

O porta-aviões, o torpedo e o círculo de Apolônio

(The airplane carrier, the torpedo, and the Apollonius circle)

Reynaldo Lopes¹, A.C. Tort²

¹Escola SESC de Ensino Médio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

²Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Recebido em 27/1/14; Aceito em 18/4/14; Publicado em 31/7/2014

Neste trabalho, discutimos um exemplo simples de problema de perseguição, a interceptação de um alvo móvel, um porta-aviões, por um torpedo, ambos em movimento com velocidade vetorial constante. O problema pode ser resolvido com o auxílio do círculo de Apolônio, um teorema demonstrado por Apolônio de Perga (c. 262 a.C – 212 a.C.). A simplicidade relativa do problema permite sua introdução no Ensino Médio e no ensino universitário como um primeiro exemplo de simulação por meio de *softwares* educacionais como, por exemplo, o software (gratuito) *Modellus*.

Palavras-chave: problemas de perseguição, simulação computacional, simulação com *software* educacional.

In this paper we discuss a simple example of a search problem, namely, the interception of a movable target, in our case an air carrier, by a torpedo, both moving at constant velocity. The problem can be solved with the help of Apollonius' circle. The relative simplicity of the problem allows for its introduction at the high school and university physics level as a first example of simulation with educational softwares such as the free *Modellus*.

Keywords: pursuit problems; computational simulation; educational software.

1. Introdução

Um porta-aviões com o leme perigosamente avariado segue um curso retilíneo rumo a sua base naval para reparos, embora seus sistemas eletrônicos de defesa tenham detectado a presença de um submarino hostil nas cercanias. Os sistemas de detecção do submarino mostram na tela do monitor que a distância relativa entre os dois é de 1 km. A celeridade do porta-aviões é duas vezes menor do que a do torpedo que lhe está reservado. O comandante do submarino pergunta ao seu imediato se a *solução de interceptação* é favorável. O oficial responde afirmativamente. O comandante então ordena: “Disparar torpedo”. Com o leme inutilizado e, logo, incapaz de efetuar qualquer manobra evasiva, o porta-aviões está condenado. Será fatalmente atingido pelo torpedo. A solução de interceptação favorável que fez com que o comandante do submarino ordenasse o disparo do torpedo é uma figura geométrica conhecida pelos matemáticos como o círculo de Apolônio em homenagem ao grande matemático grego, Apolônio de Perga (c. 262 a.C – 212 a.C.). O problema do porta-aviões e do torpedo é uma versão moderna do problema original de Apolônio que tratava de um navio mercante e um navio pirata que procurava interceptá-lo. A geometria do problema está representada na Fig. 1.

Neste trabalho, discutiremos o problema do círculo de Apolônio, sua importância no problema da interceptação e sua implementação no Ensino Médio por meio do *software* educacional *Modellus*.

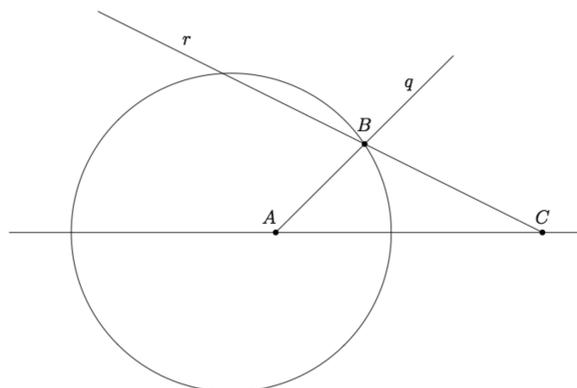


Figura 1 - O porta-aviões (A) segue o curso definido pela semi-reta a, o submarino (C) dispara o torpedo que segue a trajetória definida pela semi-reta b. O torpedo intercepta o porta-aviões no ponto B sobre círculo de Apolônio.

¹E-mail: RLOjunior@gmail.com.

