

Estudo Experimental da Rotação de um Corpo Rígido ao Redor de um Eixo Fixo. Conservação do Momento Angular

Jorge Ivan Cisneros e Edeval Lujan

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

13083-970, Campinas, SP, Brasil

Trabalho recebido em 14 de setembro de 1993

Resumo

Foi desenhado, construído e testado, um aparelho para o estudo do movimento de rotação de um corpo rígido ao redor de um eixo fixo. O disco giratório pode atingir velocidades da ordem de 50 rad/s. A velocidade angular é medida mediante um detetor de pulsos de luz gerados por um feixe que passa através do disco por um conjunto de furos localizados na sua periferia. O momento de inércia do sistema pode ser mudado bruscamente durante o movimento e a decorrente discontinuidade da velocidade angular pode ser medida com boa precisão. O equipamento pode ainda ser utilizado como uma máquina de Atwood. Neste caso determina-se o valor do momento de inércia. São apresentados resultados de três experimentos diferentes os quais mostram a boa qualidade das medidas feitas e seus erros experimentais.

Abstract

An equipment for the experimental study of the rotation of a rigid body was designed, constructed and tested. Its rotating disc can reach angular speeds of the order of 50 rad/s. The angular speed is measured by means of a light detector which receives light pulses coming through holes evenly distributed near the periphery of the disc. The moment of inertia of the system can be changed suddenly during the the operation, and the subsequent discontinuity in the angular speed can be determined with a rather good accuracy. Alternatively the equipment can be used as an Atwood machine in which case the value of the moment of inertia is determined. Results of three different experiments are presented, which show the quality of the measurements and its experimental errors.

1. Introdução

É descrito neste trabalho um aparelho destinado ao estudo do movimento de rotação de um corpo rígido ao redor de um eixo fixo. São propostas algumas experiências que podem ser realizadas com ele e fornecidos resultados experimentais que permitem avaliar a qualidade das medidas e sua precisão.

Para um satisfatório desenvolvimento dos trabalhos necessário que o aluno conheça a teoria da cinemática e da dinâmica do movimento de rotação, em particular os conceitos velocidade e aceleração angulares, mo-

mento angular e sua conservação, momento de inércia, torque, teoria da Máquina de Atwood, etc.^[1,2]. Para o correto processamento dos dados também é conveniente o estudo das teorias dos erros e da regressão linear^[3].

Neste experimento é possível realizar medidas satisfatórias da velocidade angular durante o movimento de rotação, o que permite avaliar quantitativamente as características cinemáticas e dinâmicas do movimento, como será visto na seção 2 a seguir.

O aparelho pode funcionar com seu eixo de rotação nas posições vertical e horizontal. Nesta última ele pode ser usado como uma máquina de Atwood o que per-

mite medir a aceleração do sistema com diferentes configurações e determinar os correspondentes momentos de inércia.

2. Descrição do aparelho

O aparelho consiste em um disco leve de alumínio, fixo a um cilindro central que pode girar em relação a um suporte fixo, como pode ser visto nas Figs 1 e 2. O diâmetro e a espessura aproximados do disco são 30 cm e 4 mm, respectivamente. O atrito do movimento entre a parte móvel (giratória) e o suporte fixo diminuído mediante dois rolamentos, posicionados na parte inferior do eixo que penetra na plataforma de ferro fundido. Estes rolamentos fazem com que o movimento de rotação seja suave e que o atrito possua um valor relativamente pequeno.

