

O movimento aparente da Lua

(The apparent motion of the Moon)

Arlei Prestes Tonel, Guilherme Frederico Marranghello¹

Universidade Federal do Pampa, Bagé, RS, Brasil

Recebido em 10/7/2012; Aceito em 1/4/2013; Publicado em 24/4/2013

Investigamos o movimento da Lua em sua órbita ao redor da Terra e como ele se configura ao localizarmos nosso sistema de referência na Terra: o movimento aparente da Lua. A órbita da Lua ao redor da Terra também é um problema mais complexo do que geralmente supomos; consequentemente, seu movimento visto da Terra também se torna complexo. Determinamos uma equação que descreve o ponto de maior aproximação da Lua ao zênite de uma localidade, como função do tempo e da latitude do local. Esta equação leva em consideração o movimento de rotação da Lua ao redor da Terra e a variação do eixo de inclinação de sua órbita com relação ao plano da órbita terrestre. Comparamos os resultados com dados extraídos do programa *Stellarium*. Por fim, estimamos a inclinação atual do eixo da órbita da Lua em relação ao plano terrestre.

Palavras-chave: Lua, órbita.

We investigate the motion of the Moon in its orbit around the Earth and how it sets when we locate our reference system on earth, the apparent motion of the Moon. The orbit of the Moon around the Earth is also a problem more complex than it is generally assumed, so that its motion as seen from the Earth also becomes complex. We determine an equation that describes the point of closest approach of the Moon at the zenith, as a function of time and latitude of the place. This equation takes into account the rotation of the Moon around the Earth and the variation of the inclination axis of its orbit with respect to the plane of terrestrial orbit. We compare the results with the data extracted from the software *Stellarium*. Finally, we estimate the current tilt of the axis of the orbit of the Moon relative to the plane of the Earth.

Keywords: Moon, orbit.

1. Introdução

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+) [1], dentro do tema *Universo, Terra e Vida*, existe a unidade temática *Terra e Sistema Solar*, onde é afirmado que o aluno deverá:

Conhecer as relações entre os movimentos da Terra, da Lua e do Sol para a descrição de fenômenos astronômicos (duração do dia e da noite, estações do ano, fases da lua, eclipses etc.).

A órbita da Lua pode ser facilmente discutida, dentro de um contexto onde o professor se sinta seguro, tratando-a apenas como um movimento circular² ao redor da Terra, cuja força responsável pela sua trajetória curva corresponde à força gravitacional que a

Terra exerce sobre a Lua (e que a Lua também exerce sobre a Terra). O tema ainda pode ser apresentado em discussões sobre as fases da Lua ou sobre eclipses.

Neste ponto, os problemas podem começar a aparecer. Podemos encontrar uma discussão mais detalhada sobre o período entre duas Luas Cheias (período sinódico) em [2]. Este período, segundo o autor, é aproximadamente igual a 29,53 dias, variando entre 29,3 e 29,8 dias.³ Dentre as explicações está a elipticidade da órbita da Lua, que, conforme a Lei de Kepler,⁴ resulta em diferentes velocidades no movimento da Lua em sua órbita, quando ela se encontra mais próxima ou mais distante da Terra (o foco desta órbita aproximadamente elíptica). Na discussão, tanto sobre as fases da Lua, quanto sobre os eclipses, é necessário introduzir uma nova variável ao problema: a inclinação do plano da órbita da Lua ao redor da Terra com relação

¹E-mail: guilherme.marranghello@unipampa.edu.br.

²A órbita da Lua é aproximadamente elíptica.

³É importante salientar que assumiremos, ao longo do texto, diversos valores médios para as grandezas discutidas, levando a uma pequena imprecisão nos resultados, discutida ao final.

⁴Recomendamos a leitura da Ref. [2] para uma discussão mais aprofundada sobre o tema.

à eclíptica (plano da órbita da Terra ao redor do Sol). São apenas $5,15^\circ$,⁵ mas já é o suficiente para que eclipses não sejam tão frequentes e, principalmente, para que o movimento aparente destes astros, vistos por um observador na Terra, sejam bastante distintos [2].

Já existem muitas referências que propõe trabalhos e/ou discussões sobre as características relativas ao movimento da Lua ao redor da Terra [2-6]. Estes trabalhos discutem, desde uma improvável relação entre a taxa de natalidade com as fases da Lua até o movimento do nosso satélite natural visto de um referencial localizado no Sol. Assim, nosso trabalho não pretende esgotar o tema, mas contribuir para enriquecê-lo, e segue com a discussão sobre as principais componentes que descrevem o movimento aparente da Lua, passando então a um comparativo com dados coletados através de um programa de simulação do céu, finalizando com uma discussão sobre os resultados encontrados.