2. O círculo de acordo com Apolônio

Comecemos revisando brevemente o conceito de círculo de Apolônio. Sejam dois pontos A e C colineares e um ponto B não colinear com A e C . Seja AB , o segmento de reta que une A e B , e BC , o segmento de reta que une B e C . Se $|AB|$ e $|BC|$ são as medidas de AB e BC , e

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \kappa, \quad (1)$$

onde κ é uma constante real positiva diferente da unidade, então o conjunto \mathcal{S} dos pontos B que satisfazem esta relação é o círculo, veja a Fig. 2. A demonstração deste teorema é apresentada na Ref. [1]. O círculo de Apolônio tem a importante propriedade

$$|OA| \cdot |OC| = |OB|^2, \quad (2)$$

onde O é centro do círculo e a medida $|OB| = R$, é o raio.

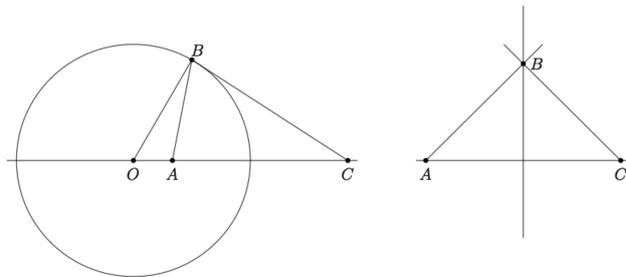


Figura 2 - (a) O círculo de Apolônio para κ real positivo diferente da unidade. (b) Para $\kappa = 1$, círculo de Apolônio transforma-se na mediana de AC .

Se $\kappa = 1$, então os pontos A e C são equidistantes do ponto B e o círculo transforma-se na mediana do segmento AC , veja a Fig. 2.

3. O círculo de Apolônio e o problema da interceptação

Para entender melhor o problema da interceptação, comecemos reconhecendo que o torpedo só atinge o porta-aviões se ambos coincidirem no ponto B , no mesmo instante de tempo t . Isto significa que

$$t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{|AB|}{V_{p.a.}} = \frac{|BC|}{V_t}, \quad (3)$$

onde $V_{p.a.}$ e V_t são os módulos das velocidades (uniformes) do porta-aviões e do torpedo, respectivamente. Definindo: $\kappa = V_t/V_{p.a.}$, a relação acima pode ser posta na forma

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{V_t}{V_{p.a.}} = \kappa, \quad (4)$$

que determina o círculo de Apolônio para os pontos A e C . A constante κ é real e positiva, mas diferente da unidade. Se agora introduzirmos coordenadas cartesianas ao fazermos uso da Eq. (4), poderemos escrever

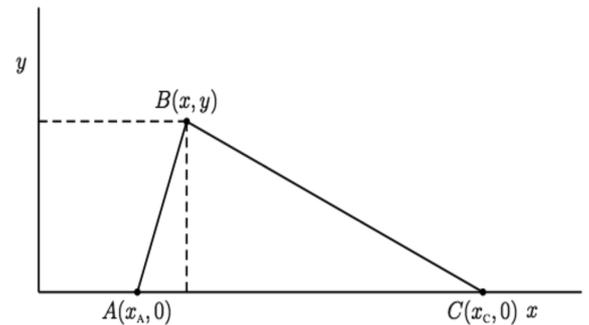


Figura 3 - Geometria da representação cartesiana do círculo de Apolônio

$$\frac{\sqrt{(x - x_C)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y^2}} = \kappa, \quad (5)$$

onde (x, y) são as coordenadas de um ponto arbitrário B no plano XY , $(x_A, 0)$ são as coordenadas do ponto A e $(x_C, 0)$ são as coordenadas do ponto C , veja a Fig. 3. Sem perda de generalidade, consideraremos sempre $x_C > x_A$. Um pouco de álgebra permite escrever esta equação na forma

$$\left| x - \frac{(\kappa^2 x_A - x_C)}{\kappa^2 - 1} \right|^2 + y^2 = \left[\frac{\kappa(x_C - x_A)}{|1 - \kappa^2|} \right]^2, \quad \kappa \neq 1, \quad (6)$$

que é a equação de um círculo de raio R com centro no ponto (x_0, y_0) , onde

$$x_0 = \frac{(\kappa^2 x_A - x_C)}{\kappa^2 - 1}, \quad y_0 = 0, \\ R = \frac{\kappa(x_C - x_A)}{|1 - \kappa^2|}, \quad \kappa \neq 1. \quad (7)$$

Esta equação descreve analiticamente o círculo de Apolônio dos pontos A e C . De fato, o leitor atento perceberá que acabamos de demonstrar o teorema de Apolônio na linguagem da geometria analítica. Observe também que podemos dividir a representação cartesiana do círculo de Apolônio por um comprimento padrão de referência ℓ_0 e desse modo lidar com grandezas adimensionais.

