Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 1, 1605 (2013)
www.sbfisica.org.br

Princípios da óptica geométrica e suas exceções: Heron e a reflexão em espelhos

(Exceptions to optical geometrical principles: Heron and the reflection on mirrors)

Roberto de Andrade Martins[1], Ana Paula Bispo da Silva

Grupo de História da Ciência e Ensino, Departamento de Física, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, Brasil
Recebido em 14/5/2012; Aceito em 15/8/2012; Publicado em 1/3/2013

Heron de Alexandria utilizou o princípio do caminho mínimo para explicar a reflexão em espelhos planos e curvos. No caso dos curvos, o princípio apenas é válido para espelhos convexos. Este artigo apresenta um histórico do princípio de Heron e de suas críticas no período moderno, discutindo os limites de validade desse princípio.
Palavras-chave: Heron de Alexandria, história da óptica, reflexão em espelhos, princípio do caminho mínimo.

Hero of Alexandria used the principle of minimum path to explain reflection in plane and curved mirrors. In the case of curved ones, the principle is valid only for convex mirrors. This paper presents a history of Hero's principle and of its criticism during the early modern period, discussing the limits of legitimacy of the principle.
Keywords: Hero of Alexandria, history of physics, reflection in mirrors, principle of minimum path.

1. Introdução

A óptica geométrica se fundamenta em alguns princípios fundamentais, como a propagação retilínea da luz em meios homogêneos, a lei da reflexão em espelhos (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão) e a lei da refração (a razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é constante).

A lei da refração somente foi reconhecida na Europa no século XVII. Ela havia sido descoberta por Abu Sa'd al-'Ala' ibn Sahl no século X [1], tendo sido depois redescoberta por Thomas Harriot e por Willebrord Snell [2], e publicada em 1637 por René Descartes.[2] As duas primeiras leis da óptica geométrica eram conhecidas e utilizadas desde a Antiguidade – com uma pequena diferença em relação à sua formulação moderna, como veremos depois.

Todas as três leis podem ser consideradas como consequências de *condições de mínimo*.[3] Na Antiguidade, a lei de propagação retilínea e a lei da reflexão foram justificadas por Heron de Alexandria (aprox. 10-70 d.C.), a partir da ideia de que o caminho percorrido pela luz é o mais curto possível. No século XVII, a lei da refração foi justificada por Pierre de Fermat (aprox. 1601-1665), a partir do princípio de que a luz sempre percorre o caminho que exija o menor tempo. Pode-se considerar que o princípio proposto por Fermat inclui, como caso particular, o princípio de Heron, quando todos os fenômenos ocorrem em uma região com índice de refração constante.

A importância desses princípios de mínimo tem sido

[1]E-mail: roberto.andrade.martins@gmail.com.

[2]Nenhum desses autores (Ibn-Sahl, Harriot, Snell ou mesmo Descartes) descreveu a lei da refração do modo como ela é apresentada nos livros didáticos, relacionando os senos dos ângulos de incidência e de refração com os índices de refração dos meios transparentes. Tratava-se, na época, de relações de proporcionalidade entre grandezas geométricas envolvidas na refração da luz quando os ângulos variavam e os meios transparentes eram constantes.

[3]No século XVIII surgiu a proposta do *princípio de ação mínima* da mecânica, por Maupertuis, como uma consequência remota do trabalho de Heron, já que o ponto de partida das contribuições de Maupertuis foi a análise da refração luminosa, procurando as condições de mínimo que poderiam ser satisfeitas quando se admite a teoria corpuscular da luz.. Não podemos aqui, neste artigo, discutir as questões mais gerais relativas ao papel desempenhado pelos princípios variacionais na Física, que podem ser encontradas em outras fontes [3].

reconhecida pelos autores dos livros didáticos, que os descrevem e aplicam em uma série de problemas que os validam.[4] A partir da constatação de que eles são válidos *em alguns casos*, cria-se a impressão de que eles são *sempre válidos*, ou seja, que são princípios físicos gerais.[5] No entanto, isso não é verdade. Eles possuem exceções – como quase todas as regras. Conhecer essas exceções, ou seja, esclarecer os limites de validade do princípio de Heron e do princípio de Fermat é de grande importância para a correta compreensão do papel das condições de mínimo na física.

