# A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz*

José Maria Filardo Bassalo
*Departamento de Física da UFPA*
*66075-900 - Belém, Pará*
*e-mail:bassalo@amazon.com.br*

Trabalho recebido em 11 de setembro de 1995

**Resumo**

Nesta **Crônica** vamos mostrar como se desenvolveu o que hoje conhecemos como **Cálculo Diferencial e Integral**. Na primeira parte, estudaremos o desenvolvimento desse Cálculo desde a Antiguidade até os trabalhos que antecederam aos de Newton e Leibniz.

**Abstract**

In this **Chronicle** we show how was developped what today means **Integral and Differential Calculus**. In this first part, we study the development of this Calculus from the Antiquity to the works before Newton's and Leibniz's ones.

## 1. Introdução[1]

A criação e desenvolvimento do **Cálculo** foram motivados por uma série de problemas, divididos em três grandes temas: 1. **Cálculo Integral**, relaciona-se com o cálculo da **quadratura** (área) das figuras planas; com o cálculo da **cubatura**[2] (volume) de sólidos; com o cálculo dos centros de gravidades de algumas figuras geométricas; e com a retificação de curvas; 2. **Cálculo Diferencial**, trata dos métodos de traçar tangentes em curvas e dos problemas relacionados com máximos e mínimos de funções; 3. **Cálculo Infinitesimal**, que faz a ligação entre os dois primeiros.

## 2. Cálculo integral

Dos três Cálculos indicados acima, o Cálculo Integral é o mais antigo deles, e foi desenvolvido, inicialmente, pelo astrônomo e matemático grego Eudoxo de Cnido (c.408-c.355), através do **método da exaustão**[3] utilizado no **cálculo** de áreas e de volumes de figuras envolvendo curvas. Esse método foi também apresentado pelo matemático grego Euclides de Alexandria (323-285) em seu famoso livro *Elementos de Geometria*. Por sua vez, o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287-212) repetiu aquele cálculo, porém, de maneira muito mais elaborada. (Por essa razão, a grande maioria dos Historiadores da Ciência consideram-no como o "inventor" desse tipo de **cálculo**.) Com efeito, no tratado intitulado *O Método*,[4] Arquimedes apresentou a maneira de fazê-lo e, para isso, modificou o método de Eudoxo, pois, ao invés de simplesmente "exaurir" a figura considerada, ao adicionar mais e mais figuras retilíneas, Arquimedes utilizou suas **leis da alavanca**[5] para balancear linhas e áreas. Com essas leis, e mais o argumento do **reductio ad absurdum** (**redução ao absurdo**), demonstrou importantes teoremas e proposições, que foram muito importantes na realização de seus cálculos. Para ilustrar seu "argumento mecânico", inicialmente, calculou a área de um

*Esta Crônica é em homenagem ao meu amigo RUI DOS SANTOS BARBOSA, professor aposentado do Departamento de Matemática da UFPA, meu consultor em Cálculo.

segmento parabólico. Esse método foi melhor elaborado por Arquimedes nos cálculos que apresentou nos demais tratados que escreveu, tais como: *Sobre a Quadratura da Parábola*, *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Sobre a Medida do Círculo*, *Sobre as Espirais*, *Sobre os Conóides e Esferóides*, *Sobre o Arenário*, *Sobre as Alavancas*, *Sobre os Centros de Gravidade*, *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, e *Sobre o Equilíbrio dos Corpos Flutuantes*.

O problema do **Cálculo Integral** foi tratado com o **método da exaustão** arquimediano, desde a Antiguidade até a metade do século 16. No entanto, com a tradução latina das obras de Arquimedes, ocorrida em 1544, o principal argumento utilizado por este matemático em suas demonstrações (o **reductio ad absurdum**), começou a sofrer algumas modificações e, aos poucos, foi substituído pela passagem direta ao processo de **limite**. Por exemplo, essa substituição pode ser vista no cálculo do centro de gravidade do conóide, realizado pelo físico e matemático italiano Francesco Maurolycus (1494-1575), assim como na determinação do centro de gravidade do triângulo, feita pelo físico e matemático flamengo Simon Stevin de Bruges (1548-1620), e apresentada em seu livro *Estática*, de 1586. A rejeição do argumento da redução ao absurdo usado por Arquimedes foi novamente considerada pelos matemáticos italianos, Federigo Commandino (1509-1575) no tratado *Liber de Centro Gravitatis Solidorum* (*Livro sobre o Centro de Gravidade dos Sólidos*), de 1565, e Luca Valério (1552-1618) em seu livro *De Centro Gravitatis Solidorum* (*Sobre o Centro de Gravidade dos Sólidos*), de 1604.