A solução de interceptação depende da razão entre as velocidades do torpedo e do porta-aviões, isto é, do valor de κ . Temos dois casos relevantes a considerar: $\kappa > 1$, e $0 < \kappa < 1$, mas antes vejamos o caso $\kappa = 1$.

Para $\kappa = 1$, a Eq. (5) tem duas soluções. A primeira é

$$x = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad (8)$$

que implica em

$$|x - x_A| = |x - x_C| = \frac{|x_C - x_A|}{2}. \quad (9)$$

A segunda solução é $x_A = x_C$ para qualquer x e qualquer y . Ambas as soluções significam que os pontos A e C são equidistantes de um ponto arbitrário da mediana do segmento AC , veja a Fig. 2 (b). Mais ainda, na segunda solução, os pontos A e C coincidem sobre a mediana. Fisicamente isto significa que: (a) haverá interceptação sobre um ponto da mediana, ou (b) o porta-aviões e o torpedo seguem trajetórias paralelas coincidentes. Vejamos agora os dois outros casos.

Para $\kappa > 1$, isto é, quando a velocidade do torpedo é maior do que a celeridade do porta-aviões, que é o caso do problema posto inicialmente, o curso do porta-aviões intercepta o círculo de Apolônio apenas uma vez, o comandante do submarino tem apenas uma possibilidade de atingir o alvo, veja a Fig. 4.

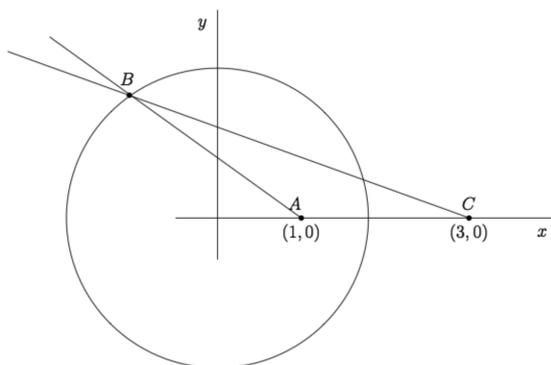


Figura 4 - O círculo de Apolônio para para $A=(1,0)$, $C=(3,0)$, e $\kappa = 2$. A distância relativa entre o porta-aviões, A , e o submarino, C , vale duas unidades adimensionais. Observe que há apenas uma possibilidade de interceptação.

Para $0 < \kappa < 1$, isto é, para o caso em que a velocidade do torpedo é menor do que a do porta-aviões, há duas possibilidades de interceptação, pois o curso do porta-aviões intercepta o círculo de Apolônio duas vezes, nos pontos B e D , veja a Fig 5. Isto quer dizer que um torpedo mesmo mais lento do que seu alvo ainda assim pode atingí-lo! No entanto, há um limite para que isto aconteça. Se θ é o ângulo entre o curso do porta-aviões e o eixo x no instante $t=0$, e se este ângulo for maior do que o valor crítico dado por

$$\theta_c = \arcsin(\kappa), \quad (10)$$

não haverá interceptação. A obtenção deste resultado pode ser apresentada aos alunos como um problema

(teórico) de dificuldade moderada que poderá ser resolvido como um exercício em geometria com o auxílio da Fig. 4 (veja a solução no apêndice), ou, como veremos a seguir, por meio de uma simulação do problema.

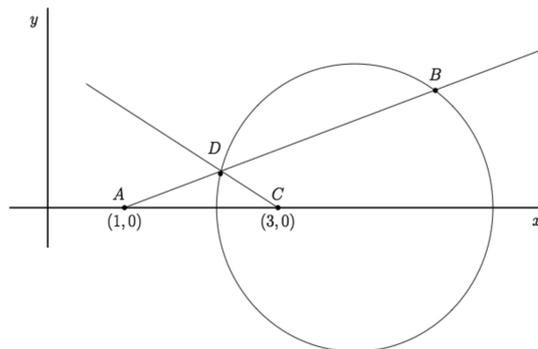


Figura 5 - O círculo de Apolônio para $A = (1,0)$, $C = (3,0)$, e $\kappa = 1/2$. Observe que agora há duas possibilidades de interceptação.