2. A órbita da Lua

Os movimentos do Sol e da Lua também podem apresentar algumas similaridades que permitem ao professor, com bastante cuidado, fazer algumas analogias. Assim como podemos ver na Ref. [7], que o Sol se põe mais ao sul durante o verão (no hemisfério sul) e mais ao norte no inverno, algo também acontece com a Lua, conforme verificamos na Fig. 1, onde duas fotografias foram feitas marcando a posição aproximada do “pôr da Lua” nos dias 22 e 28 de junho de 2012. Como é possível verificar, devido ao período sideral da Lua ser de aproximadamente 27 dias, muito mais curto que os 365 dias do período sideral do movimento da Terra ao redor do Sol, este movimento pode ser facilmente obser-

vado quase diariamente, enquanto a observação da variação da posição do pôr do Sol necessita de um período mais longo.

Apesar de termos dito, inicialmente, que a Lua orbita a Terra em um plano cuja inclinação é de $5,15^\circ$, devemos salientar agora que esta inclinação varia ao longo de um período de 18,6 anos. Esta variação faz com que a inclinação da órbita da Lua, com relação ao plano terrestre varie entre $5,15^\circ$ e $-5,15^\circ$. Como o eixo de rotação da Terra também está inclinado com relação à sua órbita ($23,5^\circ$), a inclinação da órbita da Lua com relação ao equador terrestre varia entre $28,65^\circ$ ($23,5^\circ + 5,15^\circ$) e $18,35^\circ$ ($23,5^\circ - 5,15^\circ$).⁶

Assim, descrevemos o movimento aparente da Lua, onde consideramos apenas seu movimento ao redor da Terra, através de uma aproximação dada pela equação

$$z_{min} = A \sin \left(\frac{2\pi}{27,3} x \right), \quad (1)$$

onde x representa o número de vezes que a Lua passa sobre o ponto mais alto no céu e A é uma amplitude que ainda iremos determinar. Assim, o ponto mais alto do trânsito lunar, ou a menor distância do zênite, seria dado por z_{min} (distância zenital mínima). Esta distância corresponde à declinação máxima da Lua (ângulo compreendido entre o equador celeste e o astro), lembrando que a relação entre a distância zenital, a declinação δ e a latitude do local φ pode ser descrita pela equação

$$z = \pm(\delta - \varphi), \quad (2)$$

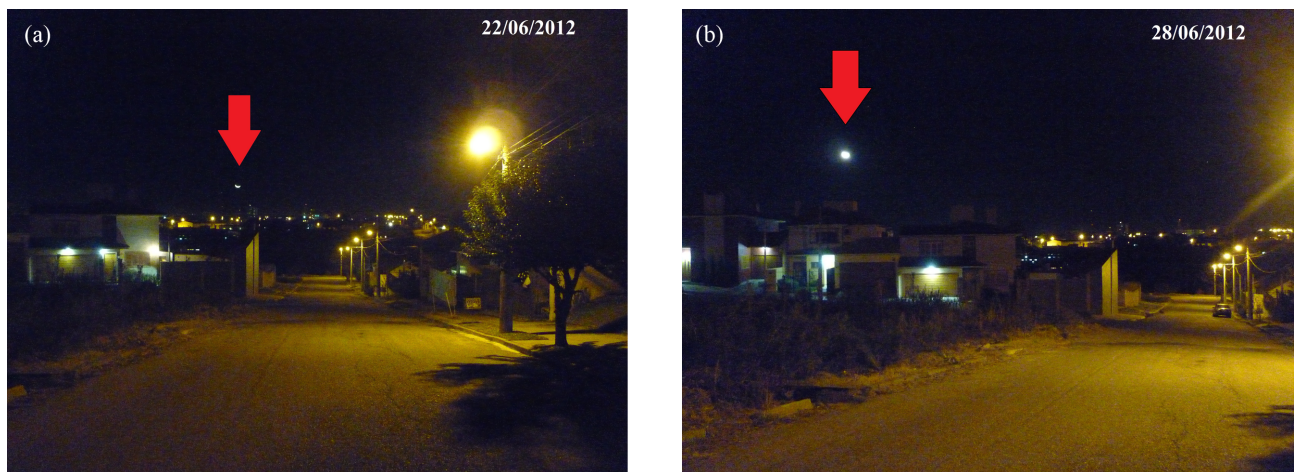


Figura 1 - Fotografias do “pôr da Lua”, na cidade de Bagé, nos dias 22 e 28 de junho de 2012. Ambas as figuras foram obtidas do mesmo ponto de observação sem a utilização do zoom da câmera fotográfica. Créditos: Guilherme F. Marranghello.

