

## Artigos de revisão sobre relatividade geral e cosmologia

# Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial

(*Exact solutions to the Einstein equations with axial symmetry*)

Patricio S. Letelier<sup>1</sup>

*Departamento de Matemática Aplicada-IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil*

Discutimos a importância das soluções exatas das equações de Einstein no desenvolvimento da relatividade geral, em particular as soluções com simetria axial. Apresentamos um resumo da teoria da gravitação newtoniana colocando ênfase nas soluções exatas da equação de Poisson, em particular a geração de soluções que representam discos, sendo também o critério de estabilidade de Rayleigh discutido neste contexto. Fazemos um resumo da teoria da gravitação de Einstein e apresentamos a solução de Weyl que representa o campo gravitacional de um corpo com simetria axial. A geração de soluções exatas das equações de Einstein que representam o espaço-tempo associado a discos finos, discos grossos e discos com halos é estudada usando uma extensão do método das imagens. Os parâmetros físicos dos discos tais como a densidade, a pressão e a velocidade do som também são analisados em detalhe. A estabilidade de Rayleigh e a estabilidade hidrodinâmica são também estudadas para uma família de discos finos isotrópicos previamente apresentada.

**Palavras-chave:** simetria axial, discos, estabilidade, buracos negros, soluções exatas, equações de Einstein.

We discuss the relevance of the exact solutions to the Einstein equations in the development of general relativity, in particular the solutions with axial symmetry. We present a summary of the Newtonian gravity theory with emphasis in the generation of solutions to the Poisson equation that represent disks. Also the Rayleigh criterion of stability is discussed in this context. We give a summary of the Einstein theory of gravitation and present the Weyl solution that represent the gravitational field of a body with axial symmetry. The generation of exact solutions to the Einstein equations that describe the space-time associated to thin disks, thick disks and disks with halos is studied using an extension of the image method. The physical parameters of the disks such as, density, pressure, sound velocity are also analyzed in detail. Furthermore, both the Rayleigh stability and hydrodynamical stability are studied for a family of thin isotropic disks previously studied.

**Keywords:** axial symmetry, disks, stability, black holes, exact solutions, Einstein equations.

## 1. Introdução

Existe uma variedade de soluções exatas que têm desempenhado um papel muito importante no desenvolvimento tanto teórico como experimental da relatividade geral [1]. Sem dúvida a solução mais importante é a solução de Schwarzschild, que representa o exterior de um corpo maciço com simetria esférica. Esta solução está na base dos três testes clássicos da relatividade geral: o deslocamento de linhas espectrais pela presença do campo gravitacional, o desvio de um feixe de luz que passa perto de uma estrela e a precessão do periélio dos planetas. Além disso esta solução deu origem ao conceito de buraco negro [2].

Destacamos também a solução de Kerr, que representa um buraco negro em rotação, e as soluções que representam ondas gravitacionais, a mais simples sendo a solução de Einstein-Rosen, que representa uma onda com simetria cilíndrica. Existe toda uma

outra linha de soluções que são usadas para representar o espaço-tempo associado ao Universo, das quais destacamos as soluções baseadas na métrica de Friedmann. Soluções que representam espaços homogêneos também têm desempenhado um papel importante na compreensão de diversos problemas, tais como o da singularidade inicial do universo, das quais destacamos a solução de Kasner e Bianchi IX [1]. Soluções que representam espaços não homogêneos foram consideradas em [3].

Soluções que representam o campo gravitacional de um corpo com simetria axial representam um papel importante tanto na teoria da gravitação de Newton como na teoria da gravitação de Einstein, já que a forma natural de um fluido isolado auto-gravitante tem simetria axial. Em particular configurações do tipo disco são de muito interesse já que podem ser usados para modelar galáxias e discos de acreção.

---

<sup>1</sup>E-mail: letelier@ime.unicamp.br.

Soluções que representam discos sem pressão radial foram estudadas primeiramente por Bonnor e Sackfield [4], e Morgan e Morgan [5], e com pressão radial por Morgan e Morgan [6]. Várias classes de soluções exatas das equações de Einstein que representam discos finos com ou sem pressão radial têm sido obtidas por diferentes autores [7]-[16]. Discos finos que podem ser considerados com fonte na métrica de Kerr foram apresentados em [17], e discos com rotação e fluxo de calor foram estudados em [18]. Também discos com tensão radial [19], campos magnéticos [20] e campos magnéticos e elétricos foram considerados em [21]. Superposições não lineares de um disco com um buraco negro foram obtidas primeiramente por Lemos e Letelier [10]. Discos de fluido perfeito com halos [22] e discos de fluido perfeito carregado [23] também têm sido estudados. Para um apanhado de discos finos veja por exemplo a Ref. [24].

Nos trabalhos citados um método inverso foi usado para resolver as equações de Einstein. Em outras palavras, o tensor de energia-momento do disco foi computado a partir da métrica do espaço-tempo que representa o disco. O método é uma adaptação do conhecido método das imagens estudado em eletrostática, onde cortando e colando soluções para o vácuo podem ser geradas soluções com fontes tipo disco. O método é apresentado esquematicamente na Fig. 1. O método direto, que é a resolução das equações de Einstein dada a fonte (tensor de energia-momento) tem sido usado pelo grupo de Jena para gerar uma variedade de soluções altamente não triviais que representam discos [25]-[32].

Mesmo que em uma primeira aproximação discos finos possam ser usados como modelos úteis de galáxias, os modelos mais realísticos devem levar em conta a espessura do disco. A adição de uma nova dimensão muda as propriedades dinâmicas do disco, como por exemplo a sua estabilidade. Discos grossos em vários sistemas de coordenadas foram apresentados em [33].

O método usado para construir os discos grossos é uma generalização do método das imagens, no qual além de cortar e colar as soluções no vácuo adiciona-se um enchimento. Em [33] se discute uma função particular de enchimento para engrossar os discos. Esquematicamente o método é apresentado na Fig. 2.

Neste trabalho apresentaremos uma visão panorâmica de alguns resultados relacionados com soluções exatas das equações de Einstein que representam discos finos, discos finos com halos e discos grossos. Em particular estaremos interessados em modelos que representem discos com características físicas semelhantes aos discos galácticos [34]. Em outras palavras, discos cuja densidade tenda a decair com a distância, com massa finita e positiva, com pressão e não com tensão e com velocidade do som dentro do disco menor que a velocidade da luz. Em resumo, discos feitos de matéria usual. Também procuraremos discos estáveis perante pequenas perturbações.

Na seção seguinte faremos um pequeno resumo da teoria da gravitação de Newton, dando ênfase à geração de soluções exatas da equação de Poisson que representam discos finos. Também generalizaremos estas soluções para representar discos grossos e mostraremos alguns exemplos em cada caso. Concluiremos a seção apresentando o critério de Rayleigh que mostra o quanto uma órbita circular é estável perante perturbações radiais [35].

Na terceira seção apresentaremos as principais equações da relatividade geral. A solução para um espaço-tempo estático com simetria axial, a solução de Weyl [36, 37], também será apresentada. Além disso, a solução de Schwarzschild será escrita em diversos sistemas de coordenadas que servem de base para gerar as soluções de discos. Na quarta seção estudaremos o modelo de disco de Morgan e Morgan e a geração de uma família de soluções que representam discos cuja matéria é um fluido anisotrópico [22]. Também estudaremos a geração de discos com halos de matéria isotrópica. Na quinta seção estudaremos a geração de discos grossos e apresentaremos uma solução com boas propriedades físicas.

Na penúltima seção apresentaremos um estudo da estabilidade de discos finos, primeiro usando a extensão relativística do critério de Rayleigh e depois estudando a estabilidade “hidrodinâmica” do disco [38]. Encontraremos que o disco fino isotrópico construído a partir da solução de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas é estável.

Na última seção discutiremos alguns dos resultados apresentados e faremos algumas considerações sobre estudos correlatos.

## 2. Gravidade newtoniana

A equação da teoria da gravitação de Newton para uma partícula que interage com outras descritas pela sua distribuição de massa  $\rho(x, y, z)$  é a equação de Poisson para o potencial  $\Phi(x, y, z)$ :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho \quad (1)$$

e a equação de movimento de Newton

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi, \quad (2)$$

com  $\vec{x} = (x, y, z)$ . Quando partícula se encontra em uma região sem outras massas tem-se  $\rho = 0$ , e a equação de Poisson se reduz à equação de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (3)$$

Listaremos algumas soluções desta última equação com simetria axial que podem ser escritas em termos de funções elementares. Por simplicidade escolheremos as nossas unidades de tal forma que a constante da gravitação de Newton,  $G$ , e a velocidade da luz,  $c$ , sejam

iguais a unidade,  $G = c = 1$ . Se necessário poderemos voltar as unidades normais onde  $G$  e  $c$  possuem seus valores usuais.

1. O potencial de uma partícula pontual de massa  $M$  localizada na origem do sistemas de coordenadas

$$\Phi = -\frac{M}{R} \quad (4)$$

onde  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

2. O potencial de uma linha infinita de densidade de massa linear  $\lambda$  localizada ao longo de eixo  $z$ ,

$$\Phi = 2\lambda \ln r \quad (5)$$

3. O potencial de uma linha semi-infinita de densidade de massa linear  $\lambda$  localizada no eixo  $z$  entre  $z = a$  e  $z = +\infty$

$$\Phi = \lambda \ln \mu_a, \quad \mu_a \equiv a - z + |\sqrt{(a - z)^2 + r^2}|. \quad (6)$$

4. O potencial de um segmento de linha de densidade de massa linear  $\lambda$  localizada no eixo  $z$  entre  $z = a$  e  $z = b$  ( $b > a$ );

$$\Phi = \lambda \ln(\mu_a/\mu_b). \quad (7)$$

Separando a equação de Laplace em coordenadas polares esféricas, a solução geral para potenciais com simetria axial pode ser escrita em termos de polinômios de Legendre como a soma de duas séries

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \frac{P_k(z/R)}{R^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k R^k P_k(z/R). \quad (8)$$

A primeira série representa o potencial no exterior de uma distribuição limitada de massas, e a segunda representa o potencial no interior de uma região sem massa cujo exterior é maciço.

Separando a equação de Laplace em coordenadas esféricas prolatas podemos escrever a solução geral

como

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(x) P_k(y) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k P_k(x) P_k(y). \quad (9)$$

onde

$$x = (R_+ + R_-)/(2m), \quad y = (R_+ - R_-)/(2m), \\ R_{\pm} = \sqrt{r^2 + (z \pm m)^2}. \quad (10)$$

sendo  $P_k(x)$  os polinômios de Legendre e  $Q_k(x)$  as funções de Legendre. A primeira destas funções é  $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ .

Soluções da equação de Poisson que representam discos finos podem ser construídas a partir de soluções da equação de Laplace usando uma variação do método das imagens. Como exemplo tomemos o potencial associado a uma partícula pontual, como na Eq. (4). Primeiro desloque a partícula para a posição  $z = -a$ . Então o plano  $z = 0$  divide o espaço tridimensional em duas partes: a inferior, que contém a massa pontual, e a superior, sem a massa. Façamos uma reflexão no plano  $z = 0$  da parte sem a massa. Este procedimento é equivalente a fazer a transformação  $z \rightarrow a + |z|$  em (4) e está descrito na Fig. 1. Este método poderia ser chamado de desloque, corte e reflita, e foi proposto por Kuzmin [39, 34].

O potencial do disco resultante é

$$\Phi = -\frac{M}{\sqrt{r^2 + (a + |z|)^2}}. \quad (11)$$

A densidade superficial associada pode ser calculada com a equação de Poisson, lembrado que  $\partial_{zz}|z| = 2\delta(z)$ , onde  $\delta(z)$  é a função delta de Dirac. Obtém-se

$$\sigma(r) = \frac{M a}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (12)$$

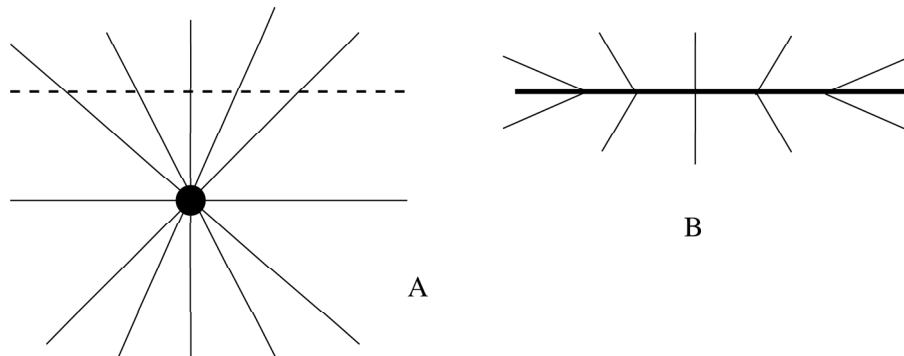


Figura 1 - O método desloque, corte e reflita. Primeiro desloque a massa, depois corte o espaço em duas partes e finalmente reflita a parte sem massa em um plano perpendicular à direção de deslocamento. O resultado é o potencial de um disco fino infinito.

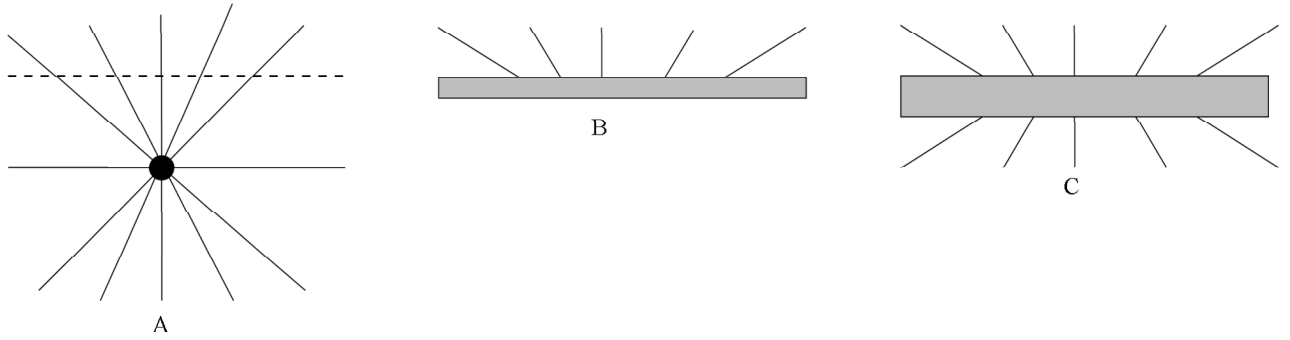


Figura 2 - A primeira parte do método é igual à anterior. Após cortar colocamos uma camada de matéria e depois fazemos a reflexão.

O gráfico de  $\sigma/M$  está representado na Fig. 3. O disco possui uma concentração de massa central que decai rapidamente com a distância. A massa total é  $M$ , e quanto menor  $a$  maior é o máximo da densidade. Este disco pode ser considerado como uma aproximação de ordem zero de uma galáxia.

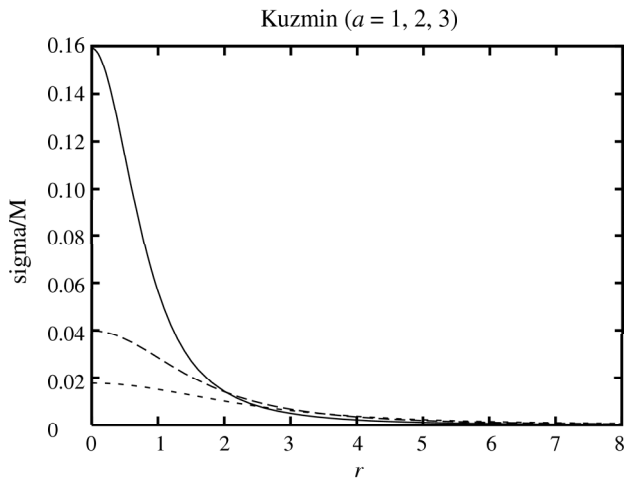


Figura 3 - O disco de Kuzmin tem uma concentração de massa central que decai rapidamente com a distancia

O método desloque, corte e reflita pode ser generalizado para produzir discos grossos, como no exemplo citado, no qual colocamos, depois do corte, uma camada de matéria e fazemos a reflexão. Isto é equivalente a fazer a transformação  $z \rightarrow a + h(z)$  em (4), onde  $h(z)$  é uma função que representa uma suavização de função  $|z|$ . O método está representado na Fig. 2. Um exemplo de função  $h(z)$  é

$$h(z) = \begin{cases} -z + C, & z \leq a, \\ Az^2 + Bz^{2n+2}, & -a \leq z \leq a, \\ z + C, & z \geq a, \end{cases} \quad (13)$$

com

$$\begin{aligned} A &= \frac{2n+1-ac}{4na} \\ B &= \frac{ac-1}{4n(n+1)a^{2n+1}} \\ C &= -\frac{a(2n+1+ac)}{4(n+1)}, \end{aligned}$$

onde  $n = 1, 2, \dots$  e  $c$  representam a descontinuidade da segunda derivada em  $z = \pm a$ .

Fazendo a transformação citada acima com a função  $h$  já definida com  $\tilde{M} = 1$ ,  $\tilde{b} = 2$  (onde  $\tilde{M}$  é  $M/a$ , etc.),  $n = 1$  e (a)  $\tilde{c} = 0$ , (b)  $\tilde{c} = 0,5$ , encontramos um disco grosso com a densidade mostrada na Fig. 4.

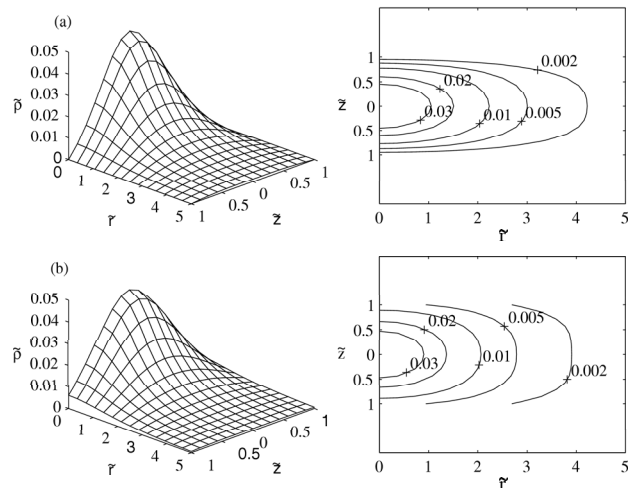


Figura 4 - Discos newtonianos grossos com parâmetros  $\tilde{M} = 1$ ,  $\tilde{b} = 2$ ,  $n = 1$  e (a)  $\tilde{c} = 0$ , (b)  $\tilde{c} = 0,5$ . As correspondentes curvas de nível dos perfis de densidade são mostradas ao lado direito.

Outros modelos de discos newtonianos podem ser encontrados resolvendo a equação de Laplace em coordenadas esferoidais oblatas. O modelo mais simples é

o disco com potencial

$$\Phi = -\frac{M}{2a} \times \operatorname{atan} \frac{\sqrt{2a}}{\left\{[(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4z^2a^2]^{\frac{1}{2}} + r^2 + z^2a^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

A densidade superficial deste disco é dada por

$$\sigma = M / \left(4\pi a \sqrt{a^2 - r^2}\right) \quad (15)$$

Este disco pode ser usado para gerar toda uma família de novos discos [41].

Outras soluções da equação de Laplace podem ser obtidas usando o princípio da superposição. Devido à linearidade da equação de Laplace uma soma de soluções desta equação também é solução. A superposição dos potenciais associados a um disco e uma massa pontual,

$$\Phi = -\frac{M}{R} - \frac{m}{\sqrt{r^2 + (a + |z|)^2}}, \quad (16)$$

pode ser usada para representar a gravidade de um núcleo de massa  $M$  localizado no meio de um disco fino de massa total  $m$ . Em outras palavras, um modelo simples de galáxia com um buraco negro central.

Outro ponto importante é a estabilidade de órbitas circulares de partículas girando ao redor do eixo de simetria do potencial. Estas partículas podem ser externas à estrutura ou parte da estrutura estudada. No exemplo anterior, como uma boa aproximação, o disco pode ser considerado como sendo formado por partículas girando em órbitas circulares. Neste caso a estabilidade das órbitas está associada à estabilidade do disco. Há um critério simples de estabilidade de órbitas circulares perante perturbações radiais devido a Rayleigh [35].