Um novo método para calcular áreas e volumes foi desenvolvido pelo astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), ao considerar que áreas e volumes eram compostos, respectivamente, de uma quantidade "infinita" de retas ou planos. Com isso, Kepler abandonou a estrutura do método arquimediano em troca do uso de **indivisíveis** ou **infinitesimais**. No livro *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* (*Nova Geometria Sólida dos Barris de Vinho*), editado em 1615, Kepler apresentou o cálculo do volume de sólidos obtido pela rotação de cônicas em torno de uma linha em seu plano.[6]

O método dos **indivisíveis** também foi utilizado pelo astrônomo italiano Galileo Galilei (1564-1642) em seu estudo sobre o movimento. Por exemplo, no livro *Discorsi i Dimostrazioni Matematiche intorno a Due Nuove Scienze Attenenti alla Mecanica et ai Movimenti Locali* (*Discursos e Demonstrações Matemáticas em torno de Duas Novas Ciências Atinentes à Mecânica e aos Movimentos Locais*), de 1638, Galileu lançou mão desse método para demonstrar as **leis da queda livre**: 1ª **Lei das Velocidades** - "Em queda livre (movimento no qual a aceleração $a$ é constante), as velocidades ($v$) são proporcionais aos tempos ($t$) gastos (v = at)"; 2ª **Lei dos Espaços** - "Em queda livre, os espaços ($s$) percorridos são proporcionais aos quadrados dos tempos gastos (s = $\frac{1}{2}at^2$)". Ainda nesse livro, Galileu apresentou um argumento para mostrar que a área sob a curva representada num diagrama tempo × velocidade, nada mais é do que o próprio espaço.

Muito embora Galileu haja tentado (porém, não conseguido) escrever um livro sobre infinitos e infinitesimais em Matemática, tal tarefa foi realizada por seu aluno e associado, o matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) que, inclusive, transformou o uso da reta e de superfícies "indivisíveis" em um poderoso conjunto de técnicas para comparar áreas e volumes, hoje conhecido como **métodos de integração**. Essas técnicas foram apresentadas em dois livros: *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* (*Geometria Avançada por um Método Desconhecido, Indivisíveis do Contínuo*), de 1635, e *Exercitationes Geometricae Sex* (*Seis Exercícios Geométricos*), de 1647.[7] No *Geometria*, Cavalieri considerou áreas como soma de segmentos de linhas (estas, consideradas como indivisíveis), e volumes como soma de áreas planas (estas, também consideradas como indivisíveis). Mostrou ainda como medir áreas planas e volumes comparando os indivisíveis de um com os indivisíveis do outro. No *Exercitationes*, Cavalieri admitiu que uma linha é feita de pontos, assim como um colar é feito de contas; um plano é feito de linhas assim como um pano é feito de fibras; e um sólido é feito de áreas planas assim como um livro é feito de páginas.

Nesses dois livros, bem como no livro *Centuria di Varii Problemi*, de 1639, Cavalieri apresentou o cálculo da seguinte integral (na linguagem atual): $\int_o^a x^n\ dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, onde $n$ é um inteiro positivo.[8] Para fazer esse cálculo, Cavalieri usou seu método que consistia em comparar os indivisíveis de uma figura com os de uma outra. Por outro lado, para somar esses indivisíveis, Cavalieri considerou a seguinte expressão: **omnes linae y** (o.l. y) (**todas as linhas y**), sendo que essa abreviação **o.l. y** representava uma espécie de símbolo de integração.[9]

Na época em que Cavalieri publicou seus livros, o método dos indivisíveis e a integral da função $x^n$ já eram conhecidos por outros cientistas. Dentre estes, destacaram-se o matemático e físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), aluno de Galileu, amigo e associado de Cavalieri, e os matemáticos franceses Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Pierre Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662), em cujos trabalhos, além de considerarem $n$ inteiro, procuraram generalizar o resultado de Cavalieri, considerando $n$ fracional ou negativo (neste caso, excetuava-se n = - 1).

Assim, em 1634, em seu *Traité des Indivisibles* (*Tratado dos Indivisíveis*) (somente publicado em 1693), Roberval usou o método dos indivisíveis para encontrar a área sob um arco da ciclóide, depois de ser alertado para esse problema pelo matemático francês Marin Mersenne (1588-1648), em 1629. Por volta de 1636, Roberval, Torricelli e Fermat haviam resolvido a integral de $x^n$ para $n$ racional, e cerca de 1640, Fermat e Torricelli, estiveram envolvidos com o cálculo da área entre o arco da hipérbole $x^m y^n = k$ ($m$, $n$ inteiros positivos), uma ordenada e uma assíntota. Por sua vez, no texto *De Solido Hyperbolico Acuto*, escrito em torno de 1643, Torricelli usou um método puramente geométrico (envolvendo ainda os indivisíveis) para calcular uma integral com um intervalo infinito de integração, encontrando, no entanto, um valor finito.[10]