Neste trabalho iremos nos deter ao princípio de Heron, sem discutir a proposta de Fermat. Mostraremos a origem histórica dessa ideia, a partir da análise de uma das obras do autor, onde ele apresenta sua aplicação para justificar o caminho retilíneo da luz e a reflexão em espelhos planos e curvos. Discutiremos também os contra-exemplos apontados durante os séculos XVII e XVIII e analisaremos o que se pode concluir atualmente, levando em conta as condições de máximo e mínimo. Nosso objetivo é mostrar que, ainda que o princípio de Heron seja válido em várias situações, possui exceções; e que mesmo nos casos em que é válido, há várias outras hipóteses que devem ser explicitadas para a sua total compreensão.

2. A óptica geométrica na Antiguidade

Os mais antigos textos sobre óptica geométrica que conhecemos são atribuídos ao famoso matemático Euclides, de Alexandria (aprox. 325-265 a.C.). Uma dessas obras trata sobre o que atualmente denominamos *Perspectiva*, estudando as mudanças de aspecto dos objetos conforme sua posição; e a outra, *Catóptrica*, trata sobre espelhos planos e esféricos.[6] Nas duas obras, o autor assume que vemos os objetos através de *raios visuais* emitidos de nossos olhos e que vão até os objetos [10]. Essa é uma concepção muito estranha, para nós, mas que foi adotada por importantes pensadores da Antiguidade. Parece ter sido sugerida primeiramente por Empédocles, sendo aceita também por Platão e, depois, criticada por Aristóteles.

O princípio de propagação retilínea dos raios visuais é de importância fundamental nas duas obras de Euclides, e a lei da reflexão é de extrema importância na segunda, que trata sobre espelhos. Elas não são justificadas teoricamente por Euclides; são apenas utilizadas.

Três séculos depois de Euclides, Heron vai também estudar a óptica geométrica, empregando as mesmas leis da óptica, porém procurando explicar esses princípios. Como Euclides, ele aceitava que a visão era produzida por raios visuais; portanto, ele não descreveu o movimento e a reflexão *da luz* nos espelhos, e sim o movimento e a reflexão *dos raios visuais*. Apesar dos pressupostos iniciais de Heron não corresponderem ao que entendemos hoje sobre o processo de visão e de luz, essas diferenças não serão relevantes para a discussão do princípio e sua aplicabilidade. Embora não aceitemos tal hipótese, ela não torna esses trabalhos antigos inválidos, pois ao pensarmos sobre raios visuais saindo dos olhos para os objetos, ou raios luminosos indo dos objetos para os olhos, os caminhos são idênticos, mudando apenas o sentido do movimento.

3. Princípio de Heron

Heron, de Alexandria, foi um pensador da tradição helenística que viveu na cidade egípcia de Alexandria no século I da era cristã, no período Romano.[7] É conhecido popularmente pela descrição de uma máquina a vapor simples, chamada eolípila – uma palavra que vem de Æolos (o deus grego do vento) e de *pilos* (esfera), significando literalmente "a bola de Eolos" [12]. Heron não foi o inventor do dispositivo, pois ele já era conhecido por Vitruvius no século anterior [13].

Heron tinha um forte interesse por máquinas e dispositivos engenhosos. Porém, além disso, dedicou-se a investigações teóricas sobre a natureza dos gases (defendendo uma visão atomística), estudou os princípios fundamentais das máquinas, desenvolveu teoremas geométricos e pesquisou os fundamentos da óptica [11].