Consideremos uma partícula orbitando em uma órbita circular a uma distância  $r$  do seu centro de atração. Neste caso, no referencial da partícula, a força centrífuga  $F_c(r) = mv^2/r = L(r)^2/(mr^3)$  (onde  $L$  é o momento angular da partícula) equilibra a força gravitacional  $F_g$ , de forma que  $F_c(r) = F_g(r)$ . Agora consideremos a mesma situação de equilíbrio em uma órbita de raio  $r' > r$ ,  $F_c(r') = F_g(r)$ . Consideremos um deslocamento virtual da partícula da posição  $r$  para a posição  $r'$  com o mesmo momento angular que em  $r$ . Temos, neste caso, que  $\hat{F}(r')_c = L(r)^2/(mr'r^3)$ . Para se ter equilíbrio (para que a partícula tenda à posição inicial  $r$ ) esta força deve ser menor do que a força gravitacional correspondente  $F_g(r') = F_c(r')$ , ou seja,  $\hat{F}(r')_c < F(r')_c$ . Conseqüentemente,  $L(r')^2 > L(r)^2$ , e, para  $r$  e  $r'$  muito próximos, temos que  $d[L(r)^2]/dr > 0$ . Nas aplicações usualmente se utiliza o momento angular específico,  $h = L/m = rv$  de modo que a desigualdade se reduz a

$$d[h(r)^2]/dr > 0. \quad (17)$$

Em resumo, órbitas circulares que satisfazem à Eq. (17) (critério de Rayleigh) são estáveis perante perturbações radiais. No caso do potencial central newtoniano, a segunda equação de Newton nos fornece  $v^2/r = M/r^2$ , ou seja,  $h^2 = Mr$  e  $d[h(r)^2]/dr = M > 0$ . Logo, todas as órbitas circulares são estáveis perante perturbações radiais.

### 3. Gravidade einsteiniana

Na Relatividade Geral de Einstein a equação equivalente à equação de Laplace é a equação de Einstein para o vácuo,

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (18)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci definido por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\beta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\tau, \quad (19)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  é o símbolo de Christoffel, dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \quad (20)$$

sendo  $g_{\mu\nu}$  a métrica do espaço-tempo, índices repetidos indicando soma de 0 a 3 e  $g^{\mu\nu}$  os elementos da matriz inversa à matriz de  $g_{\mu\nu}$ .

A equação equivalente à equação de Poisson é a equação de Einstein dita com matéria,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu} \quad (21)$$

sendo  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  o escalar de Ricci e  $T_{\mu\nu}$  o tensor de energia-momento associado à matéria.

Na relatividade geral o movimento das partículas,  $x^\mu = x^\mu(s)$ , é determinada pela equação da geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (22)$$

No caso de simetria esférica, a solução das equações de Einstein que correspondem ao potencial newtoniano (4) é a solução de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{2m}{R}} - R^2 (\sin^2 \vartheta d\vartheta^2 + d\varphi^2) \quad (23)$$

que representa um buraco negro. Esta métrica pode tomar diferentes formas dependendo do sistema de coordenadas utilizado.

O campo gravitacional de corpos com simetria é representado por uma métrica com a mesma simetria. No caso de simetria axial estática a métrica do espaço-tempo se reduz a

$$ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - e^{-2\nu} [e^{2\nu} (dr^2 + dz^2) + \Xi^2 d\varphi^2], \quad (24)$$

onde  $\psi$ ,  $\nu$  e  $\Xi$  são funções somente das coordenadas "cilíndricas",  $r$  e  $z$ . Estas três funções descrevem o campo gravitacional de um corpo com simetria axial

estático. No caso do vácuo a função  $\Xi$  pode ser escolhida sem perda de generalidade, como  $\Xi = r$ , e a Eq. (18), neste caso, fornece

$$\nabla^2 \psi \equiv \psi_{,rr} + \psi_{,r}/r + \psi_{,zz} = 0, \quad (25)$$

$$d\nu[\psi] = r[(\psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2)dr + 2\psi_{,r}\psi_{,z}dz]. \quad (26)$$

A primeira destas equações é a nossa conhecida equação de Laplace, que é linear e obedece ao princípio da superposição. A segunda, que determina o potencial  $\nu$ , é não linear. Se  $\psi$  satisfaz à equação de Laplace, a integrabilidade da diferencial  $\nu$  é garantida. As soluções das Eqs. (25) e (26) são conhecidas na literatura como soluções de Weyl.

O limite newtoniano das soluções de Weyl pode ser definido como

$$\Phi = \lim_{\lambda=0} \psi(\lambda, r, z)/\lambda, \quad (27)$$

onde  $\lambda \equiv c^{-2}$ , e  $c$ , a velocidade da luz [42].  $\psi(\lambda, r, z)$  é a função  $\Phi$  no sistema usual de coordenadas, onde a velocidade da luz aparece de forma explícita.

A solução de Schwarzschild (23) nas coordenadas de Weyl pode ser associada ao potencial de uma barra. Consideremos uma barra centrada na origem de comprimento  $L$  e massa total  $m$ . Temos [36]

$$\psi = -\frac{m}{L} \log \left| \frac{R_1 + R_2 - L}{R_1 + R_2 + L} \right|, \quad (28)$$

$$\nu = 2 \left( \frac{m}{L} \right)^2 \log \left| \frac{(R_1 + R_2)^2 - L^2}{4 R_1 R_2} \right|, \quad (29)$$

$$R_1 = \sqrt{r^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}, \quad (30)$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}. \quad (31)$$

Esta solução pode ser interpretada como um buraco negro distorcido [44, 45], e é conhecida na literatura como solução  $\gamma$ -Weyl ou solução de Zipoy-Voorhees [43, 46]. Quando  $m = L$  esta solução se reduz exatamente à solução de Schwarzschild [47]. Esta solução está associada ao termo monopolar da expansão do potencial em coordenadas esferoidais, para diferentes expansões que têm como limite a solução de Schwarzschild (veja [48]).

A transformação de coordenadas que leva esta métrica para a forma canônica é:

$$r = [R(R - 2m)]^{\frac{1}{2}} \sin \vartheta, \quad z = (R - m) \cos \vartheta, \quad (32)$$

Agora, contrário da nossa primeira intuição, a solução de Weyl associada ao potencial (4) não possui simetria esférica. Esta solução é conhecida na literatura como solução de Chazy-Curzon [49, 50]. As funções  $\psi$

e  $\nu$  para esta solução são:

$$\psi = -\frac{m}{R}, \quad (33)$$

$$\nu = -\frac{m^2 r^2}{2R^4}, \quad (34)$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}. \quad (35)$$

Note que somente  $\psi$  possui simetria esférica. Os invariantes de curvatura associados a esta solução apresentam um comportamento um tanto curioso, possuindo uma singularidade direcional.

A métrica de Schwarzschild também pode ser escrita de forma simples em coordenadas esféricas isotrópicas  $(\hat{R}, \varphi, \vartheta)$ , como:

$$ds^2 = \frac{(1-f)^2}{(1+f)^2} dt^2 - (1+f)^4 \times (d\hat{R}^2 + \hat{R}^2 d\vartheta^2 + \hat{R}^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (36)$$

com

$$f = m/(2\hat{R}). \quad (37)$$

A transformação de coordenadas que leva a solução de Schwarzschild em coordenadas canônicas para coordenadas isotrópicas é:

$$R = \hat{R}(1 + m/2\hat{R})^2 \quad (38)$$

A métrica de Weyl associada ao potencial (5) é conhecida na literatura como a métrica de Levi-Civita [51].

O critério de Rayleigh pode ser estendido para a relatividade geral de forma direta (veja Ref. [52] e literatura ali citada). Em particular, se encontra para partículas orbitando ao redor de um buraco negro que a última órbita estável possui raio  $R = 6m$ .

#### 4. Soluções que representam discos finos e halos

Soluções das equações de Einstein que representam a métrica associada a um disco fino têm sido muito estudadas. Existem três métodos para se encontrar as soluções. O primeiro consiste em fazer uso das coordenadas de Weyl, nas quais pode-se encontrar a métrica do espaço-tempo associada a um potencial newtoniano. Então pode-se associar a um modelo de disco newtoniano um espaço-tempo via equações de Weyl. É preciso ter cuidado na análise da solução, lembrando que essas coordenadas nos guardam a surpresa de que uma barra com uma densidade particular é, na realidade, a solução de Schwarzschild. O segundo método consiste em uma adaptação de método “desloque, corte e reflita”, discutido na seção anterior. O terceiro é o método direto, que consiste em dar o tensor de energiamomento do disco e resolver diretamente as equações de Einstein.

Como um exemplo de aplicação do primeiro método temos a solução de Morgan e Morgan, que corresponde

à solução de Weyl do disco com potencial dado pela Eq. (14), que também pode ser representado como uma barra complexificada de comprimento  $L/2 = i a$  [41]. Encontra-se, para as funções da métrica de Weyl,

$$\Phi = -\frac{m}{2 i a} \log \left| \frac{\operatorname{Re}[R] - i a}{\operatorname{Re}[R] + i a} \right|, \quad (39)$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \left( \frac{m}{a} \right)^2 \log \left| \frac{(\operatorname{Re}[R])^2 + a^2}{|R|^2} \right|, \quad (40)$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z - i a)^2}. \quad (41)$$

O método “desloque, corte e reflita” tem sido aplicado a uma grande variedade de métricas. Em particular Lynden-Bell, Bicak e Katz aplicaram o método nas métricas  $\gamma$  de Weyl e Chazy-Curzon. Os discos que têm como base soluções de Weyl apresentam o problema de não ter pressão radial, e portanto são instáveis. Para estabilizar esses discos habitualmente se faz a hipótese de contra-rotação que consiste em supor que se tem um número igual de partículas girando tanto em um sentido como no sentido oposto. Desta forma se obtém uma configuração estável. É curioso que na natureza existem galáxias onde se observa uma situação como a descrita acima [53].

O resultado mais significativo de aplicação deste método é o apresentado em [22], onde se obtém um disco de matéria que é um fluido perfeito e que, além disso, é estável.

A métrica do espaço tempo que representa o disco é dada pela métrica (36), escrita em coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = \frac{(1-f)^2}{(1+f)^2} dt^2 - (1+f)^4 (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2) \quad (42)$$

com

$$f = \frac{m}{2\sqrt{r^2 + (a + |z|)^2}}. \quad (43)$$

Usando as equações de Einstein (21) pode-se calcular o tensor de energia-momento e, resolvendo o problema de autovalores, se obtém a densidade superficial do disco  $\sigma$  e sua pressão isotrópica  $P$ ,

$$\sigma = \frac{4ma}{\pi(m + 2\sqrt{r^2 + a^2})^3}, \quad (44)$$

$$P = -\frac{2m^2 a}{\pi(m + 2\sqrt{r^2 + a^2})^3(m - 2\sqrt{r^2 + a^2})}. \quad (45)$$

A massa total do disco pode ser calculada com a ajuda da Eq. (44), encontrando-se:

$$\mathcal{M} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma \sqrt{g_{rr}g_{\varphi\varphi}} dr d\varphi = \frac{m}{4a}(m + 4a). \quad (46)$$

A Eq. (44) mostra que a densidade de energia é sempre positiva (condição de energia fraca). A pressão é positiva se  $m < 2\sqrt{r^2 + a^2}$ . A condição de energia forte ( $\sigma + 2P > 0$ ) também é satisfeita. Estas propriedades caracterizam um fluido composto de matéria usual com gravitação atrativa. Esta não é uma propriedade trivial, já que é conhecido que o método “desloque, corte e reflita” algumas vezes fornece discos compostos de matéria exótica, cordas cósmicas [54] ou paredes cósmicas [55].