O método dos infinitesimais de Cavalieri, um pouco modificado por Fermat,[11] falhou no cálculo da quadratura da hipérbole retangular (xy = 1, na notação atual), conforme observou o próprio Fermat. Contudo, essa dificuldade foi contornada por Saint-Vincent, em seu *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni* (*Trabalho Geométrico sobre a Quadratura do Círculo e da Secções Cônicas*), aparecido em 1647.[12] Para realizar o cálculo referido acima, Saint-Vincent observou que se a abcissa ($x$)[13] aumenta geometricamente, as áreas sob a curva hiperbólica aumentam aritmeticamente. Na notação atual, essa quadratura é dada por: $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(\frac{b}{a})$.[14]

Conforme vimos acima, Pascal (influenciado por Roberval e por seu mestre, o matemático francês Girard Desargues (1591-1661)) também usou a técnica dos indivisíveis para calcular, geometricamente, a área sob curvas. Com efeito, em seu livro *Traité des Sinus du Quart de Cercle* (*Tratado sobre Senos de um Quadrante de um Círculo*), de 1659, apresentou o cálculo de integrais envolvendo potências de senos, tais como (na notação atual): $\int_{\phi_o}^{\phi_1} sen^n \phi\ d\phi$.[15]

A partir do trabalho do matemático inglês John Wallis (1616-1703), apresentado no livro *Arithmetica Infinitorum* (*Aritmética do Infinito*), de 1655, o método analítico no cálculo de integrais, começou a substituir o método geométrico de Cavalieri, Roberval e Pascal. Basicamente, naquele cálculo, Wallis utilizou induções, interpolações, aproximações e logaritmos, trabalhando no domínio do infinito, havendo, inclusive, introduzido o símbolo $\infty$ para o mesmo (e que representava muitas linhas). Ao calcular analiticamente a área de um círculo, Wallis obteve um resultado notável - o valor de $\pi$ -, através da expressão: $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9...}$.[16]

Segundo observamos até aqui, o desenvolvimento do Cálculo Integral deveu-se, basicamente, à solução de problemas de **quadratura** de curvas escritas na forma geral y = f(x), uma vez que os problemas de **cubatura** e determinação de centro de gravidade, reduzem-se, de alguma maneira, aos de quadratura. Por sua vez, um outro tipo de problema que contribuiu para o desenvolvimento da integração, foi o da **retificação** de arcos, isto é, a determinação de comprimentos de arcos de curvas. Esse era um problema um pouco mais complicado, uma vez que aqueles que estavam interessados nesse tipo de problema, eram obrigados a procurar curvas cuja determinação de seu comprimento, reduzia-se a problemas de quadraturas de curvas conhecidas.

Por volta de 1650, quase ninguém acreditava que o comprimento de uma curva poderia ser exatamente igual ao comprimento de uma linha reta, ou seja, que uma curva pudesse ser retificada. Uma das primeiras curvas a ser retificada foi a parábola semicúbica ($ky^2 = x^3$), de maneira independente, pelo matemático inglês William Neile (1637-1670), em 1657, e pelo matemático Heinrich van Heuraet (1633-c.1660), em 1658. Por sua vez, nesse mesmo ano de 1658, o matemático e arquiteto inglês Christopher Wren (1632-1723) retificou a ciclóide.[17]

A retificação de curvas foi também realizada por outros matemáticos. Por exemplo, o escocês James Gregory (1638-1675) em seu livro *Geometriae Pars Universalis* (*Parte Universal da Geometria*), de 1668, apresentou um método de retificação de curvas.[18] Por outro lado, o também físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695) em seu célebre *Horologium Oscillatorium sive de Motu Pendulorum* (*Relógio Oscilatório ou Movimento dos Pêndulos*), publicado em 1673, além de descrever a retificação de algumas curvas (em particular, a cissóide e a tractrix), apresentou uma série de resultados importantes para a Matemática. Com efeito, Huygens foi o primeiro a obter áreas envolvendo parabolóides e hiperbolóides; demonstrou que a catenária era uma curva não-algébrica (Galileu pensava tratar-se de uma parábola); e que a ciclóide é uma **braquistócrona** ou **tautócrona** (curva de queda mais rápida). Este último resultado permitiu a Huygens demonstrar que o período de um pêndulo é independente de sua amplitude, e com isso, construir o primeiro pêndulo cicloidal.[19]

No século 17, o problema da retificação de curvas representou um desafio para os matemáticos, pois, algumas delas, principalmente a elípse e a hipérbole, não puderam ser retificadas, conforme observou Gregory, por não ser possível realizar essa tarefa em termos de funções conhecidas. Somente no século 18, principalmente com os trabalhos do matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783), foi possível contornar esse problema, segundo veremos em outra crônica.

### 3. Cálculo diferencial

Além dos problemas relacionados com o **Cálculo Integral**, conforme vimos anteriormente, dois outros problemas ajudaram a desenvolver o **Cálculo**: o da construção de tangentes a curvas; e o da obtenção de máximos e mínimos de funções. Desse modo, esses dois tipos de problemas levaram a uma outra parte fundamental do **Cálculo**, conhecida como **Cálculo Diferencial**.