[4] Richard Feynman deu grande ênfase, em seu livro didático, ao uso de princípios variacionais na mecânica, na óptica e na mecânica quântica, tratando detalhadamente do princípio de Fermat (que inclui o de Heron como caso particular para os casos de um meio homogêneo) e suas aplicações [4]. Lá ele afirma que é incorreto descrever o princípio como se referindo ao tempo mínimo e indica que o tempo é *estacionário* e não mínimo; no entanto, não esclarece esse ponto e não dá contra-exemplos.

[5] Há autores, como Jay Newman, que afirmam explicitamente que o princípio de Fermat é um "princípio geral da óptica" [5], o que significa que seria sempre válido. Eugene Hecht afirma que o princípio de Heron "é verdadeiro para a reflexão em um material homogêneo" mas não vale para o caso da refração [6], o que parece indicar que *apenas na refração* o princípio de Heron deixaria de ser verdadeiro, sendo no entanto válido para todos os casos de reflexão. Raymond Servay afirma que "Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês, enunciou um princípio geral que pode servir para determinar a trajetória dos raios luminosos" [7]. Ao dizer que esse é um "princípio geral", e não fornecer qualquer exceção, o autor transmite aos leitores a impressão de que o princípio seria válido sempre. Há outras obras didáticas que apresentam o princípio de Heron (ou de Fermat), de caminho mínimo (ou de tempo mínimo), dão aplicações, mas não falam sobre exceções [8, 9], o que pode levar os leitores a pensarem que se trata de princípios gerais, válidos sempre.

[6] Há, no entanto, autores que acreditam que o verdadeiro autor dessa segunda obra foi Theon, de Alexandria – e não Euclides.

[7] A época em que Heron viveu foi discutida por muito tempo, até que Otto von Neugebauer, analisando os detalhes de um eclipse da Lua decrito por Heron no capítulo 35 de sua obra Dioptra, estabeleceu que esse eclipse ocorreu no ano 62 d.C. [11]. Não há dúvidas, atualmente, de que ele viveu no primeiro século da era cristã, embora as datas de nascimento e morte sejam incertas.

O princípio óptico do caminho mais curto foi proposto por Heron de Alexandria no seu livro *Katoptrika*.[8] Denominava-se "catóptrica" a parte da óptica que lida com os fenômenos da reflexão e das imagens formadas por espelhos. Na época, já eram conhecidos espelhos especiais, que produziam efeitos notáveis, como os descritos por Heron [14]:

> Por ela [pela catóptrica], realmente, são construídos espelhos que mostram a direita à direita, e a esquerda à esquerda, enquanto os espelhos comuns mostram os lados opostos, contra a natureza. Através deles é também possível ver nossas costas, e também nos vermos de cabeça para baixo, com três olhos e dois narizes, e o rosto retorcido, como se sentisse dor. [...]

Antes de abordar os fenômenos de reflexão, Heron afirma que os raios visuais viajam em linhas retas, e afirma que eles têm um movimento reto porque seria o mais curto e o mais rápido [14]:

> Vemos que a visão segue linhas retas a partir dos olhos, o que pode ser assim considerado. Tudo aquilo que se move com velocidade contínua, move-se em linha reta, como vemos a flecha lançada pelo arco. Por causa da violência com que é impelida, ela tenta se mover em uma linha com a menor distância possível, não tendo tempo para demoras, ou seja, para percorrer uma linha com maior distância, o que não é permitido pela violência transmitida. Assim, por causa de sua velocidade, o objeto tenta se mover do modo mais curto. E a menor linha entre dois extremos é a reta.

Notemos que a ideia de que uma flecha percorre o caminho mais curto está associada, no pensamento de Heron, com as ideias de *violência* e de *rapidez*. Talvez Heron estivesse comparando o caso de uma flecha lançada por um arco com um objeto lançado a baixa velocidade pela mão de uma pessoa, que não anda em linha reta e cai rapidamente ao solo.