Outro parâmetro útil é a velocidade de propagação do som  $V$ , definida por  $V^2 = \frac{dP}{d\sigma}$ , que pode ser calculada usando a Eq. (44) e a Eq. (45), encontrando-se:

$$V^2 = \frac{m(4\sqrt{r^2 + a^2} - m)}{3(m - 2\sqrt{r^2 + a^2})^2}. \quad (47)$$

A condição  $V^2 < 1$  (matéria não taquiônica) nos fornece a desigualdade  $m < \sqrt{R^2 + a^2}$  ou  $m > 3\sqrt{R^2 + a^2}$ . A condição para a pressão é que a velocidade do som seja menor do que a velocidade da luz são simultaneamente satisfeitas quando  $m < \sqrt{R^2 + a^2}$ . Esta desigualdade é válida em todo o disco se  $m < a$ .

Na Fig. 5 (a)–(c) mostramos  $\sigma$ ,  $P$  e  $V$  para os valores dos parâmetros  $a = 1, 0$  e  $m = 0, 2, 0, 4, 0, 6$ , e  $0, 8$  em função da variável adimensional  $\tilde{r} = r/a$ . Este disco possui uma concentração de massa central que decai rapidamente. Se o disco é infinito pode-se definir um raio efetivo onde a maior parte da massa está concentrada, e considerar o disco como finito.

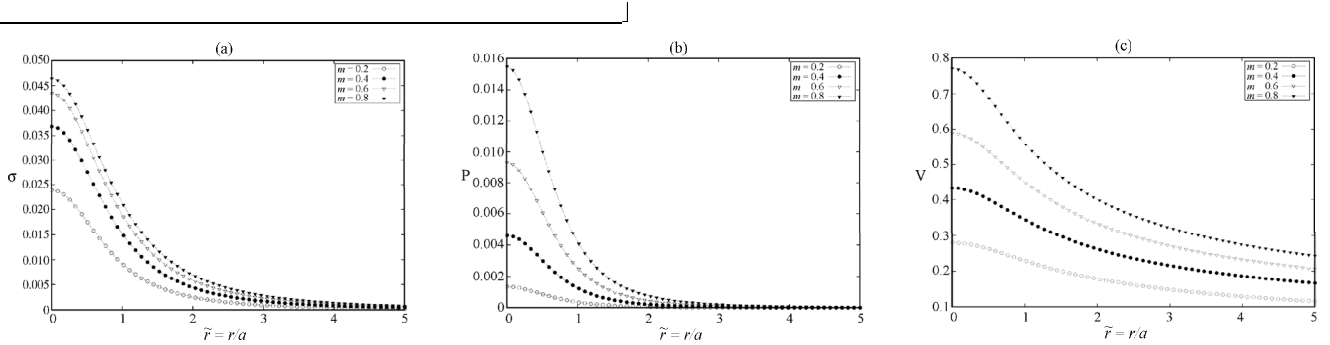


Figura 5 - (a) Densidade superficial  $\sigma$ , (b) pressão  $P$  e (c) velocidade do som  $V$  com  $a = 1, 0$  e  $m = 0, 2, 0, 4, 0, 6$ , e  $0, 8$  como funções de  $\tilde{r} = r/a$ .

O método “desloque, corte e reflita” também pode ser utilizado para obter soluções das equações de Einstein associadas a discos com halos. O procedimento é análogo ao apresentado na Fig. 1, e está mostrado na Fig. 6. Agora o ponto de partida é uma solução que represente tanto o interior como o exterior de um corpo esférico. Como exemplo podemos tomar a solução de Buchdahl [56], que representa o espaço-tempo associado a uma esfera de fluido politropo tipo Lane-Emden com índice  $n = 5$ .

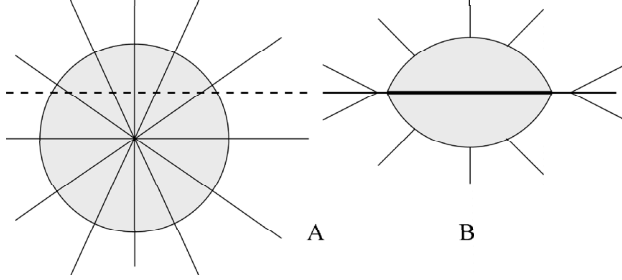


Figura 6 - Ilustração do método “desloque, corte e reflita” para a geração discos com halos. Em A a esfera de fluido perfeito é deslocada e cortada por um plano (linha pontilhada). Em B a parte de baixo é desconsiderada e a parte de cima é refletida no plano.

As funções  $\nu$  e  $\lambda$  da métrica

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2) \quad (48)$$

são

$$e^\nu = \left( \frac{1 - \frac{A}{\sqrt{1+kR^2}}}{1 + \frac{A}{\sqrt{1+kR^2}}} \right)^2, \quad e^\lambda = \left( 1 + \frac{A}{\sqrt{1+kR^2}} \right)^4, \quad (49)$$

com  $A$  e  $k$  constantes.

A densidade, a pressão e a velocidade do som desta solução são dadas por [22],

$$\rho = \frac{3Ak}{2\pi(A + \sqrt{1+kR^2})^5}, \quad (50)$$

$$p = \frac{kA^2}{2\pi(-A + \sqrt{1+kR^2})(A + \sqrt{1+kR^2})^5}, \quad (51)$$

$$V^2 = \frac{2A(-2A + 3\sqrt{1+kR^2})}{15(A - \sqrt{1+kR^2})^2}. \quad (52)$$

A condição  $V < 1$  é satisfeita se  $A < \frac{(18-\sqrt{39})}{19}\sqrt{1+kR^2}$ .

Aplicando ao método a solução de Buchdahl encontramos as seguintes expressões para a densidade de energia, a pressão e a velocidade do som sobre o disco:

$$\sigma = \frac{akA}{\pi \left[ A + \sqrt{1+k(r^2+a^2)} \right]^3}, \quad (53)$$

$$P = \frac{akA^2}{2\pi \left[ -A + \sqrt{1+k(r^2+a^2)} \right] \left[ A + \sqrt{1+k(r^2+a^2)} \right]^3}, \quad (54)$$

$$V^2 = \frac{A \left[ -A + 2\sqrt{1+k(r^2+a^2)} \right]}{3 \left[ A - \sqrt{1+k(r^2+a^2)} \right]^2}. \quad (55)$$

As condições  $V < 1$  e  $P > 0$  são ambas satisfeitas se  $A < \frac{1}{2}\sqrt{1+ka^2}$ . A Fig. 7 (a)–(c) mostra, respecti-

vamente,  $\sigma$ ,  $P$  e  $V$  como funções de  $\tilde{r} = r/m$  para um disco calculado a partir da solução de Buchdahl.



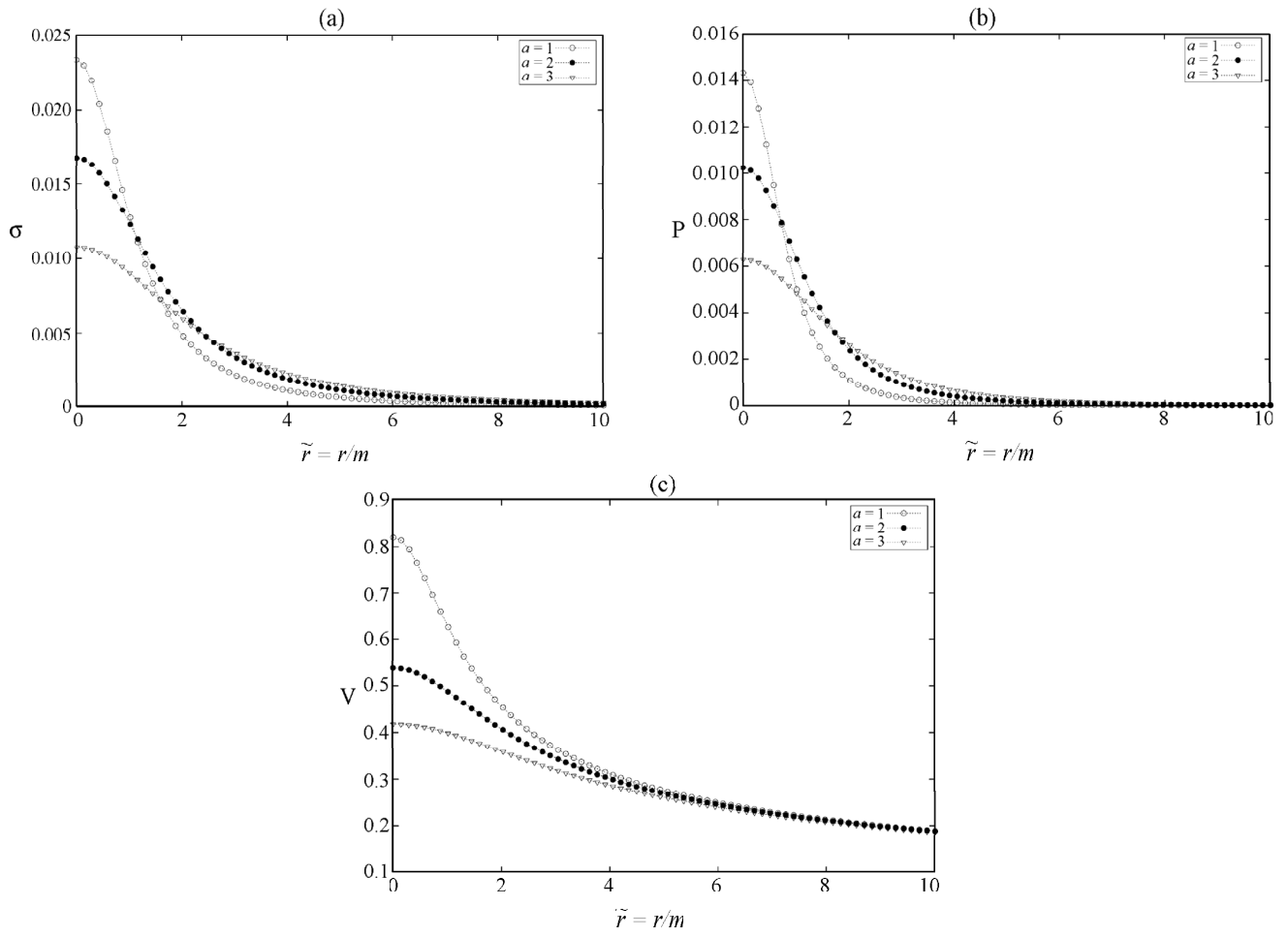


Figura 7 - (a) A densidade superficial de energia  $\sigma$ , Eq. (53), (b) a pressão  $P$  Eq. (54) e (c) a velocidade do som  $V$  Eq. (55), para um disco com  $A = 0,6$ ;  $k = 1$ ; for  $a = 1, 2$  and  $3$  como função de  $\tilde{r} = R/r$ .