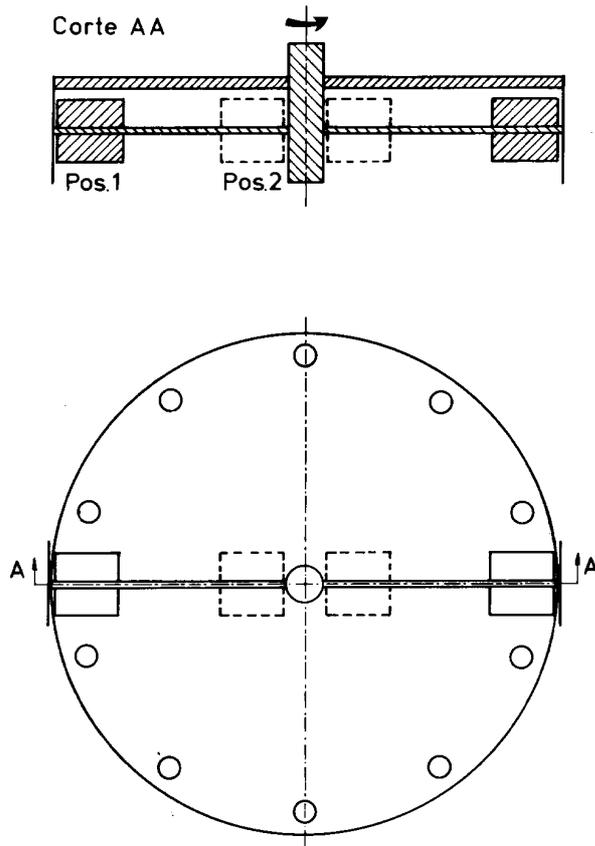


Figura 1: Desenho simplificado do aparelho de rotação. Vista inferior e corte mostrando o cilindro central onde são fixados o disco e as varetas com os pesos deslizantes nas suas posições 1 e 2. A vista mostra também os 10 furos do disco usados para a medida da velocidade angular.

Dois pesos cilíndricos de latão (ou outro material de densidade similar) estão vinculados ao disco na sua

parte inferior por meio de uma vareta diametral. Este conjunto gira junto com o disco. Os dois pesos podem deslizar ao longo das varetas e podem ser fixados em duas posições simétricas, mostradas na Fig. 1, perto da periferia do disco (posição 1) e perto do eixo de rotação (posição 2). As massas relativas do disco e dos pesos foram escolhidos de modo que os momentos de inércia do conjunto I_1 e I_2 com os pesos colocados nas duas posições indicadas, sejam bastante diferentes.

Uma das características importantes deste aparelho é que durante o movimento de rotação os pesos podem mudar bruscamente da posição central para a posição periférica. A maneira de conseguir esta mudança é mediante um mecanismo tipo gatilho não desenhado na figura.

O acionamento do sistema é manual, mediante uma corda previamente enrolada na parte superior do eixo o disco é acelerado até velocidades da ordem de 40 rad/s. O medidor da velocidade angular consiste em um contador acoplado a um detector de luz. Uma fonte de luz localizada na periferia do disco (veja a Fig. 2-a) emite um feixe perpendicular à superfície do mesmo, que passa através dos furos indicados na Fig. 1. Durante o movimento o detector recebe 10 pulsos de luz por rotação. O circuito eletrônico do contador possui chaves para iniciar e parar a contagem dos pulsos e para zerar o contador. A medida da velocidade angular pode ser realizada medindo o número de pulsos durante períodos curtos obtendo-se desta maneira valores da velocidade média nestes intervalos. Se os intervalos escolhidos forem suficientemente pequenos, as velocidades assim determinadas podem ser consideradas como os valores instantâneos da velocidade angular do sistema.

3. Experimento I

O objetivo deste primeiro experimento é o estudo da cinemática do movimento desacelerado de rotação do sistema, que ocorre após ter sido acionado com a corda como indicado na seção anterior. A desaceleração observada é produzida por um torque oposto ao movimento que provém da ação combinada da viscosidade do ar e do atrito nos rolamentos.