⁵Este valor não é fixo, conforme discutiremos ao longo deste trabalho.

⁶De fato, até mesmo este ângulo de $5,15^\circ$ não é fixo e sim uma média, podendo variar entre $4,99^\circ$ e $5,30^\circ$, porém, esta variação não será discutida no presente trabalho.

onde o sinal de positivo (negativo) descreve a medida onde a culminação da Lua é feita ao norte (sul) do zênite. Assim, esta relação pode ser visualizada através da Fig. 2, onde o índice k (v) está associado ao sinal positivo (negativo) da Eq. (2), assim

$$z_k = \delta_k - \varphi, \quad (3)$$

$$z_v = -(\delta_v - \varphi). \quad (4)$$

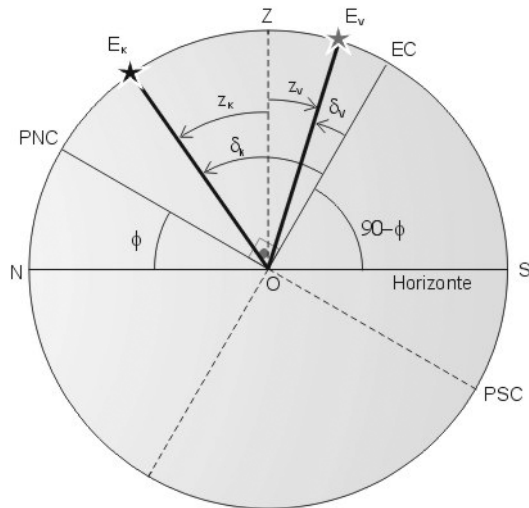


Figura 2 - Relação entre os ângulos que descrevem a distância zenital, a declinação e a latitude. Na figura, N (S) corresponde à direção norte (sul), PNC (PSC) descreve a direção do polo norte celeste (polo sul celeste), EC é a linha que define o equador celeste e Z, o zênite. φ corresponde à latitude do local. Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/coord.htm>.

Ainda devemos lembrar que o período de 27,3 dias é o tempo que a Lua leva para dar uma volta completa ao redor da Terra (período sideral). Este número difere dos 29,5 dias do ciclo lunar (período sinódico), devido ao fato da Terra se movimentar em sua órbita (veja a Fig. 3).

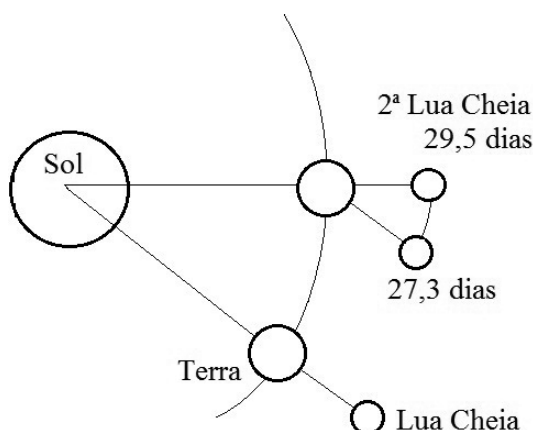


Figura 3 - Representação esquemática, sem levar em conta a escala, mostrando a posição da Lua em um determinado instante de Lua Cheia e sua posição na Lua Cheia seguinte, após um período sinódico.

Se a inclinação da órbita da Lua fosse constante ($5,15^\circ$), esta amplitude A também seria constante ($23,5^\circ + 5,15^\circ = 28,65^\circ$), entretanto, conforme mencionamos anteriormente, a amplitude deste movimento é variável, uma vez que a inclinação da órbita da Lua varia com relação ao equador da Terra. Esta amplitude fica então descrita por

$$A = 23,5^\circ + 5,15^\circ \sin\left(\frac{2\pi}{18,6 \times 365,25}x\right). \quad (5)$$

Apresentamos, na Fig. 4, o comportamento desta amplitude. A variação, na forma de uma senóide, tem período de 18,6 anos (6793 dias), oscilando entre um mínimo de $18,35^\circ$ ($23,5^\circ - 5,15^\circ$) e um máximo de $28,65^\circ$ ($23,5^\circ + 5,15^\circ$).