Acreditava-se que os raios visuais, além de se moverem em linha reta, tinham uma velocidade infinita, como mostra Heron, partindo da ideia da Antiguidade de que a visão era proveniente dos raios emanados pelo observador, e não pelo objeto [14].

> Os raios emitidos por nós se movem com uma velocidade infinita, como será mostrado. Pois se, depois de fechar os olhos nós olhamos para o céu, [os raios] não demoram nenhum tempo para atingir o céu. Logo que olhamos, vemos os astros, embora a distância seja infinita, por assim dizer. E mesmo se essa distância fosse maior, aconteceria a mesma coisa, e assim é claro que os raios são emitidos com velocidade infinita. Por causa disso, eles não têm interrupção, nem desvio, nem quebra, mas se movem pelo caminho mínimo, ou seja, por uma reta.

Aqui, ele utilizou uma ideia semelhante à anterior: é por causa da grande velocidade dos raios visuais que eles não se desviam, percorrendo o caminho mínimo, que é uma reta. Se a velocidade dos raios é infinita, este é um motivo ainda mais forte do que no caso das flechas, para que eles se movam em linha reta.

4. Heron e a reflexão em espelhos

Em seguida, Heron abordou a questão da reflexão dos raios visuais em espelhos, e sua causa. A interação entre os raios e um espelho plano é da mesma natureza da interação entre dois corpos [14]:

> A natureza dos corpos polidos é que sua superfície é compacta. Os espelhos, antes de serem polidos, possuem diversos poros, nos quais os raios incidentes não podem ser repelidos. Mas esses espelhos são polidos por atrito, e assim os lugares vazios são preenchidos por uma substância sutil. Então os raios incidentes sobre a superfície compacta são refletidos. É realmente como uma pedra que, lançada com violência contra um corpo compacto, como uma tábua ou um muro, é refletida, mas contra um [corpo] mole, como lã ou algo semelhante, fica parado. [...] Da mesma forma, os raios que são emitidos por nós com grande velocidade, como foi demonstrado, ao atingir corpos compactos são refletidos.

Chegamos então ao princípio da reflexão dos raios [14]:

> Portanto, consideramos ter sido suficientemente demonstrado por que aqueles que incidem sobre corpos polidos são refletidos. Agora, pelo mesmo raciocínio, ou seja, por causa da velocidade de sua incidência e reflexão, mostraremos que os ângulos de reflexão são iguais nos espelhos planos e circulares. Pois é necessário que tentem percorrer as menores retas. Digo, portanto, que de todos os raios incidentes e refletidos, os menores são aqueles que formam ângulos iguais

[8] O texto grego da *Katoptrika* foi perdido, existindo apenas uma tradução latina medieval. Esse texto era atribuído a Ptolomeu, mas atualmente se aceita que é de autoria de Heron [11].

> nos espelhos planos e circulares; e, portanto, a reflexão com ângulos iguais é racional.

Note-se que Heron se refere tanto a espelhos planos quanto espelhos curvos. De acordo com tudo o que foi exposto até aqui, para o espelho curvo devem valer os mesmos argumentos, ou seja, a trajetória deve ser a mais curta possível e a velocidade infinita, já que a natureza da interação é a mesma.

4.1. Espelhos planos

A seguir, Heron aplicou o princípio da menor distância para espelhos planos. A demonstração de Heron será reproduzida aqui, porém de uma forma simplificada, sem seguir literalmente o modo como ele a apresenta.

Na Fig. 1, a linha HE representa um espelho plano, G o olho e D o ponto visto pela pessoa que está em G. Heron assume que GA e AD formam ângulos iguais com o espelho, e prova que a distância $GA+AD$ é menor que qualquer outra linha $GB+BD$ (com B arbitrário) unindo o olho ao espelho e ao objeto que é visto.