4. A simulação do problema com o *Modellus*

O desenvolvimento de *softwares* educacionais permite que professores e alunos façam simulações e animações de problemas mais desafiadores de cinemática e dinâmica newtoniana no ensino médio ou nos cursos de mecânica introdutórios universitários (Física Geral 1). Problemas que não exijam que o aluno esteja familiarizado com métodos matemáticos avançados, mas que permitam uma ampla variação dos parâmetros relevantes, podem ser estudados com grande proveito. O problema do porta-aviões e do torpedo pode ser simulado por alunos do Ensino Médio com um *software* apropriado como, por exemplo, o *Modellus* desenvolvido por V. Teodoro e que tem a vantagem adicional de ser gratuito [2]. A interação do aluno com o modelo se dá inicialmente pela alteração dos parâmetros. Pode-se alterar o curso do porta-aviões, isto é, seu vetor velocidade, alterar o valor de κ , determinar o círculo de Apolônio correspondente à escolha dos parâmetros e direcionar o vetor velocidade do torpedo para um dos pontos de interceptação. Interagindo ativamente com o modelo, a aluno terminará por descobrir que sempre há possibilidade de não haver interceptação, pois esta depende crucialmente da escolha dos parâmetros. Um roteiro para a implementação da simulação é discutido detalhadamente na Ref. [3]. Algumas imagens da simulação são mostradas nas Figs. 6 e 7. Evidentemente, se o professor achar adequado, o aluno poderá encarregar-se da modelagem completa que deve envolver um estudo prévio da geometria do círculo de Apolônio.

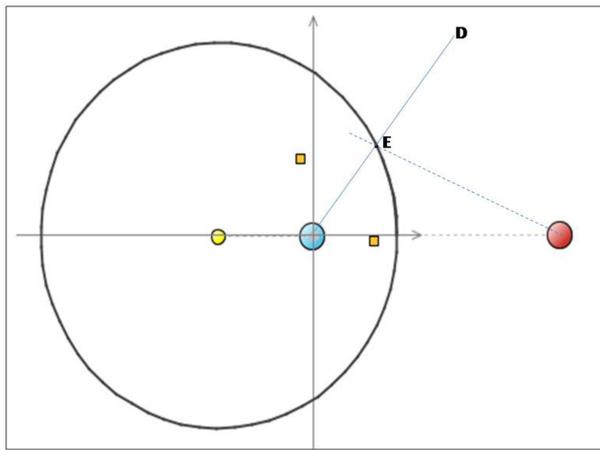


Figura 6 - No quadro à esquerda, o círculo de Apolônio, o porta-aviões (representado pela bolinha à esquerda) e o submarino (representado pela bolinha entre o porta-aviões e o centro do círculo) para $0 < \kappa < 1$. Para $\kappa > 1$, no quadro à direita, o porta-aviões está entre o centro geométrico do círculo e o submarino à direita.

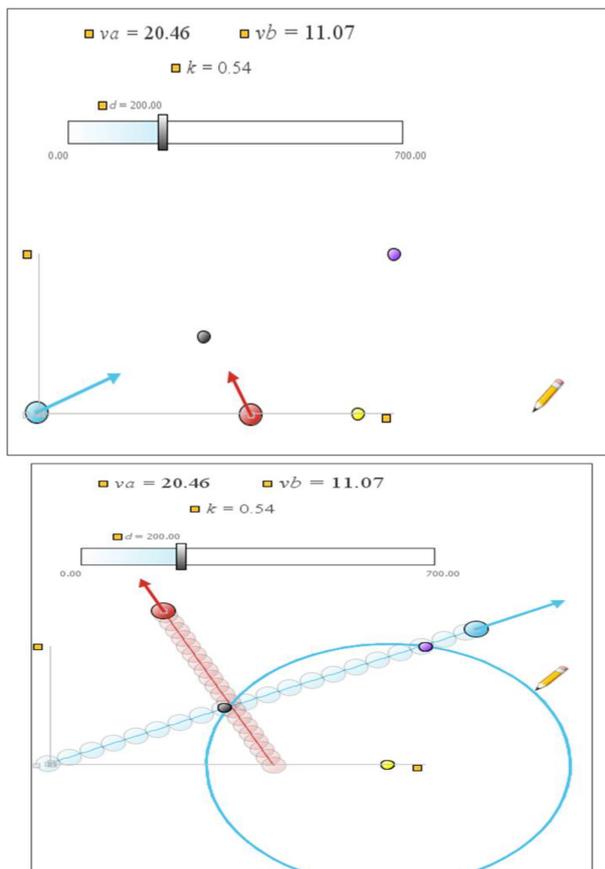


Figura 7 - imagens da animação com o Modellus para $0 < \kappa < 1$.