As primeiras tentativas de traçar tangentes a curvas foram realizadas pelos gregos, muito embora estes não tivessem um conceito preciso sobre ângulos e tangentes, assim como apenas conheciam poucas curvas.[20] Apesar disso, eles foram capazes, usando o método do **reductio ad absurdum**, de estudar a construção de tangentes e normais a algumas dessas curvas. Euclides, por exemplo, em seu *Elementos de Geometria*, define **tangente** a um círculo como sendo uma reta que o encontra em apenas um ponto e não o corta. Para provar que uma reta traçada dessa maneira toca o círculo em apenas um ponto, Euclides usou o argumento da **redução ao absurdo**. Um método semelhante a esse foi usado por Apolônio para demonstrar as propriedades conhecidas sobre tangentes e normais às suas cônicas. Arquimedes, por sua vez, parece que se inspirou em considerações cinemáticas para para traçar uma tangente à sua espiral.[21] Com efeito, a construção geométrica usada por Arquimedes para realizar esse traçado, sugere que o ponto que descreve sua espiral realiza dois tipos de movimento - um na direção do raio vetor (reta que une o ponto de partida da espiral até um ponto da mesma) e o outro na direção perpendicular a esse raio vetor - que, compostos, dão um movimento na direção da tangente à espiral.[22]

O método cinemático arquimediano atravessou séculos, sendo usado por Roberval, em 1638, e por Torricelli, em 1644,[23] para traçar tangentes à ciclóide e a outras curvas.[24] Entretanto, muito embora esse método haja resolvido alguns problemas não tratados pelo conceito euclidiano de tangente (tocar a curva em um único ponto), o mesmo não se aplicava a outras curvas que nada tinham a ver com movimento. Portanto, era necessário encontrar novos métodos de traçar tangentes a curvas, cujo conceito fosse puramente matemático e não físico, como o arquimediano. Isso foi conseguido pelos matemáticos franceses, Fermat e René Descartes (1596-1650), conforme veremos a seguir.

Para traçar uma tangente a uma dada curva, Fermat lançou mão de um método que ele havia desenvolvido no começo de 1629[25] e apresentado no manuscrito intitulado *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* (*Método de Encontrar Máximos e Mínimos*), de 1637. Na linguagem atual,[26] o âmago desse método resume-se no seguinte: mudar a variável **x** em f(x) (que representa a curva dada) para x + E (com **E** pequeno); considerar f(x) estacionário próximo de seu máximo ou de seu mínimo,[27] isto é, f(x + E) - f(x) vai mais rápido a zero do que **E**; dividir a expressão acima por **E**; fazer E $\rightarrow$ 0. Então, para obter o ponto em que a curva passa por um máximo ou por um mínimo, basta igualar o resultado anterior a zero. Resumindo-se, temos:

$$f'(x) = \lim_{E\rightarrow 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} = 0.$$

Assim, usando esse método, Fermat mostrou que f'(x) obtido como indicado acima, representava a tangente a f(x).[28] Em cartas escritas a Roberval (1636, 1638), diretamente ou via Mersenne, afirmou que seu método era geral e, portanto, poderia ser aplicado a qualquer curva; e mais ainda, que também poderia ser empregado no cálculo do centro de gravidade de figuras limitadas por linhas retas ou curvas, assim como no de sólidos de revolução.[29]

Um outro método de traçar tangentes a curvas já havia sido encontrado por Descartes em sua *La Géométrie* (*A Geometria*), publicado em 1637.[30] No entanto, era um método diferente do de Fermat, já que usava o conceito de **normal** a uma curva, representado pelo raio de um círculo que **tocava** a curva no ponto de tangência e, conseqüentemente, esclarecia melhor aquele conceito. Desse modo, a **tangente** era então definida como uma perpendicular à **normal**. Para Descartes, o modo de encontrar tangentes a curvas era importante porque ele permitia obter algumas de suas propriedades, como, por exemplo, o ângulo de intersecção entre elas. Apesar dos métodos de Fermat e de Descartes para encontrar tangentes a curvas serem diferentes, cada autor achava que o seu era melhor do que o do outro.[31]

O traçado de tangentes a curvas (assim como o cálculo de áreas e comprimentos de arcos) também foi objeto de estudo por parte do matemático inglês Isaac Barrow (1630-1677) em seu livro *Lectiones Geometricae* (*Lições Geométricas*), de 1670, composto de 13 lições.[32] Para realizar aquele traçado, seu ponto de partida foi o cinemático de Torricelli, pois, para Barrow, como o tempo era semelhante a uma linha, ambos compostos de indivisíveis, as grandezas geométricas poderiam ser consideradas como geradas por um fluxo estacionário de pontos. Na lição 10 de seu livro, Barrow apresentou seu método de traçar tangentes a curvas, semelhante ao de Fermat,[33] porém, um pouco mais elaborado, através do hoje conhecido "triângulo (diferencial) característico" (dx, dy, ds).[34]

## 4. Cálculo infinitesimal

O problema da relação inversa entre o traçado de tangentes a curvas e o cálculo de quadraturas - conhecido como **Cálculo Infinitesimal** - foi sendo gradualmente estabelecido na primeira metade do século 17, devido aos trabalhos de Galileu, Cavalieri e Torricelli. No entanto, a base desse Cálculo - o chamado **Teorema Fundamentral do Cálculo** - foi apresentado por Gregory em seu *Geometriae Pars Universalis*, em 1668, e por Barrow em seu *Lectiones Geometricae*, de 1670, ambos referidos anteriormente. Na linguagem moderna, esse Teorema é traduzido por: $y = \int_o^x z dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = z$. Esse Cálculo foi finalmente formalizado por Newton e Leibniz, conforme veremos no próximo artigo desta série.