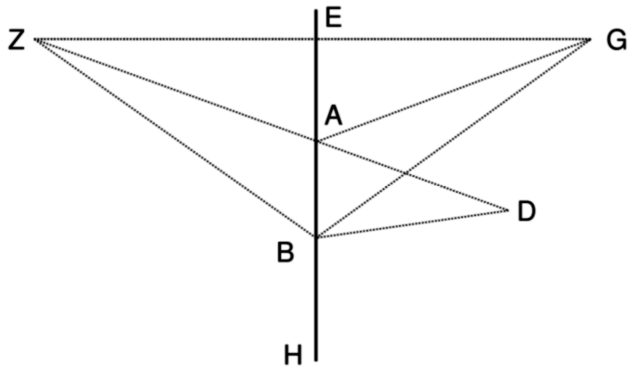

Figura 1 - Diagrama de Heron para analisar a reflexão em espelhos planos. EH é um espelho, G é o olho, e D o objeto visto. Quando os ângulos de incidência e reflexão são iguais, o caminho visual GAD é o mais curto.

Para provar isto, Heron desenha a linha GE perpendicular ao espelho, e a prolonga até o ponto Z, fazendo $GE=EZ$. Então ele liga Z a D e também Z a B. Os triângulos ZEA e GEA são iguais, por construção. Portanto, $GA+AD=ZA+AD$. Ainda, o ângulo ZAE é igual a GAE, e portanto é igual a BAD. Portanto, ZA e AD estão numa linha reta. Assim, $GA+AD=ZD$. Sabe-se que em qualquer triângulo um dos lados é sempre menor que a soma dos outros dois. Portanto, no triângulo ZDB, $ZD < ZB+BD$. Mas $ZB=GB$, e $ZD < GB+BD$. Assim, $GA+AD < GB+BD$, como Heron queria provar.

Portanto, no caso dos espelhos planos, quando o raio visual incidente e o refletido formam ângulos iguais com o espelho, o caminho entre o objeto e o olho do observador é o mais curto possível. Seria possível fazer também a prova inversa, ou seja, a de que quando o caminho é o mais curto possível, os dois ângulos são iguais; mas Heron não apresenta essa complementação.

No ensino de óptica, costumamos atualmente medir os ângulos de incidência e de reflexão formados pelos raios luminosos *com a reta normal ao espelho*. Note-se que Heron se referiu aos ângulos que os raios formam *com o espelho*, o que é muito mais intuitivo, para o caso do espelho plano. No caso do espelho curvo, porém, é mais conveniente falar sobre os ângulos formados pelos raios com a reta normal à superfície, para não ser necessário tratar de ângulos com lados curvos.

4.2. Espelhos curvos

Depois de analisar o espelho plano, Heron discutiu o caso da reflexão em um espelho esférico (ou "circular", como ele o chama). A demonstração é muito semelhante à do espelho plano [14].

Na Fig. 2, seja BAH a superfície do espelho, G o olho e D o objeto que é visto. A é um ponto sobre o espelho, de tal modo que GA e AD formam ângulos iguais com sua superfície. Seja B qualquer outro ponto sobre a superfície do espelho. Heron quer provar que a trajetória $GA+AD$ é mais curta do que qualquer outra que vá do olho até o espelho e do espelho até o objeto, como a trajetória $GB+BD$, por exemplo.

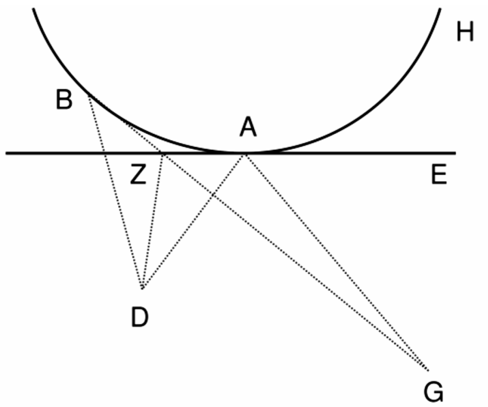

Figura 2 - Diagrama de Heron para reflexão em espelhos convexos. BAH é um espelho curvo, G é o olho, e D o objeto visto. Quando os ângulos de incidência e reflexão são iguais, o caminho visual GAD é o mais curto.