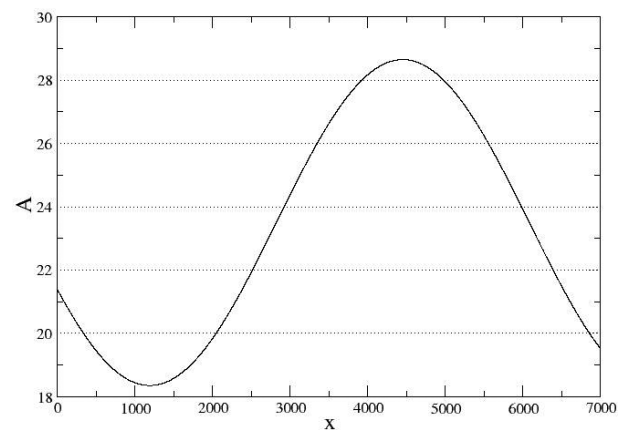


Figura 4 - Variação da amplitude da inclinação da órbita da lua em relação ao equador terrestre através de um período de 18,6 anos.

Finalmente, para medirmos a distância zenital mínima (altura máxima) da Lua em uma determinada latitude, reunimos as Eqs. (1) e (5), escrevendo

$$z_{\min} = \varphi + \left[23,5^\circ + 5,15^\circ \sin\left(\frac{2\pi}{18,6 \times 365,25}x\right) \right] \times \sin\left(\frac{2\pi}{27,3}x\right), \quad (6)$$

onde φ representa a latitude de um determinado local. Entretanto, ainda é necessário fazermos um ajuste para que o uso desta equação se torne mais direto. A variável x representa o número da passagem da Lua sobre o ponto de maior altitude, porém, se desejarmos fazer a relação com o número de dias, é necessário fazer uma pequena conversão, isto porque o dia terrestre possui 24 h, enquanto a Lua leva, aproximadamente, 24:50 para passar duas vezes consecutivas sobre o ponto mais alto (distância zenital mínima), devido ao seu movimento ao redor da Terra, como mostrado na Fig. 3. Assim, 24:50 correspondem a, aproximadamente 24,83 h, levando-nos à equação

$$z_{\min} = \varphi + \left[23,5^\circ + 5,15^\circ \sin \left(\frac{2\pi}{18,6 \times 365,25} \left(\frac{24,83}{24} d + \delta_1 \right) \right) \right] \times \sin \left(\frac{2\pi}{27,3} \left(\frac{24,83}{24} d + \delta_2 \right) \right), \quad (7)$$

onde, agora, d representa o número de dias transcorridos e as fases δ_1 e δ_2 devem ser determinadas a partir de uma escolha de data como sendo o dia zero. Para o nosso caso esta data foi o dia 28 de junho de 2012.

Na Fig. 5 mostramos o resultado de $z_{\min}$, dado em graus, para a cidade de Bagé, RS, que está numa latitude de, aproximadamente, 31° . O eixo horizontal representa o número de dias para um intervalo de aproximadamente dois anos, a contar do dia 28 de junho de 2012. Neste dia, medimos a amplitude do movimento, de onde podemos concluir que a inclinação atual⁷ da órbita da Lua em relação ao equador terrestre é de aproximadamente 22° . Isto pode ser visto na Fig. 5, subtraindo os pontos subsequentes, a partir do dia $d = 0$, para maior e menor aproximação do zênite, conforme

$$A_{\text{atual}} = \frac{z_{\min}^{\max} - z_{\min}^{\min}}{2}. \quad (8)$$

Também é possível ver, com um pouco de atenção, que esta amplitude está diminuindo para, aproximadamente, 20° ao final de um ano e 18° ao final de dois anos.

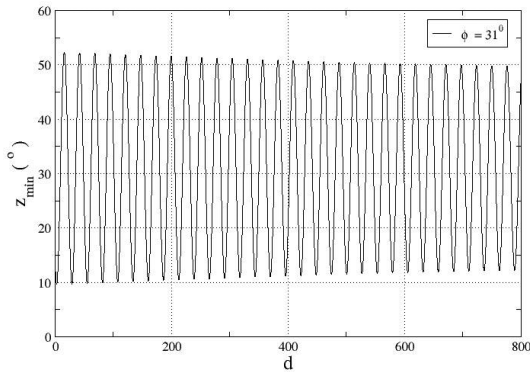


Figura 5 - Distância zenital mínima da Lua para a latitude de 31° como função do número de dias transcorridos, contados a partir do dia 28 de junho de 2012.