Na Fig. 8 (a)–(b) mostramos, respectivamente, a densidade  $\rho$  conjuntamente com a pressão  $p$ , e a velocidade  $V$  do halo ao longo do eixo  $z$  para  $A = 0,6$ ;  $k = 1$  e  $a = 1$ . Note que nesta solução não temos fronteira na

esfera de fluido, pois o disco está completamente imerso no fluido. Note que as quantidades físicas, tanto do halo como do disco, neste modelo, são bem comportadas.

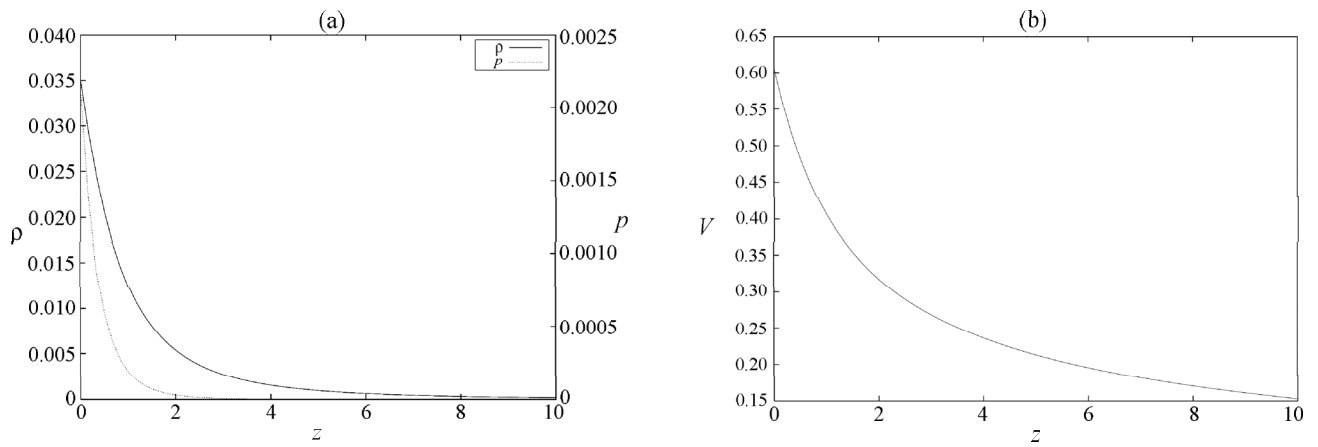


Figura 8 - (a) A densidade  $\rho$  e a pressão  $p$  (Eq. (51)); (b) a velocidade do som  $V$  (Eq. (52)), para o halo com  $A = 0,6$   $k = 1$  e  $a = 1$  ao longo do eixo  $z$ .

O método também pode ser aplicado a uma esfera composta de várias camadas de matéria com diferentes equações de estado. Neste caso podemos gerar uma solução que represente um disco com um halo feito de multi-camadas de matéria [22]. Na modelagem de estrelas, os modelos de multi-camadas são apropriados para representar de forma realista as diferentes partes da estrela.

## 5. Soluções que representam discos grossos

Como no caso newtoniano o método “desloque, corte e reflita” também pode ser usado no contexto da relatividade geral para produzir discos grossos. Os melhores discos se obtêm a partir da métrica com simetria esférica escrita em coordenadas cilíndricas, conforme a Eq. (48). Em particular, na solução de Schwarzschild (42)-(37) fazemos  $R^2 = r^2 + (h + b)^2$  com  $b > 0$  e  $h(z)$  dado pela Eq. (13). A continuidade das funções métricas e suas derivadas no plano  $z = \pm a$  é satisfeita pela continuidade de  $h(z)$  e de  $h'(z)$  nos planos  $z = \pm a$ . Para  $|z| > a$ , as Eqs. (42)-(37) satisfazem às equações de Einstein no vácuo. Para  $|z| < a$ , as compo-

nentes do tensor de energia-momento no disco são calculadas usando as equações de Einstein (21). Definindo a tetrada ortonormal  $\{V^a, W^a, Y^a, Z^a\}$ , com

$$V^a = e^{-\nu/2}(1, 0, 0, 0), \quad (56a)$$

$$W^a = e^{-\mu/2}(0, 1, 0, 0), \quad (56b)$$

$$Y^a = e^{-\mu/2}(0, 0, 1, 0), \quad (56c)$$

$$Z^a = \frac{e^{-\mu/2}}{r}(0, 0, 0, 1), \quad (56d)$$

encontramos que

$$T_{ab} = \sigma V_a V_b + p_r W_a W_b + p_z Y_a Y_b + p_\varphi Z_a Z_b, \quad (57)$$

onde  $\sigma = T^t_t$  é a densidade de energia,  $p_r = -T^r_r$  é a tensão radial,  $p_\varphi = -T^\varphi_\varphi$  é a tensão azimutal e  $p_z = -T^z_z$  é a tensão vertical, que é igual à tensão radial. A densidade de “massa” gravitacional efetiva é  $\rho = \sigma + p_r + p_z + p_\varphi$ . A condição de energia forte é equivalente à  $\rho \geq 0$ , a condição de energia fraca é  $\sigma \geq 0$  e a condição de energia dominante requer  $|p_r/\sigma| \leq 1$ ,  $|p_z/\sigma| \leq 1$  e  $|p_\varphi/\sigma| \leq 1$ . Usando as Eqs. (42)-(37) encontramos

$$\tilde{\sigma} = \frac{8\tilde{m}}{\pi(\tilde{m} + 2\tilde{R})^5} \left[ 3(\tilde{h} + \tilde{b})^2(1 - \tilde{h}'^2) + \tilde{R}^2[\tilde{h}'^2 - 1 + \tilde{h}''(\tilde{h} + \tilde{b})] \right], \quad (58a)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{16\tilde{m}\tilde{R}}{\pi(\tilde{m} + 2\tilde{R})^5(-\tilde{m} + 2\tilde{R})} \left[ 3(\tilde{h} + \tilde{b})^2(1 - \tilde{h}'^2) + \tilde{R}^2[\tilde{h}'^2 - 1 + \tilde{h}''(\tilde{h} + \tilde{b})] \right], \quad (58b)$$

$$\tilde{p}_r = \tilde{p}_\varphi = \frac{4\tilde{m}^2}{\pi(\tilde{m} + 2\tilde{R})^5(-\tilde{m} + 2\tilde{R})} \left[ 2(\tilde{h} + \tilde{b})^2(1 - \tilde{h}'^2) + \tilde{R}^2[\tilde{h}'^2 - 1 + \tilde{h}''(\tilde{h} + \tilde{b})] \right], \quad (58c)$$

$$\tilde{p}_z = \frac{8\tilde{m}^2(1 - \tilde{h}'^2)(\tilde{h} + \tilde{b})^2}{\pi(\tilde{m} + 2\tilde{R})^5(-\tilde{m} + 2\tilde{R})}, \quad (58d)$$

Denotamos  $\tilde{\sigma} = a^2\sigma$ ,  $\tilde{\rho} = a^2\rho$ ,  $\tilde{p}_r = a^2p_r$ ,  $\tilde{p}_z = a^2p_z$ . As outras variáveis adimensionais são definidas como no caso newtoniano. As condições sobre os parâmetros  $\tilde{b} \geq 2n/(2n + 1 - \tilde{c})$ ,  $0 \leq \tilde{c} \leq 2n + 1$  e  $0 < \tilde{m} < 2\tilde{b}$  asseguram o bom comportamento das quantidades físicas do disco.

Nas Figs. 9 e 10 mostramos as superfícies e as curvas de nível para a densidade, a densidade newtoniana efetiva, as pressões radial, azimutal e vertical para um disco com parâmetros  $\tilde{m} = 1$ ,  $\tilde{b} = 2$ ,  $n = 1$  e  $\tilde{c} = 0$ . O quociente entre a pressão e a densidade é sempre menor do que 0,15, portanto todas as condições de energia são satisfeitas. A forma das curvas de nível também mostra que para os parâmetros listados o disco possui propriedades físicas aceitáveis.

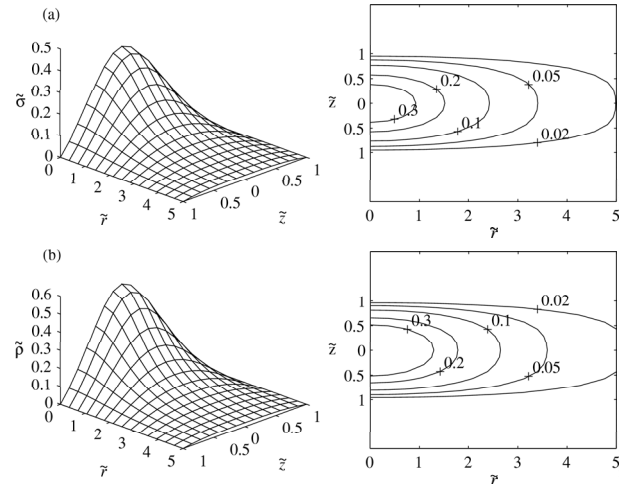


Figura 9 - (a) Densidade de energia, (b) Densidade newtoniana efetiva para um disco grosso com parâmetros  $\tilde{m} = 1$ ,  $\tilde{b} = 2$ ,  $n = 1$  e  $\tilde{c} = 0$ .

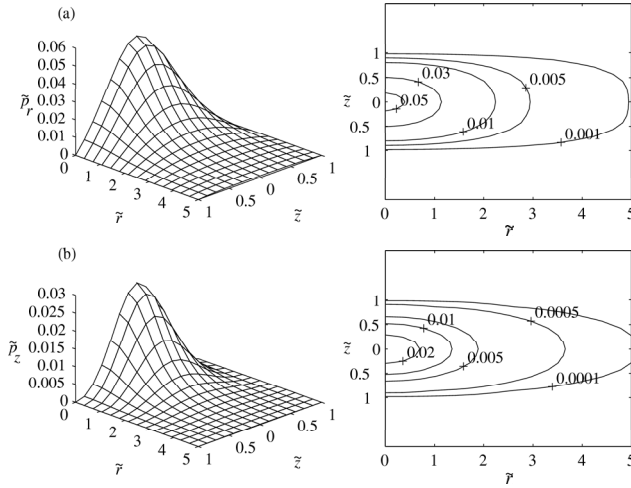


Figura 10 - (a) Pressão radial e azimuthal, (b) Pressão vertical para um disco grosso com parâmetros  $\tilde{m} = 1$ ,  $\tilde{b} = 2$ ,  $n = 1$  e  $\tilde{c} = 0$ .