## Notas e Referências Bibliográficas

1. Para escrever este artigo, nos baseamos nos seguintes textos: BARON, M. E. 1985. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*, Unidades 1 e 2; BARON, M. E. e BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidade 3; BOS, H. J. M. 1985. *idem* Unidades 4 e 5, da Open University. Editora da Universidade de Brasília; BOYER, C. B. 1968. *A History of Mathematics.* John Wiley and Sons; KLINE, M. 1974. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.*

Oxford University Press; RONAN, C. A. 1987. *História Ilustrada da Ciência.* Jorge Zahar Editor; SEDGWICK, W. T., TYLER, H. W. e BIGELOW, R. P. 1950. *História da Ciência.* Editora Globo; STRUIK, D. J. (Editor) 1969. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard University Press.

2. O problema geral de obtenção de áreas (conhecido como **quadratura**) e de volumes (conhecido como **cubatura**), receberam esses nomes por causa de dois dos três problemas mais famosos da Antiguidade, problemas esses que deveriam ser resolvidos apenas com régua e compasso. Esses três problemas têm os seguintes enunciados: 1º: - Construir um quadrado de área equivalente à de um círculo, conhecido como o problema da **quadratura do círculo**; 2º - Dobrar o volume de um cubo, mantendo-se sua forma cúbica, conhecido como o problema da **cubatura**; 3º - Dividir um ângulo plano em três partes iguais, conhecido com **trissecção do ângulo**.

3. Esse método de Eudoxo é baseado na seguinte proposição: -"Se for subtraída de qualquer grandeza uma parte não menor que sua metade, e dessa parte restante for, de novo, subtraída uma parte não menor que sua metade, e se este processo de subtração é continuado, então permanecerá uma grandeza menor do que qualquer grandeza pré-determinada da mesma espécie". Essa propriedade recebeu do matemático belga, o jesuíta Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), em 1647, e pela primeira vez, o nome de **propriedade de exaustão**.

4. Esse livro esteve perdido durante aproximadamente 1000 anos e foi encontrado surpreendentemente em 1906, num palimpsesto (manuscrito de pergaminho que foi raspado para receber novo texto) de Constantinopla, escrito pelas mãos de um copista do século X. É oportuno observar que os livros escritos por Arquimedes, representavam memórias originais sobre novos descobrimentos matemáticos, e muitas vezes eram comunicados aos seus contemporâneos em forma de cartas. Por exemplo, o *Método* (que contém 15 proposições) foi enviado, em forma de carta, ao astrônomo grego Eratóstenes de Cirena (c.276-c.196).

5. Essas leis são compostas do postulado 1: - "Pesos iguais a igual distância estão em equilíbrio, e pesos iguais a distâncias desiguais não estão em equilíbrio, mas inclinam-se para o peso que está na maior distância"; e das proposições 6 e 7: - "Grandezas comensuráveis (6) ou incomensuráveis (7) equilibram-se quando são inversamente proporcionais às suas distâncias ao ponto de apoio". (ARQUIMEDES, 1971. *Great Books of the Western World*, Volume 11. Encyclopaedia Britannica, Inc. The University of Chicago.)

6. No livro *Astronomia nova*, editado em 1609, no qual Kepler apresenta as suas famosas primeira e segunda leis (**Lei das órbitas** e **Lei das áreas**), há cálculos correspondentes à seguinte integral: $\int_o^\phi sen\phi \; d\phi = 1 - cos\phi$.

7. Cavalieri foi o primeiro matemático a considerar o valor dos logaritmos que haviam sido inventados pelo matemático escocês John Napier (1550-1617), em 1614. Assim, em seu livro *Directorium Universale Uranometricum*, de 1632, ele apresentou tabelas de senos, tangentes, secantes, e arcos senos, juntamente com os logaritmos.

8. Usando essa mesma técnica, Cavalieri demonstrou que o volume de um cone vale $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro circunscrito no mesmo, assim como calculou a área sob duas curvas. Uma outra contribuição importante dada por Cavalieri ao desenvolvimento do Cálculo, foi a introdução da hoje conhecida coordenada polar, ao transformar uma parábola apolônica $x^2 = ay$ (descoberta pelo matemático grego Apolônio de Pérgamo (c.262-190)) em uma espiral de Arquimedes $r = a\theta$, por intermédio das relações: $x = r$ e $y = r\theta$.

