diferença está no fato de que a expansão não é realizada no termo r'/r , mas em torno da origem das coordenadas associadas à amostra

$$\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3) \simeq (0, 0, 0).$$

Embora os autores em [2] façam referência à condição (3), o parâmetro l_{max} não entra explicitamente nos cálculos, isto é, não há referência quantitativa às dimensões da amostra comparada à distância desta ao ponto de observação, como em (4) na abordagem anterior. Mostraremos que as expansões obtidas são iguais, porém, a não menção à condição (3) explicitamente, pode levar à interpretação de que a expansão em série de Taylor em torno da origem está conceitualmente incorreta.

Revisemos então a expansão desse tipo utilizando a notação unificada. Sendo $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ função de x'_1, x'_2, x'_3 apenas, já que o ponto de observação é fixo, a expansão de Taylor em torno de $\vec{r}' = (0, 0, 0)$ leva a

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \left[\left(\sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \right) \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right]_{\vec{r}'=(0,0,0)} + \frac{1}{2!} \left[\left(\sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \right)^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right]_{\vec{r}'=(0,0,0)} + \dots, \quad (10)$$

onde o subscrito $\vec{r}' = (0, 0, 0)$ indica que as derivadas são calculadas nesse ponto. Sendo

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right]_{\vec{r}'=(0,0,0)} = \frac{x_i}{r^3}$$

e introduzindo-se como em [2] os cossenos diretores

$$l_i = \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, 2, 3,$$

vem que a expansão de $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ até segunda ordem em x'_i fica:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^3 l_i x'_i + \frac{1}{r^3} [3l_2 l_3 x'_2 x'_3 + 3l_3 l_1 x'_3 x'_1 + 3l_1 l_2 x'_1 x'_2] + \frac{1}{2r^3} [(3l_1^2 - 1)x_1'^2 + (3l_2^2 - 1)x_2'^2 + (3l_3^2 - 1)x_3'^2].$$

Com isto obtém-se para o potencial (1):

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{v'} \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{v'} \left(\sum_{i=1}^3 l_i x'_i \right) \rho(\vec{r}') dv' + \\ & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_{v'} [3l_2 l_3 x'_2 x'_3 + 3l_3 l_1 x'_3 x'_1 + 3l_1 l_2 x'_1 x'_2 + \\ & + \frac{1}{2}(3l_1^2 - 1)x_1'^2 + \frac{1}{2}(3l_2^2 - 1)x_2'^2 + \frac{1}{2}(3l_3^2 - 1)x_3'^2] \rho(\vec{r}') dv' . \end{aligned} \quad (11)$$

Comparando com (6), vemos que o primeiro termo corresponde ao monopolo e o segundo ao dipolo, uma vez que

$$\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^3 l_i x'_i = \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 x_i x'_i = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r}' .$$

O terceiro é o termo de quadrupolo e a diferença de [2] com [1, 3 e 4] é que Lorrain e Corson não fatorizam as dependências das coordenadas da amostra e do ponto de observação. Com a definição

$$p_{ij} = \int_{v'} x'_i x'_j \rho(\vec{r}') \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

o termo de quadrupolo é expresso por

$$\Phi^{(4)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \{3[l_1 l_2 p_{12} + l_1 l_3 p_{13} + l_2 l_3 p_{13}] + \frac{1}{2}[(3l_1^2 - 1)p_{11} + (3l_2^2 - 1)p_{22} + (3l_3^2 - 1)p_{33}]\}, \quad (13)$$

equivalente à equação (2-107) em [2]. Vemos que os p_{ij} dependem apenas da distribuição de cargas e podem também ser dispostos em uma matriz

$$\{p\} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

especificando, de acordo com [2], o *momento de quadrupolo* da distribuição de cargas.

O ponto essencial é que comparando (7) e (8) com (12) e (13) vemos que as definições do momento de quadrupolo são distintas, que (7) tem estrutura fatorizada e (13) não.

É importante ressaltar que para chegar em (11) temos que supor $r' \ll r$, caso contrário os termos restantes seriam dominantes. Assim, implicitamente está sendo usada a restrição (3) e esta abordagem coincidirá, como veremos na próxima seção, com a anterior.

IV. Estudo comparativo do termo de quadrupolo e do momento de quadrupolo

Nesta seção demonstraremos que os termos de quadrupolo (7) e (13) são idênticos e explicitaremos as diferenças entre as definições do momento de quadrupolo (8) e (12).

IV.1. Termo de Quadrupolo

Partiremos da equação (13) utilizada por Lorrain e Corson e mostraremos que é idêntica às equações (7) e (8). Utilizando a definição dos cossenos diretores e reagrupando termos, (13) fica:

$$\Phi^{(4)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int_{v'} \rho(\vec{r}') dv' \{3[2x_2x_3x'_2x'_3 + 2x_1x_3x'_1x'_3 + 2x_1x_2x'_1x'_2 + x_1^2x_1'^2 + x_2^2x_2'^2 + x_3^2x_3'^2] - r^2[x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2]\}.$$

O termo entre colchetes que está multiplicado por 3 pode ser expresso de forma compacta por

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j x'_i x'_j$$

e representando

$$r^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \delta_{ij},$$

obtemos

$$\Phi^{(4)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2r^5} \int_{v'} [3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2] \rho(\vec{r}') dv'$$

que corresponde exatamente às equações (7) e (8).