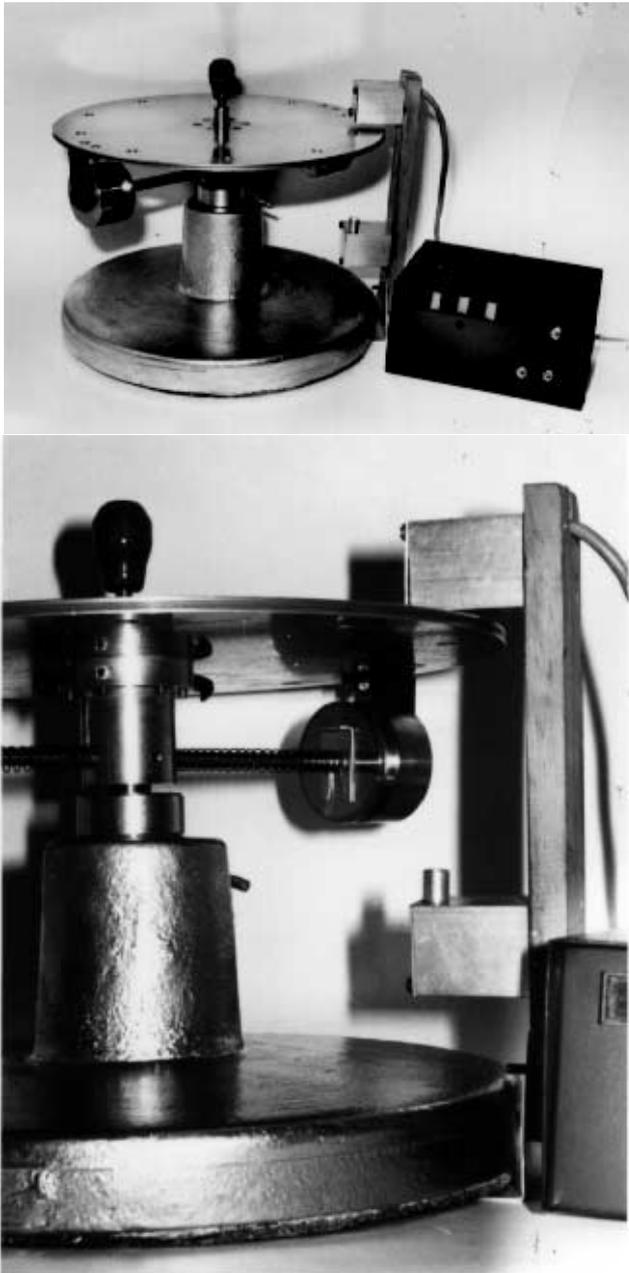


Figura 2: a) Fotografia do protótipo. Os pesos estão na posição 1 (periférica) pressionados por uma mola. O botão escuro, acima do centro do disco, serve para disparar o mecanismo de gatilho que libera os pesos de sua posição vertical. Presos a um suporte vertical, apoiado na mesa à direita do disco, estão a fonte de luz na parte superior e o detector embaixo. O contador digital se encontra à direita do aparelho. b) Vista lateral inferior do aparelho mostrando a base de ferro fundido com o eixo vertical ao qual é fixado o conjunto superior giratório. À direita do cilindro central do sistema móvel e embaixo do disco se observa a pequena garrinha (escura) do mecanismo de gatilho que segura os pesos na posição 2 (central).

Determina-se a velocidade angular em função do tempo. As medidas podem ser realizadas durante intervalos (de medição) regularmente distribuídos no tempo ($\delta t = 5$ ou 10 s), intercalados por outros (de pre-

paração) que servem para registrar a leitura e zerar o contador que fica pronto para a próxima medida. Se o experimento for realizado por dois alunos, um deles com o cronômetro funcionando permanentemente, liga e desliga o contador nos instantes apropriados, o segundo aluno durante os intervalos de preparação, registra o número de pulsos do intervalo anterior e zera o contador.