## 6. Estabilidade das estruturas

Existem duas formas de estudar estruturas auto-gravitantes com simetria axial. A primeira e mais simples considera que as estruturas são compostas de partículas movendo-se em círculos com centro no eixo de simetria. O estudo da estabilidade da estrutura neste caso se reduz ao estudo da estabilidade das órbitas circulares das partículas que as formam. Em particular, a estabilidade perante perturbações radiais pode ser determinada usando a extensão relativística do critério de Rayleigh. A segunda forma de estudar a estabilidade de estruturas considera perturbações do tensor de energia momento associado à matéria que forma a estrutura autogravitante, sendo o análogo à estabilidade hidrodinâmica clássica. Considera-se que as perturbações não alteram a métrica [38]. Estas suposições são uma boa primeira aproximação ao tratamento da estabilidade. Consideremos uma partícula movendo-se em uma métrica de fundo com simetria axial em coordenadas esféricas,  $(t, R, \vartheta, \varphi)$ ,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{RR}dR^2 + g_{\vartheta\vartheta}d\vartheta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2, \quad (59)$$

as funções  $g_{\mu\nu}$  dependem somente das variáveis  $R, \vartheta$ .

A equação geodésica para o movimento circular no plano  $\vartheta = \pi/2$ , nos fornece a equação de movimento,

$$g_{tt}R\dot{t}^2 + g_{\varphi\varphi,R}\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (60)$$

e as constantes de movimento,

$$1 = g_{tt}\dot{t}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2, \quad (61)$$

$$E = g_{tt}\dot{t}, \quad (62)$$

$$h = g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}, \quad (63)$$

onde o ponto denota derivada com respeito ao tempo próprio  $s$ , e  $g_{tt,R} = \partial_R g_{tt}$ , etc. A constante  $E$  representa a energia específica da partícula e  $h$  o seu momento angular específico.

Note que a equação de movimento (60) pode ser colocada como uma equação de balanço válida no plano  $\vartheta = \pi/2$ ,

$$g_{tt,R}E^2/g_{tt}^2 = -g_{\varphi\varphi,R}h^2/g_{\varphi\varphi}^2. \quad (64)$$

Então, como no caso newtoniano, temos um balanço entre a “força gravitacional” e a força centrífuga. Supondo que a métrica representa o campo gravitacional do corpo, temos estabilidade das órbitas circulares no plano  $\vartheta = \pi/2$ , quando

$$hh_{,R} > 0. \quad (65)$$

De (60)- (63) encontramos [52],

$$h^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi}^2 g_{tt,R}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi,R} - g_{tt,R}g_{\varphi\varphi}}, \quad (66)$$

$$E^2 = \frac{g_{tt}^2 g_{\varphi\varphi,R}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi,R} - g_{tt,R}g_{\varphi\varphi}}. \quad (67)$$

Para o disco construído com a solução de Buchdal encontramos [22],

$$h = \frac{2\sqrt{mr^2} \left(1 + \frac{m}{2\sqrt{r^2+a^2}}\right)^2 (r^2 + a^2)^{1/4}}{\sqrt{4(r^2 + a^2)^2 - 8mr^2\sqrt{r^2 + a^2} + m^2(r^2 - a^2)}}. \quad (68)$$

O critério de estabilidade de Rayleigh é sempre satisfeito quando  $a/m \gtrsim 1,016$ .

Na gravitação newtoniana um corpo achatado com simetria de reflexão como um disco pode ser aproximado por uma expansão multipolar. Em particular pode-se tomar os dois primeiros termos não nulos, que são os termos monopolar e o quadrupolar. Na relatividade geral podemos fazer o mesmo. Na solução de Weyl, podemos considerar o termo monopolar como sendo representado por  $\psi$ , dada pela Eq. (31) com  $m = L$ , e o termo quadrupolar o plano de simetria dado por

$$\hat{\psi}(r, 0) = -Q_i/R^3, \quad (69)$$

onde  $Q_i$  representa o momento quadrupolar de uma distribuição de matéria fora do corpo. Para um estudo de momentos multipolares relativistas neste contexto veja [48]. Temos dois casos,  $Q_i > 0$  e  $Q_i < 0$ . O primeiro representa deformações oblatas, como discos ou anéis, e o segundo deformações prolatas, como jatos.

A Fig. 11 mostra as curvas  $hh_{,R} = 0$  para a superposição de um buraco negro e um momento multipolar interno com  $\psi$  dado por (69). O primeiro gráfico mostra o caso oblato, e o segundo, o caso de deformações prolatas.

No primeiro caso temos órbitas circulares estáveis na região limitada pela curva superior e o eixo  $R$  e na

região limitada pela curva inferior e a curva horizontal que representa o horizonte do buraco negro. No segundo gráfico temos órbitas estáveis na região limitada pelo eixo  $R$  e as curvas. A região mais relevante é na qual  $R > 6m$ . Vemos que a região de estabilidade aumenta o momento quadripolar interno.

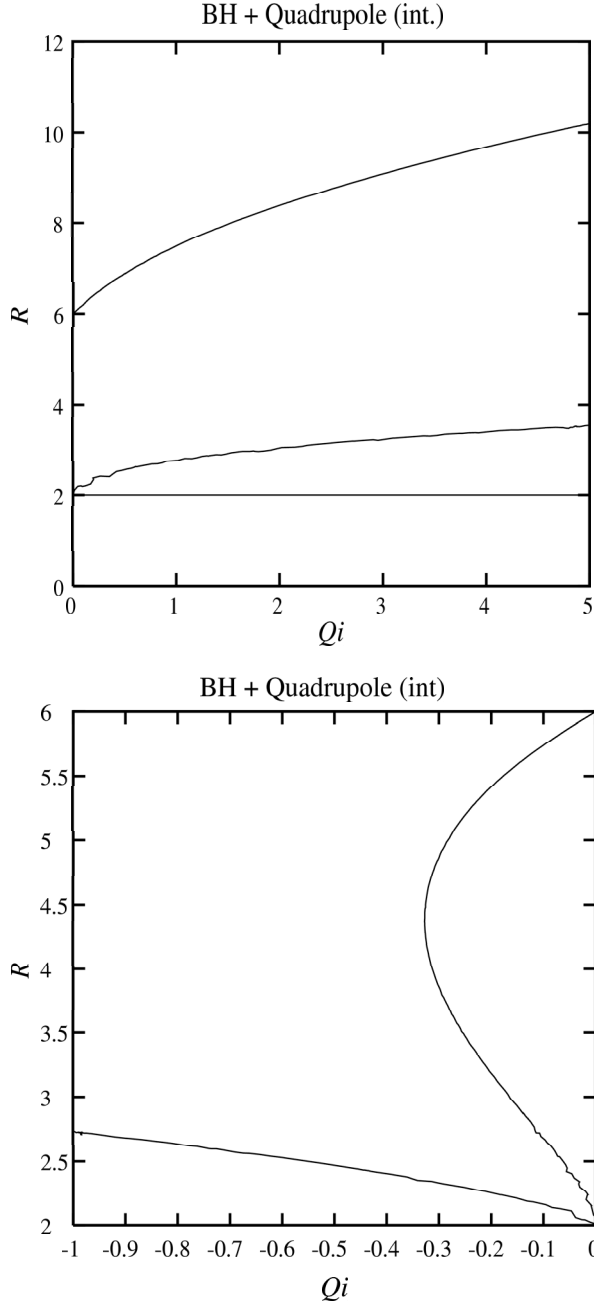


Figura 11 - Curvas  $hh_{,R} = 0$  para a superposição de um buraco negro e um momento multipolar interno. O primeiro gráfico mostra o caso oblato, e o segundo o caso de deformações prolatas. No primeiro caso temos órbitas circulares estáveis na região limitada pela curva superior e o eixo  $r$  e na região limitada pela curva inferior e a curva horizontal que representa o horizonte do buraco negro. No segundo gráfico temos órbitas estáveis na região limitada pelo eixo  $R$  e as curvas.

No caso prolato, último gráfico da Fig. 11, vemos que o momento quadripolar aumenta a zona de estabi-

lidade, sem momento quadripolar temos estabilidade somente quando  $R > 6m$ , fato surpreendente que é válido somente para o tipo de órbitas estudadas, orbitas circulares no plano equatorial. Para órbitas genéricas as deformações internas prolatas introduzem uma grande instabilidade, e podemos ter órbitas muito irregulares ou caóticas tanto nos espaços-tempo estáticos como estacionários [57, 58].

No sistema newtoniano equivalente, para o caso oblato temos um região de instabilidade perto do centro de atração, sendo curva limite  $R = \sqrt{3Q_i/m}$ . Neste caso não temos instabilidade no caso prolato. Também, neste caso, para órbitas não equatoriais temos movimento caótico [57].

A análise da estabilidade “hidrodinâmica” toma como ponto de partida o estudo de perturbações de primeira ordem do tensor de energia-momento associado à matéria que forma o disco [38].

O tensor de energia-momento não perturbado é:

$$T^{\mu\nu} = (\sigma U^\mu U^\nu + p_r X^\mu X^\nu + p_\varphi Y^\mu Y^\nu) \delta(z), \quad (70)$$

sendo  $\sigma$ ,  $p_r$  e  $p_\varphi$  respectivamente a densidade superficial do disco, a pressão radial e a pressão azimutal. Os quadrivetores  $(U^\mu, X^\mu, Y^\mu)$  são as componentes da tetrada ortonormal

$$\begin{aligned} U^\mu &= e^{-\nu/2} (1, 0, 0, 0), \\ X^\mu &= e^{-\lambda/2} (0, 1, 0, 0), \\ Y^\mu &= \frac{e^{-\lambda/2}}{R} (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (71)$$