Como os termos $\Phi^{(1)}$ e $\Phi^{(2)}$ são também idênticos nas duas abordagens (como verificado na seção anterior) vemos que de fato o resultado da expansão independe de se considerar expansão no termo r'/r ou em torno de $\vec{r}' = (0, 0, 0)$.

IV.2. Momento de Quadrupolo

Das equações (8) e (12) o momento de quadrupolo tem definições diferentes. A definição (8) é a adotada em [2,3,4],

$$Q_{ij} = \int_{v'} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') dv' \quad (8)$$

e a (12) a adotada em [2],

$$p_{ij} = \int_{v'} x'_i x'_j \rho(\vec{r}') dv' \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

sendo portanto a correspondência entre ambas

$$Q_{ij} = 3p_{ij} - \int_{v'} \delta_{ij} r'^2 \rho(\vec{r}') dv'.$$

Inicialmente notemos que embora ambas as representações matriciais, (9) e (14), sejam simétricas, $p_{ij} = p_{ji}$ e $Q_{ij} = Q_{ji}$, o traço tem propriedades fundamentalmente distintas:

$$\begin{aligned} \text{tr}\{Q\} &= \sum_{i=1}^3 Q_{ii} = \sum_{i=1}^3 \left[3 \int_{v'} x_i'^2 \rho(\vec{r}') dv' - \int_{v'} r'^2 \rho(\vec{r}') dv' \right] = \\ &= 3 \left\{ \int_{v'} r'^2 \rho(\vec{r}') dv' - \int_{v'} r'^2 \rho(\vec{r}') dv' \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{tr}\{p\} = \sum_{i=1}^3 p_{ii} = \int_{v'} \left[\sum_{i=1}^3 x_i'^2 \right] \rho(\vec{r}') dv' = \int_{v'} r'^2 \rho(\vec{r}') dv'.$$

Então das definições temos sempre

$$\text{tr}\{Q\} = 0$$

porém

$$\text{tr}\{p\} = \int_{v'} r'^2 \rho(\vec{r}') dv',$$

correspondendo geometricamente ao raio quadrático médio da distribuição de cargas.

Como comentado na seção III.2 as diferenças nas definições (8) e (12) têm origem algébrica. Enquanto [1,3,4] fatorizam as dependências em r e r' na expressão de $\Phi^{(4)}$ (7), os autores da referência [2] não consideram tal fatorização, expressando $\Phi^{(4)}$ numa forma mista (13).

A fatorização (7) permite identificar a matriz $\{Q\}$ como representação de um tensor de segunda ordem, o tensor momento de quadrupolo [1,3,4]. Como [3] menciona, "... é freqüentemente mais conveniente fazer a modificação que transforma a expressão em uma forma que é familiar do estudo de tensor de inércia na dinâmica de corpo rígido". Com tal analogia pode-se mostrar que há apenas um elemento independente no tensor de quadrupolo (quando $\{Q\}$ se refere a eixos principais e a distribuição de cargas é simétrica, como está resumido na pág. 43 de [3]).

V. Comentários finais

Com base na literatura correntemente utilizada em cursos de Eletromagnetismo, discutimos neste trabalho dois aspectos relativos à expansão multipolar do potencial eletrostático, que são geralmente abordados de forma distinta nas referências citadas.

De um lado analisamos o caráter próprio da expansão mostrando que esta pode ser feita em termos de um parâmetro adimensional característico da amostra e do ponto de observação, r'/r , ou em torno da origem das coordenadas da amostra. Mostramos que o resultado da expansão é o mesmo nos dois casos.

De outro, estudamos a definição do momento

de quadrupolo, explicitando as diferenças encontradas nas referências e discutindo interpretações físicas, geométricas e algébricas decorrentes. Como demonstrado, a diferença na definição do momento é devida exclusivamente a se fatorizar ou não as dependências em r (ponto de observação) e r' (amostra) na expressão do potencial de quadrupolo.

Gostaríamos de ressaltar que para um estudante de graduação, o fato de se encontrar diferentes abordagens de um mesmo assunto em diferentes referências, não é necessariamente uma fonte de dificuldades. Pelo contrário, o estudo comparativo pode trazer novos conhecimentos, não explícitos em cada formulação. Além disso pode contribuir para o desenvolvimento de uma atitude crítica, dificilmente presente ao se seguir simplesmente o raciocínio de um autor em sua obra ou de um professor em sala de aula.

Agradecimentos

Agradecemos ao Prof. Fernando J. da Paixão Filho pelas discussões sobre as diferenças entre as duas definições via Teoria dos Grupos e ao Prof. André K. T. Assis pela leitura criteriosa do manuscrito e pelas sugestões apresentadas.

Referências

1. J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*, (Guana-
bara Dois, Rio de Janeiro, 1983).
2. P. Lorrain, D. Corson, *Electromagnetic Fields and
Waves* (W.H. Freeman and Company, San Fran-
cisco, 1962).
3. J.B. Marion, M.A. Heald, *Classical Electromagne-
tic Radiation* (Academic Press, New York, 1980).
4. J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy, *Funda-
mentos da Teoria Eletromagnética*, (Editora Cam-
pus, Rio de Janeiro, 1982).