Apresentamos, na Fig. 6, esta mesma medida, ao longo de dois meses, comparando observações em diferentes localidades, situadas sobre o equador ($\varphi = 0^\circ$), em $\varphi = 30^\circ$, 60° e próximo ao polo, com $\varphi = 80^\circ$. O observador localizado sobre o equador deve ver a Lua passando, ora ao norte do zênite, ora ao sul, enquanto o observador localizado em Bagé ($31^\circ 20' S$) deve ver a Lua passando sempre mais ao norte do zênite. Ainda

é interessante verificar nesta figura que, o observador localizado próximo ao polo não vê a Lua por vários dias seguidos. Isto ocorre quando a distância zenital mínima ultrapassa os 90° , ou seja, a maior altura da Lua ainda é inferior à linha do horizonte. Isto ocorre, por exemplo, entre os dias 11 e 20, para um observador localizado numa latitude $\varphi = 80^\circ$. Este seria um fenômeno equivalente ao fenômeno que ocorre com o Sol nas proximidades dos polos.⁸

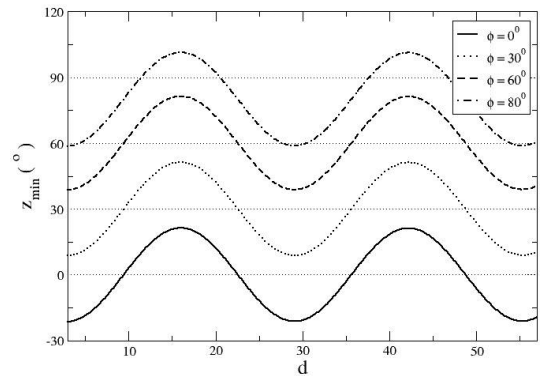


Figura 6 - Distância zenital mínima da Lua, como função do tempo, para as latitudes $\varphi = 0^\circ$ (linha cheia), 30° (linha pontilhada), 60° (linha tracejada) e 80° (linha ponto-tracejada).

3. Resultados “experimentais”

A fim de determinarmos o valor das constantes de fase, necessitamos fazer uma coleta de dados referentes à posição da Lua. Esta coleta de dados pode ser feita, de forma experimental, através de um clinômetro ou através da medida da sombra da Lua projetada por uma haste, da mesma forma que medimos a sombra do Sol. Esta segunda opção fica sujeita à necessidade de um local escuro e uma noite de Lua Cheia (ou quase cheia). Realizamos algumas medidas que se mostraram adequadas às equações que havíamos obtido. Entretanto, se desejamos coletar dados que possam ser comparados através de um longo período de tempo, digamos, 18,6 anos, podemos fazer uso de um aplicativo que simula o céu, visto por diferentes latitudes. Utilizamos o programa *Stellarium* [8] para “medir” a posição da Lua ao longo de vários dias, meses e anos, e assim foi possível comparar o resultado obtido por nossa equação chegando a um Coeficiente de Determinação $R^2 = 0,98$. Este coeficiente indica que 98% do comportamento dos dados é explicado pela equação. Esta equação à qual

⁷Por atual, entenda-se 28 de junho de 2012.

⁸Este fenômeno ocorre em latitudes muito elevadas, próximas ao Círculo Polar Ártico ou Antártico, permitindo que o Sol permaneça no céu por dias, semanas ou meses durante o verão e fique igual período sem aparecer durante o inverno.

nos referimos aqui corresponde à Eq. (7) quando deixamos quatro parâmetros livres. Estes parâmetros – período de rotação da Lua, período de mudança na inclinação do eixo, δ_1 e δ_2 – aparecem na Tabela 1, onde comparamos o resultado do ajuste da curva com os valores médios. Para ajustarmos estes parâmetros, fizemos

uso de outro *software* livre, o *SciDaVis* [9]. Este programa permite, dentre as mais diversas funções que um programa de gráficos dispõe, fazer um ajuste de curva. Na tabela 1, apresentamos e comparamos os valores médios com os valores obtidos através do ajuste da curva apresentada na Fig. 7.

Tabela 1 - Resultados obtidos através dos dados coletados pelo Stellarium e de um ajuste de curva, comparados com os valores médios.