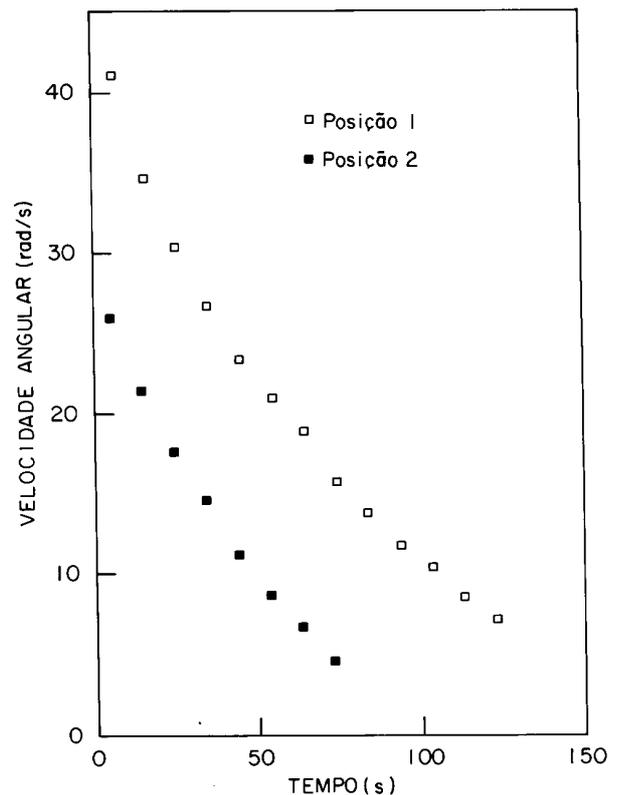


Figura 3: Experimento 1. Resultados experimentais de duas medidas da velocidade angular em função do tempo. As duas curvas correspondem as duas configurações com os pesos nas posições 1 e 2. Os pulsos do contador foram registrados em intervalos alternados de 5 segundos.

Na Fig. 3 apresentamos os resultados de dois experimentos nos quais os pesos estavam fixados nas posições 1 e 2. Os intervalos de medição e preparação foram $(0,5);(10,15)...$ e $(5,10);(15,20)...$ segundos respectivamente, sendo que, na figura, cada valor da velocidade angular foi plotado no centro do correspondente intervalo de medição. Nas duas curvas da figura se observa a diminuição da velocidade angular do sistema, e pela curvatura deduzimos também que o módulo da aceleração angular diminui com o tempo, ou seja, a medida que a velocidade diminui. Este comportamento sugere a conveniência do estudo da aceleração angular, em função da velocidade angular, isto foi feito mediante

a acumulação de dados de cinco experimentos similares a um dos mostrados na Fig. 4. Esta acumulação foi necessária para aumentar o número de dados e consequentemente diminuir sua dispersão estatística. Cada valor da aceleração foi obtido a partir de dois valores contíguos da velocidade angular; os resultados estão mostrados na Fig. 4. Mesmo que a dispersão estatística dos pontos experimentais seja razoavelmente grande, se observa uma dependência aproximadamente linear do módulo da aceleração angular em função da velocidade. A linha reta da figura representa a regressão linear dos dados cujo coeficiente de correlação é $C = 0,97$. A suposta linearidade observada entre velocidade e aceleração angulares, logicamente se aplica também ao torque que provoca a desaceleração do sistema e às forças que geram esse torque. A linearidade entre forças de natureza viscosa e velocidade é típica em movimentos de baixa velocidade^[4], como o caso do presente experimento, mas a análise completa dos fenômenos é bastante complexa e foje dos objetivos deste trabalho.