9. Os símbolos atuais de integração ($\int$) e de derivação (**d**) foram inventados pelo matemático

alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em 1675. Portanto, para Leibniz, *omnes linae* $y$ significava $\int y\ dx$. Também a Leibniz devemos os símbolos $\sim$ para "similar a" e $\simeq$ para "congruente a", bem como as notações (.), para produto, (:), para divisão, log x, para o logaritmo e $d^n$, para a diferencial de ordem n. Observe-se que a notação $\sqcap$ empregada por Leibniz para representar a igualdade não vingou, pois prevaleceu o sinal = anteriormente proposto pelo matemático inglês Robert Recorde (1510-1558), em seu livro *Whestone of Witte*, de 1557.

10. Em linguagem atual, Torricelli demonstrou que $\int^{\infty} \frac{dy}{y^2}$ converge.

11. A modificação introduzida por Fermat ao método de Cavalieri, consiste em considerar a área a ser obtida como constituída de pequenos retângulos (e não linhas, como considerava Cavalieri), retângulos esses de bases não uniformes, mas em progressão geométrica.

12. Esse cálculo foi feito por Saint-Vincent entre 1622 e 1625.

13. É oportuno observar que Torricelli usava o termo latino **latus versum** (tradução de um termo grego usado por Apolônio) quando se referia ao eixo real dos $x$.

14. Foi um aluno de Saint-Vincent, o jesuita e matemático belga Alfons Anton De Sarasa (1618-1667) quem interpretou a área sob a hipérbole retangular como sendo um logarítimo, em seu *Solutio Problematis a Mersenno Propositi* (*Solução do Problema Proposto por Mersenne*), editado em 1649. Aliás, uma falsa aplicação do método dos indivisíveis, levou Saint-Vincent a acreditar que havia resolvido o problema da quadratura do círculo, fato esse que abalou sua reputação como matemático. Convém chamar a atenção para o fato de que o matemático holandês Johan van Waveren Hudde (1629-1704) obteve, em 1656, a quadratura da hipérbole por meio do desenvolvimento em série de ln(1 + x).

15. É oportuno destacar que Roberval também calculou integrais envolvendo potências de senos, em seu estudo sobre a ciclóide, que, aliás, denominava ora de **trocóide** (da palavra grega **trocos**, que significa roda), ora de **roulette** (**roleta**) (nome este também usado por Pascal). No entanto, diferentemente de Roberval (e, também, de Cavalieri), Pascal insistiu na necessidade de distribuir os indivisíveis de maneira uniforme. Para isso, apresentou as primeiras idéias sobre integrais indefinidas e sobre mudanças de variáveis. Por exemplo, em notação atual, Pascal apresentou a seguinte integral: $\int sen^2\phi\ d\phi = -\int sen\phi\ d(cos\phi)$. Destaque-se, também, que Pascal em *Traité des Trilignes Retangles et leurs Anglets*, realizou cálculos correspondentes ao que mais tarde foi reconhecido como uma integração parcial.

16. Hoje, essa expressão pode ser obtida por intermédio da integral:
$\int_o^{\pi/2} sen^n x\ dx$ (sendo $n$ inteiro par), conhecida como **fórmula de Wallis**.

17. A retificação da ciclóide já havia sido conseguida por Roberval, no entanto, tal retificação não foi publicada. Por outro lado, os trabalhos de Neil e de Wren foram publicados por Wallis, em 1659, em seu livro *Tractatus Duo, Prior de Cycloide, Posterior de Cissoide* (*Dois Tratados, o Primeiro sobre a Ciclóide, e o Segundo sobre a Cissóide*). É interessante observar que enquanto Neil e Wren realizaram cálculos sobre o comprimento dos arcos, aproximando os mesmos por polígonos, cujo número de lados tornava-se infinito, o método empregado por van Heuraet baseava-se na taxa de variação no arco considerado, expresso na linguagem atual pela expressão: $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}$. (Aliás, esse método de van Heuraet não foi apresentado como uma prova formal, mas foi incluído como um roteiro geral em uma carta enviada, posteriormente (1659), ao matemático holandês Frans van Schooten (1615-1660)). Observe-se,

também, que em seu *Arithmetica Infinitorum* (1655), Wallis já havia percebido que um pequeno arco pode ser representado pela hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos representam os incrementos na abcissa e na ordenada, ou seja, em notação moderna: ds = $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

18. Nesse livro, além da retificação de arcos, Gregory apresenta o traçado de tangentes a curvas e o cálculo de áreas e volumes, usando, basicamente, o método da **exaustão** associado à **redução ao absurdo**. O método da exaustão ele já o havia estendido e generalizado no livro *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, escrito em 1667. Aliás, neste livro, Gregory esboçou o início de uma teoria de convergência (idéia de passagem ao limite), em sua definição de **função**. É interessante notar que Gregory dividia a Matemática em **Universal** e **Particular**, diferentemente da divisão tradicional até então considerada: **Geometria** e **Aritmética**.