5. Observações finais

Poucos são os problemas de perseguição que requerem apenas conhecimentos de álgebra e geometria elementar por parte dos alunos. Na maior parte das vezes é necessário fazer uso dos métodos do cálculo diferencial

e integral para analisar este tipo de problema. Entretanto, problemas de perseguição, além deste que discutimos aqui, mesmo os mais complexos, podem ser simulados com *softwares* educacionais. Exemplos adicionais podem ser consultados na Ref. [3]. Para quem deseja aprofundar-se na matemática dos problemas de perseguição, a Ref. [4] é um bom começo. Outras aplicações do círculo de Apolônio a problemas físicos podem ser encontradas nas Refs. [5, 6].

Apêndice: o cálculo do ângulo crítico quando $0 < \kappa < 1$

A condição que permite obter o ângulo crítico fica determinada quando os pontos B e D da Fig. 5 são coincidentes, veja a Fig. 8. Neste caso, o triângulo ABO é reto, pois o raio R do círculo de Apolônio é perpendicular à semirreta tangente em B que contém o segmento AB . Portanto

$$\sin \theta_c = \frac{R}{|AO|},$$

onde

$$|AO| = x_O - x_A = \frac{x_C - \kappa^2 x_A}{1 - \kappa^2} - x_A = \frac{x_C - x_A}{1 - \kappa^2}.$$

e,

$$R = \frac{\kappa(x_C - x_A)}{1 - \kappa^2},$$

veja as Eqs. (7). Segue que

$$\sin \theta_c = \kappa,$$

logo,

$$\theta_c = \arcsin(\kappa).$$

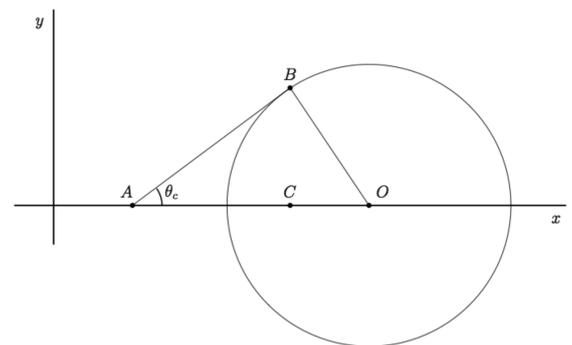


Figura 8 - Geometria para a determinação do ângulo crítico θ_c .

Agradecimentos

Os autores agradecem ao árbitro e ao Dr. Marcus V Cougo-Pinto pela leitura atenta e sugestões pertinentes que tornaram o manuscrito original mais claro e preciso.

Referências

- [1] C.S. Ogilvy, *Excursions in Geometry* (Dover, New York, 1990).
- [2] V.D. Teodoro, *Modellus: Learning Physics with Mathematical Modelling*. Tese de doutorado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa (2002). Ver também: *Modellus: uma ferramenta computacional para criar e explorar modelos matemáticos* disponível em <http://modellus.fct.unl.pt/file.php?file=/1/papers/Modellus%20Informat.PDF>, acessado em 25/3/2014. Um manual do *Modellus* pode ser encontrado em http://www.if.ufrgs.br/computador_ensino_fisica/modellus/modellusI_introducao.htm, acessado em 25/3/2014.
- [3] R. Lopes de Oliveira Júnior, *Problemas e Curvas de Perseguição no Ensino Médio: Usando o Modellus como Ferramenta Alternativa*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (2011).
- [4] P.J. Nahin, *Chases and Escapes* (Princeton University Press, Princeton, 2007).
- [5] A.C. Tort, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 1704 (2011).
- [6] M.B. Partenskii e P.C. Jordan, *The Physics Teacher* **46**, 104 (2008).