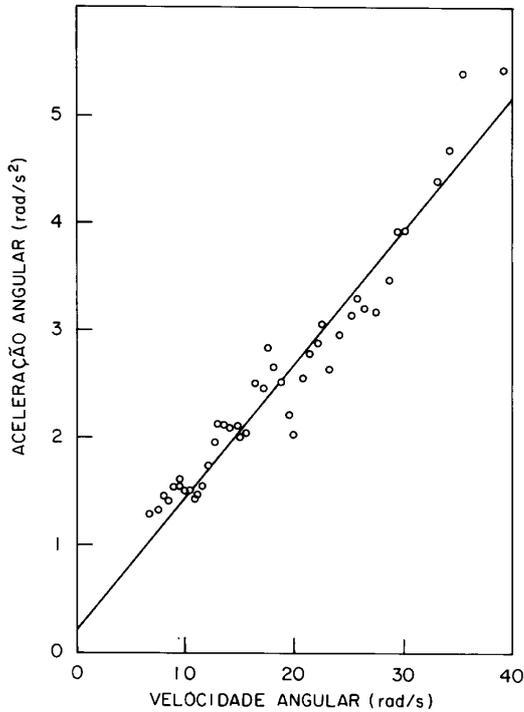


Figura 4: Experimento 1. Módulo da aceleração angular em função da velocidade angular. Os dados correspondem à acumulação de resultados de 5 experimentos similares aos da figura 3, com os pesos na posição 1. A aceleração foi obtida a partir de dois valores da velocidade em intervalos consecutivos. A reta determinada por regressão linear não passa pela origem indicando a existência de um pequeno torque de atrito independente da velocidade.

4. Experimento II

Neste experimento é estudado o efeito do deslocamento quase instantâneo dos pesos durante o movimento sobre a velocidade angular.

O sistema é movimentado de maneira similar ao experimento anterior, realizando-se as medidas da velocidade seguindo o mesmo esquema já explicado. O experimento começa com os pesos na posição 2. As leituras são feitas normalmente até atingir aproximadamente a metade do tempo de duração do movimento do disco, aciona-se então o gatilho que libera os pesos no instante t_0 , estes se deslocarão quase instantaneamente até à posição 1 (periférica). As leituras continuam de forma ininterrupta até o fim do movimento.

Uma brusca diminuição da velocidade angular é observada no instante do deslocamento dos pesos. Esta variação de ω está relacionada à variação do momento de inércia produzida após o gatilho ter sido disparado, e deve ser analisada à luz do princípio de conservação do momento angular.

A Fig. 5 mostra um experimento típico. Aproveitando a relação funcional entre velocidade e aceleração angulares observada no experimento I, $\ln \omega$ foi plotado em função do tempo visando facilitar a obtenção dos valores extrapolados ω_1 e ω_2 da velocidade angular imediatamente antes e imediatamente depois de t_0 .

No movimento de rotação ao redor de um eixo fixo o momento angular do corpo L é determinado por:

$$L = I\omega \quad (1)$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação. Neste experimento temos conservação do momento angular com variação do momento de inércia durante o deslocamento rápido dos pesos. Assim, de acordo com os dados experimentais da Fig. 5, obtemos:

$$\omega_2/\omega_1 = I_1/I_2 = 2,0 \pm 0,1 \quad (2)$$

5. Experimento III

O objetivo deste novo experimento é a determinação dos momentos de inércia do sistema com os pesos colocados nas duas posições 1 e 2 descritas na seção 2. Para este fim o eixo do disco é colocado na posição horizontal. Neste experimento não é usado o sistema de medição da velocidade angular.

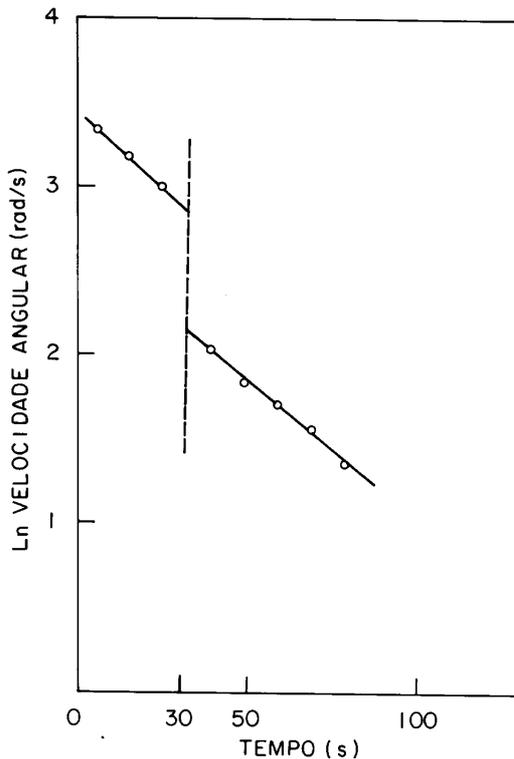


Figura 5: Experimento II. Logaritmo da velocidade angular em função do tempo com mudança instantânea de configuração do sistema em $t_0 = 30$ s. Os valores extrapolados de ω são: $\omega_2 = 17,6 \pm 0,2$ rad/s e $\omega_1 = 8,6 \pm 0,2$ rad/s.