19. Ainda nesse livro, Huygens descreveu uma série de importantes resultados que obteve para o desenvolvimento da Mecânica, resultados esses que o fizeram precursor de conceitos mecânicos fundamentais, como o de **momento de inércia**, de **energia** (**cinética** e **potencial**), bem como o do **princípio da conservação de energia**.

20. Os gregos conheciam, além das curvas mais simples (círculo, cônicas (elípse, parábola e hipérbole) de Apolônio e espiral de Arquimedes), as seguintes curvas: a **quadratriz** (hoje, sua equação é dada por: $y = x\ \mathrm{tg}(\frac{\pi y}{2a})$) de Hippias de Elis (c.460 a.C- ? ); a **conchóide** (hoje, sua equação é dada por: $r = a + b\ \sec\theta$) de Nicomedes (f.c.200 a.C.); e a **cissóide** (hoje, sua equação é dada por: $y^2(a + x) = (a - x)^3$) de Diocles (f.c.final do século 2, a.C.). Note-se que essas curvas foram descobertas na tentativa de resolver o problema da trissecção do ângulo e o da duplicação do cubo, problemas esses já referidos na nota 2. Além dessas curvas, os gregos conheciam ainda a **hipópede** (resultante da intersecção de uma esfera com um cilindro), que foi inventada por Eudoxo de Cnido, com o objetivo de explicar seu modelo planetário.

21. Arquimedes definiu sua espiral da seguinte maneira. Se deslocarmos uma reta com uma das extremidades fixas num movimento uniforme em um plano até que ela retorne à sua posição inicial, e se, ao mesmo tempo em que deslocamos a reta, um ponto move-se ao longo dessa reta num movimento uniforme, começando da extremidade fixa, esse ponto descreverá uma **espiral** no plano.

22. É oportuno salientar que essa construção não está clara no livro de Arquimedes que trata da espiral (*Sobre as Espirais*). Presume-se que Arquimedes haja utilizado tal construção, baseado no princípio do **paralelograma de velocidades**, que havia sido apresentado pelo filósofo grego Estratão de Lâmpsaco (c.340-c.270) em seu livro *A Mecânica*, escrito por volta de 287 a.C. (ARQUIMEDES, op. cit.)

23. Nesse ano, Torricelli publicou o trabalho intitulado *De parabole* (*Sobre a parábola*), em cujo apêndice ele estudou a quadratura da ciclóide e a construção de tangentes à mesma. É interessante observar que Torricelli obteve a quadratura da ciclóide por dois métodos: indivisíveis e exaustão. Observe-se, também, que Torricelli usou o método euclidiano para traçar tangentes a curvas do tipo (em notação atual): $x^m y^n = k$.

24. Tomando conhecimento do trabalho de Torricelli sobre tangentes a curvas, Roberval acusou-o, em 1646, de o haver plagiado. Contudo, o método de descrever uma curva como decorrente da composição de movimentos, não era original de Roberval, uma vez que Galileu já o havia utilizado em seu famoso **princípio da independência dos movimentos**, apresentado no livro *Diálogo supra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano* (*Diálogo sobre os dois Máximos Sistemas do Mundo Ptolomaico e Copernicano*), de 1632. Usando esse princípio,

Galileu demonstrou que um corpo lançado horizontalmente de uma certa altura, por exemplo, descreverá uma parábola em consequência do mesmo estar sujeito a dois movimentos: um horizontal uniforme e um vertical acelerado (queda livre).

25. Nesse mesmo ano de 1629, Fermat escreveu o trabalho intitulado *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (*Introdução a Lugares Geométricos Planos e Sólidos*) no qual aplicou a recente **Álgebra** (disciplina da Matemática, que havia sido desenvolvida pelos matemáticos, o italiano Gerolamo Cardano (Jerome Cardan) (1501-1576), em 1545; o também italiano Raphael Bombelli (c.1526-1573), em c.1560; e o francês François Viète (1540-1603), em 1591) à Geometria dos antigos. Nesse trabalho, Fermat representou as cônicas por intermédio de equações. Em vista disso, ele é considerado o precursor da Geometria Analítica, juntamente com Descartes, conforme veremos mais adiante. Registre-se que os trabalhos de Fermat (sobre máximos e mínimos e Geometria Analítica) só foram publicados em 1679, com o título *Varia Opera Mathematica* (*Várias Obras Matemáticas*).

26. Essa representação foi introduzida pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), em 1820/1821. É oportuno observar que Newton usou **o**, ao invés do **E** de Fermat (escrito como **e** por Schooten) e, por fim, Leibniz introduziu a notação atual: **dx**. Observe-se, também, que a escolha da notação **o** para representar uma quantidade pequena e, que, subseqüentemente deve ser considerada nula, já havia sido utilizada por Jean de Beaugrand por volta de 1638, ao estudar o método das tangentes de Fermat. Essa mesma notação foi usada por Gregory, em seu *Geometriae*, de 1668.