Parâmetro	Valores médios	Ajuste da curva
Período de Rotação da Lua	27,3 dias	27,110 dias
Período de Precessão do Eixo	18,6 anos	18,476 anos
δ_1	-	-2821,72
δ_2	-	16,756

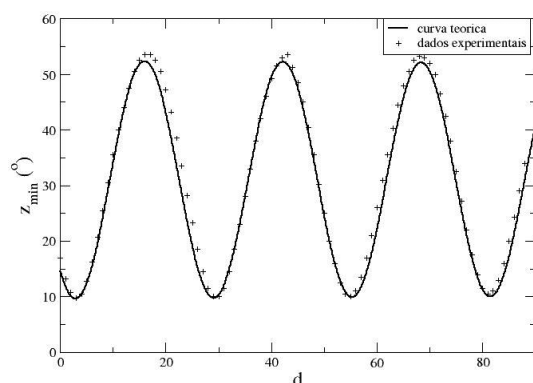


Figura 7 - Resultados obtidos através do programa Stellarium comparados à curva teórica apresentada na Eq. (7) para a distância zenital mínima como função do número de dias transcorridos.

4. Discussão

Apresentamos, ao longo deste texto, uma forma de descrever o movimento aparente da Lua, incluindo, além do seu movimento em órbita ao redor da Terra, o movimento de seu plano orbital. Comparamos os resultados de uma curva teórica, descrita por nós, com os resultados de um ajuste de curva realizado a partir de dados coletados com o *Stellarium*. Os resultados apresentaram uma pequena discrepância, a qual consideramos pequena ($< 2\%$). Esta variação pode ter as mais diversas fontes, desde a variação do ângulo de $5,15^\circ$ ($\pm 0,15^\circ$) até perturbações exercidas por outros corpos do Sistema Solar. Assim, consideramos o resultado plenamente satisfatório.

Com a expressão que obtivemos para o movimento aparente da Lua foi possível também determinar a atual inclinação de nosso satélite natural, em ao equador da Terra: inclinação da órbita da Lua ao redor da Terra ($< |5,15^\circ|$) com relação à eclíptica somada à inclinação de $23,5^\circ$ que a eclíptica possui com relação ao equador terrestre. Este número é obtido através da amplitude do movimento e o valor encontrado para o dia 28 de junho de 2012 foi de aproximadamente 22° .

É importante salientar que o movimento aparente da Lua apresenta grandes similaridades e também grandes diferenças com relação ao movimento aparente do Sol. A Lua, assim como o Sol, transita pelo céu atingindo diversas alturas, entretanto, enquanto o movimento do Sol é percebido ao longo de um ano, determinando as estações de primavera, verão, outono e inverno, o movimento da Lua é percebido em menos de um mês. É importante salientar que a variação da inclinação da órbita da Lua não possui nenhuma relação com suas fases (Cheia, Minguante, Nova ou Crescente), nem com as estações do ano. Estas diferenças/similaridades podem ser um ponto importante para tornar a discussão sobre a compreensão do universo mais profundas do que uma simples discussão sobre fases da Lua ou eclipse. Ainda, como o período de rotação e, conseqüentemente, de percepção de mudanças, da Lua é muito mais curto que o período de rotação da Terra ao redor do Sol, o professor tem a possibilidade de, em menos de um mês, ilustrar o que ocorre com o Sol ao longo de um ano (ver Fig. 1).

Referências

- [1] Brasil, *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* (MEC-SEMTEC, Brasília, 2002).
- [2] F.L. da Silveira, Revista Brasileira de Ensino de Física **23**, 300 (2001).
- [3] F.L. da Silveira, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **20**, 10 (2003).
- [4] F.L. da Silveira e A. Medeiros, Física na Escola **7**, 67 (2006).
- [5] F.L. da Silveira e M.F.O. Saraiva, Física na Escola **9**, 20 (2008).
- [6] C.E. Aguiar, D. Baroni, C. Farina, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 4301 (2009).
- [7] S.O. Kepler, M.F. Saraiva, Movimento do Sol. Disponível em http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aula_movsol.htm, acesso em 5/6/2012.

- [8] Stellarium. Disponível em: <http://www.stellarium.org/pt>, acesso em 4/6/2012.
- [9] B. Tilman, F. Knut, Scientific Data Visualization. Disponível em: <http://scidavis.sourceforge.net/>, acesso em 5/6/2012.