O sistema agora é usado como uma máquina de Atwood na qual a polia está representada pela parte giratória de nosso aparelho. O disco é movimentado mediante a colocação de duas massas diferentes m_1 e m_2 . A aceleração das massas, considerando desprezível o torque das forças de atrito, é dada pela seguinte equação

$$a = (m_2 - m_1)gR^2/[I + (m_1 + m_2)R^2] \quad (3)$$

onde R é o raio da polia, I seu momento de inércia e g a aceleração da gravidade.

Para cada combinação das massas m_1 e m_2 , a aceleração a é determinada medindo o tempo correspon-

dente a um dado deslocamento das massas da ordem de 1 m.

A escolha dos valores das massas deve ser tal que o torque das tensões do fio deve ser bastante maior que o torque de atrito. Este último pode ser determinado facilmente da seguinte maneira. Como neste experimento as velocidades de rotação são pequenas o único atrito relevante pertence aos rolamentos. Este torque pode ser determinado a partir da condição estática pendurando massas levemente diferentes e aumentando sua diferença até conseguir o início do movimento de rotação do disco.

Variando os valores relativos de m_1 e m_2 , mas mantendo constante sua soma em todas as medidas, a aceleração varia linearmente com a diferença das massas Δm . Neste caso podemos escrever:

$$a = \beta(m_2 - m_1) \quad (4)$$

onde

$$\beta = gR^2/[I + (m_1 + m_2)R^2] \quad (5)$$

ou

$$I = (gR^2/\beta) - (m_1 + m_2)R^2 \quad (6)$$

Fazendo um conjunto de medidas de a em função da diferença das massas, β é calculado a partir da equação (4) mediante uma regressão linear e depois o momento de inércia é determinado usando a equação (6).

Os resultados experimentais mostrados na Fig. 6 foram obtidos com os pesos nas mesmas posições usadas no experimento II acima, de modo que ambos os resultados são comparáveis.

Os resultados obtidos são

$$I_1 = (2,63 \pm 0,07) \times 10^{-2} \text{kgm}^2 \quad (7)$$

$$I_2 = (1,17 \pm 0,04) \times 10^{-2} \text{kgm}^2 \quad (8)$$

$$I_1/I_2 = 2,25 \pm 0,10 \quad (9)$$

Comparando (2) e (9) vemos que a relação dos momentos de inércia medidos nos experimentos II e III tem uma diferença levemente maior que a esperada a partir dos erros experimentais. Foram calculados os valores teóricos dos momentos de inércia usando as dimensões e massas das peças que compõem a parte giratória do equipamento:

$$I_1 = 2,32 \times 10^{-2} \text{kgm}^2 \quad (10)$$

$$I_2 = 1,08 \times 10^{-2} \text{kgm}^2 \quad (11)$$

$$I_1/I_2 = 2,15 \quad (12)$$

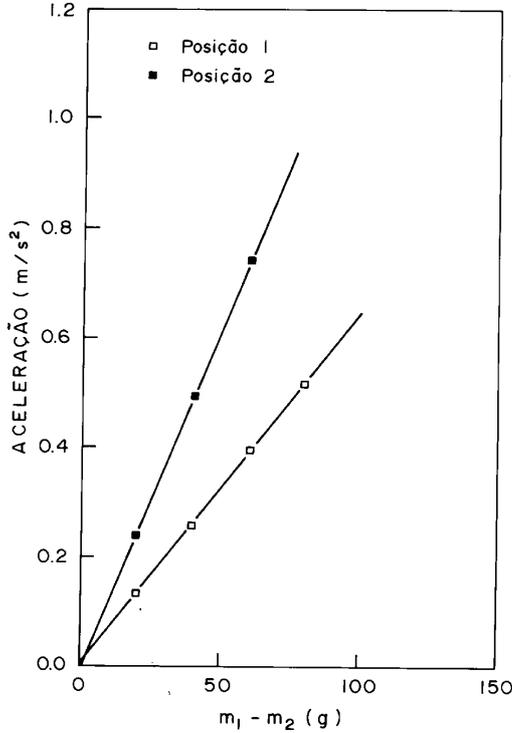


Figura 6: Experimento III (Máquina de Atwood). Aceleração em função da diferença de massas Δm correspondente às duas configurações dos pesos. As declividades das retas ajustadas usadas para determinar os momentos de inércia têm os seguintes valores: $\beta_1 = 12,6 \pm 0,1 [m/(kgs^2)]$ e $\beta_2 = 6,43 \pm 0,07 [m/(kgs^2)]$. Durante as medidas a soma das massas foi mantida constante: $m_1 + m_2 = 180$ g.

Neste experimento as velocidades obtidas foram bem menores que as atingidas pelo aparelho nos dois experimentos anteriores. Em todos os casos o torque de atrito estático τ (aproximadamente 3×10^{-3} N m) é bem menor que o torque ativo $g(m_2 - m_1)R$, o que justificaria o uso da equação (3) para o cálculo do momento de inércia. No entanto os valores experimentais obtidos usando a equação (6) são maiores que os valores teóricos, o que poderia ser explicado por uma diminuição dos valores de β como consequência da viscosidade do ar.

6. Comentários e discussões

Durante a construção e os testes do protótipo chegamos às seguintes conclusões:

a) O funcionamento do aparelho é satisfatório sendo seu movimento suave e sem vibrações indesejadas. Durante o acionamento da corda usada para por em movimento o disco com os pesos na posição (central), o mecanismo

de gatilho se dispara espontaneamente quando a velocidade atinge valores próximos a 42 rad/s. Isto limita a velocidade máxima atingível pelo disco no experimento II e, portanto, o tempo de duração do movimento.

b) A velocidade angular do disco, medido neste aparelho mediante a contagem de pulsos de luz, pode também ser medida usando outros métodos. O estroboscópico é um deles, mas a realização de leituras regularmente espaçadas durante o tempo que dura o movimento pode ser mais complicada, dependendo do tipo de equipamento utilizado. O método mais conveniente, mas não o mais barato, é medir diretamente a velocidade angular com um tacômetro o que possibilita o aumento do número de leituras durante o movimento.

c) Este experimento se presta perfeitamente para automatizar a aquisição dos dados mediante um microcomputador: o tempo, o número de pulsos, a velocidade angular, etc., podem ser arquivados na memória do computador para posterior processamento.

d) No terceiro experimento deve esperar-se desvios da linearidade indicada pela equação 4 nos seguintes casos: i) se Δm for muito pequeno a equação 3 pode deixar de ser válida pela presença de um torque de atrito (atrito nos rolamentos + viscosidade do ar) não desprezível; ii) se Δm for muito grande podem acontecer deslizamentos indesejados entre o fio e a superfície da calha da roldana. Neste caso (Δm grande) acontece também que o tempo de queda diminui dificultando sua medida, e aumentando portanto seu erro experimental.

Agradecimentos

Agradecemos aos técnicos da Oficina Mecânica Central do IFGW pela eficiente usinagem das peças, à aluna Débora Toledo Michelassi pelas medidas realizadas e a Antônio Carlos da Costa pelas fotografias.

Referências

1. *Curso de Física Básica*, Vol. 1 Mecânica, Moises Nussenzveig, 2a. Edição, Editora Edgardo Blücher Ltda., pg. 412.
2. *Física*, Vol. 1, J.P. McKelvey e H. Grotch, Editora Harper & Row do Brasil, São Paulo 1979, pag. 331.
3. *An introduction to Experimentation*, D.C. Baird, Prentice Hall Inc. N.Y. 1974.
4. *Fundamentals of Physics*, B.M. Yavorsky and A.A. Pinsky, MIR, Moscou, 1975, Vol.I, pg. 105.