27. O problema de máximo e mínimo já havia sido considerado por Kepler, em seu *Nova Stereometria*, de 1615, ao demonstrar que de todos os paralelepípedos de bases quadradas inscritos em uma esfera, o cubo é o maior deles.

28. Por essa razão, o matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) considerava Fermat o inventor do **Cálculo Diferencial**.

29. Fermat usou seu método para determinar o centro de gravidade do **parabolóide de revolução**, denominado por ele de **parabolóide conóide**. Ainda com relação ao método de Fermat para achar máximos ou mínimos de uma função, é oportuno esclarecer que ele conseguia distinguir um máximo de um mínimo, examinando o sinal do coeficiente de $E^2$, na expansão de $f(x + E)$ em potências de **E**. Aliás, é também oportuno esclarecer que esse problema de máximo e de mínimo foi melhor discutido pelo matemático francês Michel Rolle (1652-1719), no livro *Méthode pour Résoudre les Égalitéz de tous les Dégrez* (*Método para Resolver as Igualdades de todos os Graus*), publicado em 1691.

30. Esse texto, é um dos três apêndices de seu famoso *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences* (*Discurso sobre o método para conduzir bem sua razão, e procurar a verdade nas ciências*). Os outros dois apêndices, são: *La Dioptrique* (*A Dióptrica*) e *Les Météores* (*Os Meteóros*). Saliente-se que, também nesse apêndice *La Géométrie*, Descartes aplicou a Álgebra de Cardan, Bombelli e Viète à Geometria, cujas idéias iniciais foram por ele desenvolvidas, em 1619, segundo o matemático holandês Isaac Beeckman (1588-1637). É curioso observar que Descartes usava os símbolos **x**, **y**, **z**... para denotar distâncias de um ponto a um conjunto de retas, e não necessariamente segundo um ângulo reto. Portanto, ele não usava esses símbolos para representar, como se faz hoje, eixos coordenados retangulares.

31. Quando tomou conhecimento do método geral sobre tangentes, desenvolvido por Fermat através da carta que lhe escreveu Mersenne, em 1638, Descartes desafiou Fermat a traçar a tangente

à curva (em notação atual): $x^3 + y^3 = 3axy$, mais tarde conhecida como **folium de Descartes**. Fermat, é claro, não teve dificuldade em obtê-la.

32. Antes, em 1652, o matemático belga René-François de Sluse (1622-1685) apresentou um conjunto operacional de regras e fórmulas para traçar tangentes a curvas algébricas do tipo (na notação atual) f(x,y) = 0, onde f(x,y) é um polinômio de **x** e **y**. No entanto, como tais regras só foram publicadas em 1673, na *Philosophical Transactions of Royal Society*, o mérito é devido a Hudde, por havê-las redescoberto, em 1657-1658. (Registre-se que Hudde usou coordenadas espaciais, em 1657.) Essas **regras de Hudde** foram divulgadas por Schooten, em seu *Exercitationum Mathematicarum* (*Exercícios de Matemática*), de 1657, e na segunda edição do livro *Geometria a Renato Des Cartes*, em 1659. (A primeira edição dessa tradução latina de *La Geométrie* de Descartes, ocorreu em 1649.) Aliás, nessa segunda edição, Schooten incluiu, também, o método de Huygens para determinar o ponto de inflexão de uma curva; um trabalho resumido de Hudde intitulado *Methodus de Maximis et Minimis*, e um pequeno trabalho de Heuraet mostrando como retificar um arco da parábola semicúbica, de 1658, trabalho este já referido anteriormente.

33. Parece que Barrow não consultou diretamente esse trabalho de Fermat. No entanto, teve conhecimento indireto dele, através de consultas aos trabalhos de Cavalieri, Huygens, Gregory, Saint Vincent, e Wallis.

34. Parece que a idéia do "triângulo característico" (nome criado por Leibniz) foi conferida a Barrow, por seu amigo, o físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727). Aliás, essa idéia, já havia sido considerada por Wallis, em seu estudo sobre a retificação de arcos, conforme já mencionamos. Observe-se que Barrow foi **professor Lucasiano** de Geometria, em Cambridge (cadeira criada por Henry Lucas (c.1610-1663)) e, em 1669, renunciou a mesma em favor de Newton. (É interessante notar que essa versão tradicional da renúncia de Barrow em favor de Newton, por achá-lo superior a si em matemática, está sendo hoje contestada, pois é difícil conciliar essa explicação com as características universitárias daquela época. Segundo o Historiador e Filósofo da Ciência, o norte-americano Richard S. Westfall (*A Vida de Isaac Newton*, Editora Nova Fronteira, 1995), é provável que Barrow haja renunciado em favor de um cargo mais elevado, uma vez que um ano após sua renúncia, foi nomeado capelão do Rei e, depois de três anos, Diretor do **Trinity College**.)