Devido à forma do tensor de energia-momento (Eq. (70)), todas as quantidades são funções somente da coordenada radial. Consideremos as perturbações  $A_P^\mu$  da quantidade  $A^\mu$  na forma

$$A_P^\mu(t, r, \varphi) = A^\mu(r) + \delta A^\mu(t, r, \varphi), \quad (72)$$

sendo  $A^\mu(r)$  a quantidade não perturbada e  $\delta A^\mu(t, r, \varphi)$  sua perturbação. Aplicando a Eq. (72) na Eq. (70) e assumindo que a perturbação não modifica a métrica de fundo, em outras palavras, que a perturbação,  $\delta T^{\mu\nu}$ , atua como um fluido de teste, as Eqs. de conservação para o disco fino podem ser escritas como

$$(\delta T^{\mu\nu})_{;\nu}|_{z=0} = 0, \quad (73)$$

onde  $;$  denota a derivada covariante com respeito a coordenada  $x^\nu$ . Supondo uma perturbação da forma

$$\delta A^\mu(t, r, \varphi) = \delta A^\mu(r) e^{i(k_\varphi \varphi - \omega t)}, \quad (74)$$

as leis de conservação perturbadas (Eq. (73)) podem ser escritas como [38]

$$\begin{aligned} \mu = t \quad & \delta U_{,r}^r (\sigma U^t + \xi_1 p_r X^r) + \delta U^r [F(t, r, \sigma U^t) \\ & + \xi_{1,r} p_r X^r + \xi_1 F(t, r, p_r X^r)] + \delta U^\varphi [ik_\varphi (\sigma U^t \\ & + \xi_2 p_\varphi Y^\varphi)] + \delta \sigma (-iw U^t U^t) = 0, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \mu = r \quad & \delta p_{r,r} (X^r X^r) + \delta U^r [-iw (\sigma U^t + \xi_1 p_r X^r)] \\ & + \delta \sigma (U^t U^t \Gamma_{tt}^r) + \delta p_r G(r, r, X^r X^r) \\ & + \delta p_\varphi (Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r) = 0, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\mu = \varphi \quad \delta U^\varphi [-w (\sigma U^t + \xi_2 p_\varphi Y^\varphi)] + \delta p_\varphi (k_\varphi Y^\varphi Y^\varphi) = 0, \quad (77)$$

onde  $\delta U^r$  e  $\delta U^\varphi$  são as componentes da tetrada perturbada,  $\xi_1 = -X_r/U_t$ ,  $\xi_2 = -Y_\varphi/U_t$  e

$$F(I, J, K) = K_{,J} + K(2\Gamma_{IJ}^I + \Gamma_{\alpha J}^\alpha), \quad (78)$$

$$G(I, J, K) = K_{,J} + K(\Gamma_{IJ}^I + \Gamma_{\alpha J}^\alpha), \quad (79)$$

sendo, como anteriormente,  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  os símbolos de Christoffel.

Queremos que as perturbações estejam de acordo com a equação de estado do fluido. Então, se  $p = p(r)$  e  $\sigma = \sigma(r)$ , temos que  $\delta p_r$  e  $\delta \sigma$  satisfazem

$$\delta p = \delta p_r = \delta p_\varphi = p_{,r} dr, \quad (80)$$

$$\delta \sigma = \sigma_{,r} dr, \quad (81)$$

então

$$\delta p = \left( \frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right) \delta \sigma. \quad (82)$$

Pela substituição de  $\delta U^r$  e  $\delta U^\varphi$  na Eq. (75), e usando as Eqs. (76), a Eq. (77) e a relação dada pela Eq. (82), encontramos uma equação diferencial de segunda ordem para a perturbação da densidade  $\delta \sigma$  da forma

$$A_S \delta \sigma_{,rr} + B_S \delta \sigma_{,r} + C_S \delta \sigma = 0, \quad (83)$$

sendo ( $A_S, B_S, C_S$ ) funções de  $(r, a, m, w, k_\varphi)$ . Para estudar a estabilidade do disco precisamos um critério de corte (“cut-off”) na coordenada radial para criar um disco finito. O raio de corte  $R_{cut}$  do disco é obtido pelo seguinte critério: a matéria do disco dentro do raio de corte deve ser mais de 90% da energia total do disco infinito [38].

A Eq. (83) de segunda ordem é resolvida com duas condições de fronteira, uma quando  $r \approx 0$  e a outra no raio de corte. Quando  $r \approx 0$  colocamos que a perturbação seja  $\approx 10\%$  do valor da energia não perturbada. Na fronteira do disco colocamos  $\delta \sigma|_{r=R_{cut}} = 0$ , já que queremos que as perturbações sejam nulas para  $r \rightarrow \infty$ .

Agora, consideremos o disco de Schwarzschild isotrópico com parâmetros ( $a = 0,5, m = 0,4$ ). Com esses parâmetros o raio do disco é  $r = 4$  (aproximadamente 90% da energia está dentro deste raio). Na Fig. 12 mostramos os perfis da “verdadeira” perturbação da energia  $\delta \tilde{\sigma}$  ( $= \sqrt{g_{zz}} \delta \sigma$ ) para diferentes

modos de perturbação (Eq. (74)). Vemos na Fig. 12 que os perfis da perturbação da densidade são estáveis e que têm um caráter oscilatório. Quando aumentamos o parâmetro  $w$  o número de oscilações aumenta dentro do disco, e quando o número de onda  $k$  é aumentado a amplitude da oscilação decresce. Na Fig. 12 vemos que há um fator de aproximadamente  $10^{-3}$  entre a amplitude dos modos ( $w = 1, k = 0$ ) e ( $w = 1, k = 2$ ).

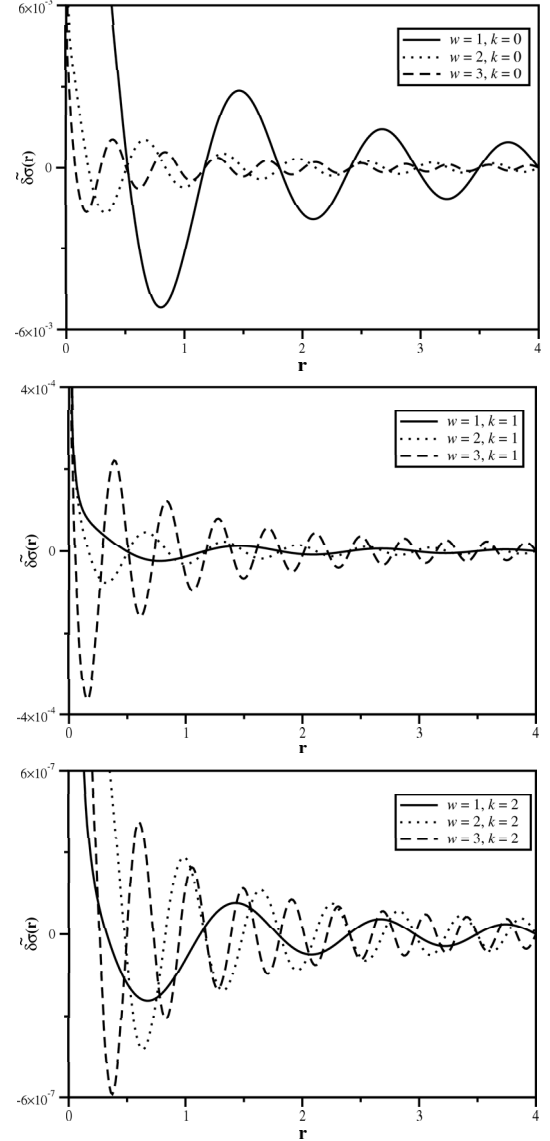


Figura 12 - Perfis da perturbação da densidade de energia para um disco isotrópico de Schwarzschild com parâmetros ( $a = 0,5, m = 0,4$ ). Os primeiros três modos  $w$  para os três primeiros números de onda  $k$  são mostrados. Vemos que, aumentando o modo  $w$ , o número de oscilações dentro do disco aumenta, e, quando  $k$  aumenta, a amplitude decresce.

Na Fig. 13, apresentamos os perfis das perturbações da “verdadeira” pressão ( $\delta \tilde{p} = \sqrt{g_{zz}} \delta p$ ) e da componente física da perturbação da velocidade radial ( $\delta \tilde{U}^r = \delta U^r \sqrt{g_{rr}}$ ) para os primeiros três modos  $w$  com  $k = 0$ , e os perfis da perturbação da componente física da velocidade azimutal ( $\delta \tilde{U}^\varphi = \delta U^\varphi \sqrt{g_{\varphi\varphi}}$ ) para os três primeiros

modos  $w$  com  $k = 1$ . Os modos da perturbação da velocidade azimutal com  $k = 0$  são nulos. Vemos na Fig. 13 que a perturbação da pressão tem os mesmos aspectos

qualitativos que a perturbação da densidade. As perturbações das velocidades azimutal e radial mostram um comportamento oscilatório diferente.

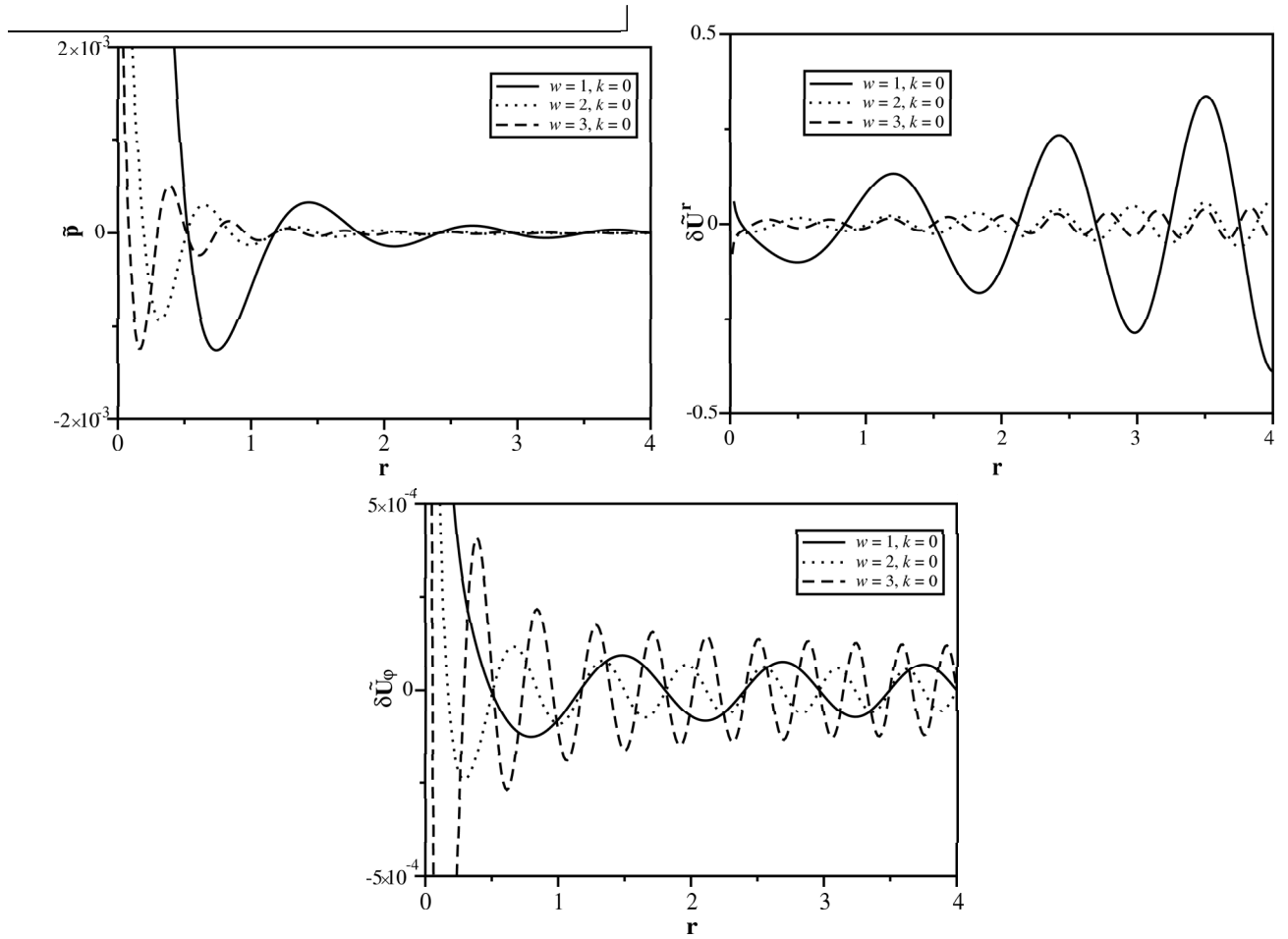


Figura 13 - Perfis das perturbações da “verdadeira” pressão, velocidade radial e velocidade azimutal para um disco isotrópico com parâmetros ( $a = 0,5$ ,  $m = 0,4$ ). Vemos que os aspectos qualitativos da perturbação da pressão são os mesmos que os da perturbação da densidade de energia. A amplitude da velocidade radial aumenta quando estamos perto da borda do disco. Neste caso devemos comparar a perturbação com o valor da velocidade de escape das partículas que formam o disco para se ter um modelo consistente. A amplitude da velocidade azimutal é quase constante longe do centro do disco.

Quando fizemos o corte do disco infinito para produzir um disco finito desconsideramos a fração do disco que se estende até o infinito. Podemos modelar a presença do exterior como uma perturbação na borda do disco. Fazemos na borda do disco  $\delta\sigma|_{r=R_{cut}} = \epsilon$  com  $\epsilon \ll \delta\sigma|_{r=0}$ . Os experimentos numéricos nos mostram que a perturbação na borda não modifica os aspectos qualitativos da solução. O disco continua estável perante as perturbações da forma (74).

## 7. Considerações finais

Ao longo do artigo mostramos algumas soluções exatas das equações de Einstein que representam, principalmente, diversos modelos de discos finos e discos grossos. O tipo de fluido que representa a matéria da

qual é composta o disco é descrita pela sua densidade e pressão, nos casos mostrados essas quantidades possuem boas propriedades e podem representar a matéria física usual. Para ir mais longe no que tange aos modelos de matéria pode-se tentar resolver a equação de Fokker-Planck relativística para encontrar a equação de distribuição associada à matéria. Não é possível encontrar soluções analíticas desta equação, porém a sua resolução pode ser modelada numericamente. Para o caso newtoniano, existem alguns poucos casos nos quais se pode encontrar a função de distribuição [34]. Para o caso relativístico não se conhece nem um caso de solução analítica da equação de Fokker-Planck para discos.

O estudo de órbitas em diferentes métricas é um tema de pesquisa ativo, em especial o estudo da es-

tabilidade de órbitas de partículas de teste movendo-se ao longo de geodésicas. Temos comportamentos tipicamente caóticos em sistemas fechados, que podem ser vistos usando seções de Poincaré [59, 61]. Também temos o aparecimento de bacias fractais em sistemas abertos [62, 64]. Encontra-se que sistemas que são integráveis no contexto newtoniano podem não ser integráveis no contexto da relatividade einsteiniana [62, 60].

Nas soluções de discos apresentadas, em geral, não temos outras singularidades à parte da delta de Dirac que representa o disco. O fato de que a teoria da relatividade geral é uma teoria não linear pode-se traduzir no aparecimento de diversos tipos de singularidades, como singularidades cônicas, singularidades tipo solução, singularidades de curvatura, etc. No caso das soluções de Weyl estas singularidades têm sido e continuam sendo muito estudadas (veja por exemplo [65]).

Existem diversos métodos para se gerar uma solução das equações de Einstein com rotação (solução estacionária) a partir de uma solução sem rotação (solução estática). Uma breve introdução aos métodos pode ser encontrada em [1]. Talvez o mais poderoso destes métodos seja o método do espalhamento inverso [66]. Soluções estacionárias de discos super-impostas a buracos negros foram encontradas utilizando esta técnica [41]. Soluções estacionárias com campos multipolares foram estudadas em [67].

## Referências

- [1] Um bom catálogo comentado de soluções exatas das equações de Einstein é H. Stephani, *et al.* *Exact Solutions to the Einstein's Field Equations* (Cambridge, 2003), 2nd ed.
- [2] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [3] A. Krasinski, *Inhomogeneous Cosmological Models* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [4] W.A. Bonnor and A. Sackfield, *Comm. Math. Phys.* **8**, 338 (1968).
- [5] T. Morgan and L. Morgan, *Phys. Rev.* **183**, 1097 (1969).
- [6] L. Morgan and T. Morgan, *Phys. Rev. D* **2**, 2756 (1970).
- [7] D. Lynden-Bell and S. Pineault, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **185**, 679 (1978).
- [8] P.S. Letelier and S.R. Oliveira, *J. Math. Phys.* **28**, 165 (1987).
- [9] J.P.S. Lemos, *Class. Quantum Grav.* **6**, 1219 (1989).
- [10] J.P.S. Lemos and P.S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **10**, L75 (1993).
- [11] J. Bičák, D. Lynden-Bell and J. Katz, *Phys. Rev. D* **47**, 4334 (1993).
- [12] J. Bičák, D. Lynden-Bell and C. Pichon, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265**, 126 (1993).
- [13] J.P.S. Lemos and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **49**, 5135 (1994).
- [14] J.P.S. Lemos and P.S. Letelier, *Int. J. Mod. Phys. D* **5**, 53 (1996).
- [15] G. González and O.A. Espitia, *Phys. Rev. D* **68**, 104028 (2003).
- [16] G. García and G. González, *Phys. Rev. D* **69**, 124002 (2004).
- [17] J. Bičák and T. Ledvinka, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1669 (1993).
- [18] G. González and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **62**, 064025 (2000).
- [19] G. González and P.S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **16**, 479 (1999).
- [20] P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **60**, 104042 (1999).
- [21] J. Katz, J. Bičák and D. Lynden-Bell, *Class. Quantum Grav.* **16**, 4023 (1999).
- [22] D. Vogt and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **68**, 08410 (2003).
- [23] D. Vogt and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **70**, 064003 (2004).
- [24] V. Karas, J.M. Huré and O. Semerák, *Class. Quantum Grav.* **21**, R1 (2004).
- [25] C. Klein, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2267 (1997).
- [26] G. Neugebauer and R. Meinel, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3046 (1995).
- [27] C. Klein and O. Richter, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2884 (1999).
- [28] C. Klein, *Phys. Rev. D* **63**, 064033 (2001).
- [29] J. Frauendiener and C. Klein, *Phys. Rev. D* **63**, 084025 (2001).
- [30] C. Klein, *Phys. Rev. D* **65**, 084029 (2002).
- [31] C. Klein, *Phys. Rev. D* **68**, 027501 (2003).
- [32] C. Klein, *Ann. Phys.* **12** (10), 599 (2003).
- [33] G. González and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **69**, 044013 (2004).
- [34] S. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1987).
- [35] Lord Rayleigh, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **93**, 148 (1917). Veja também L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1987) §27, 2nd ed.
- [36] H. Weyl, *Ann. d. Phys.* **54**, 117 (1917).
- [37] H. Weyl, *Ann. d. Phys.* **59**, 185 (1919).
- [38] M. Ujevic and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **70**, 084015 (2004).
- [39] G.G. Kuzmin, *Astron. Zh.* **33**, 27 (1956).
- [40] D. Vogt and P.S. Letelier, *New Models of General Relativistic Static Thick Disks* (preprint gr-qc/0501103).

- [41] P.S. Letelier and S.R. Oliveira, *J. Math. Phys.* **28**, 165 (1987).
- [42] J. Ehlers, in *Grundlagenprobleme der Modernen Physik*, edited by A. Erdélyi, J. Pfarr and E.-W. Stachow (BI-Verlag, Mannheim, 1981), p. 65-84.
- [43] D.M. Zipoy, *J. Math. Phys.* **7**, 1137 (1966).
- [44] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford Publications, New York, 1992), p. 623.
- [45] I.D. Novikov and V. Frolov, *Physics of Black Holes* (Kluwer, Dordrecht, 1988), p. 184.
- [46] B. Voorhees, *A Class of Inextendible Weyl Solutions in Methods of Local and Differential Geometry in General Relativity* (Springer-Verlag, New York 1971), p. 137-144.
- [47] H. Robertson and T. Noonan, *Relativity and Cosmology* (Saunders, London 1968), p. 272-278.
- [48] B. Boisseau and P.S. Letelier, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 1077 (2002).
- [49] M. Chazy, *Bull. Soc. Math. (France)* **52**, 17 (1924).
- [50] H. Curzon, *Proc. London Math. Soc.* **23**, 477 (1924).
- [51] T. Levi-Civita, *ds<sup>2</sup> Einsteiniani in Campi Newtoniani*, *Rend. Acc. dei Lincei*, VIII Note, (1917-1919).
- [52] P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **68**, 104002, (2003).
- [53] F. Bertola, P. Cingano, E.M. Corsini, A. Pizzella, M. Persic and P. Salucci *Ap. J.* **458**, L67 (1996).
- [54] P.S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **4**, L75-L77 (1987).
- [55] P.S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **7**, L203-L207 (1990).
- [56] H.A. Buchdahl, *Astrophys. J.* **140**, 1512 (1964).
- [57] E. Guéron and P.S. Letelier, *Phys. Rev. E* **63**, 035201(R), (2001).
- [58] E. Guéron and P.S. Letelier, *Phys. Rev. E* **66**, 046611 (2002).
- [59] W.M. Vieira and P.S. Letelier, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1409 (1996).
- [60] W.M. Vieira and P.S. Letelier, *Phys. Lett. A* **228**, 22-24 (1997).
- [61] W.M. Vieira and P.S. Letelier, *Ap. J.* **513**, 383 (1999).
- [62] A.P.S. Moura and P.S. Letelier, *Phys. Lett. A* **266**, 309 (2000).
- [63] A.P.S. Moura and P.S. Letelier, *Phys. Rev. E* **61**, 6506 (2000).
- [64] A.P.S. Moura and P.S. Letelier, *Phys. Rev. E* **62**, 4784 (2000).
- [65] P.S. Letelier and S.R. Oliveira, *Class. Quantum Grav.* **15**, 421 (1998).
- [66] V. Belinski and E. Verdaguer, *Gravitational Solitons*, (Cambridge, 2001).
- [67] P.S. Letelier, *Class. Quan. Grav.* **16**, 494 (1999).