Para provar isto, Heron traça a linha EZ tangente ao espelho curvo no ponto A. Se os ângulos formados pelos raios visuais com a superfície curva são iguais, então os ângulos formados pelos raios com a tangente também são iguais.[9] Consideremos agora o ponto Z, onde a reta GB corta essa tangente. Se consideramos EZ como um espelho plano, então, pela primeira demonstração, sabemos que $GA+AD$ é menor que $GZ+ZD$. Mas, no triângulo BZD, ZD é menor que $ZB+BD$, porque um dos lados de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois. Por-

[9]Este é um ponto delicado da análise de Heron. Atualmente, consideraríamos que o ângulo entre a tangente e a circunferência é nulo; na época, considerava-se que não era nulo, pois eram levados em conta os ângulos curvilíneos.

tanto, $ZD < ZB+BD$, e adicionando GZ a ambos os lados da desigualdade, temos $GZ+ZD < GZ+ZB+BD = GB+BD$. Mas $GA+AD < BZ+ZD$, portanto $GA+AD < GB+BD$, como Heron queria provar.

4.3. Espelhos côncavos

As figuras e a análise de Heron pressupõem que o espelho curvo é *convexo*. De fato, a prova apenas se sustenta se o ponto B está mais distante do olho do que o ponto Z. Mas se o espelho fosse côncavo, a situação seria diferente, o ponto B estaria entre G e Z, e nada poderia ser concluído.

Algumas traduções do texto de Heron introduziram esta condição de que o espelho deveria ser convexo [15], mas o texto original contém apenas a referência a *espelhos planos e circulares*. Portanto, parece que Heron não percebeu que a prova não poderia ser aplicada no caso de espelhos côncavos.

Uma vez que Heron não excluiu o caso dos espelhos côncavos, muitos de seus leitores foram levados a concluir que em *todos* os casos os raios visuais seguem o caminho mais curto. Morris Klein, por exemplo, escreveu: "Heron aplicou este princípio do caminho mais curto e mínimo tempo a problemas de reflexão de espelhos esféricos côncavos e convexos" [15].

Muitos autores que escreveram sobre óptica após Heron – como o autor medieval Erazmus Witelo, por exemplo – aceitaram o princípio da distância mais curta como um axioma geral e verdadeiro: "Natura agit in omnibus secundum linea breviores" – isto é, "A natureza age sempre por linhas mais curtas" [16]. Quando Witelo apresentou a análise de reflexão de Heron, ele mencionou explicitamente as palavras *espelhos convexos*, mas não comentou o que acontece no caso de espelhos côncavos.

5. Críticas ao princípio de Heron

Não localizamos nenhum autor antigo ou medieval que criticasse o princípio do caminho mínimo. No entanto, na segunda metade do século XVII, muitos autores notaram que o princípio de Heron não se aplica aos espelhos côncavos.

5.1. A análise de Andreas Tacquet

Uma demonstração apareceu na publicação póstuma do padre jesuíta belga Andreas Tacquet (1612-1660), reconhecido por seus trabalhos em matemática [17]. Na obra intitulada "Catoptrica", publicada em 1669, o autor descreveu as propriedades conhecidas dos espelhos e o princípio da igualdade dos ângulos de incidência e reflexão em superfícies planas e curvas, tanto côncavas como convexas. Ele discutiu o princípio de Heron, mas negou que fosse universal, pois não é válido para espelhos côncavos. Tacquet apresentou uma análise detalhada dos espelhos plano, convexo e côncavo, mostrando que nos dois primeiros casos o princípio vale, mas no terceiro não se aplica [18].

Tanto para o espelho plano como para o convexo, a abordagem de Tacquet seguiu a de Heron, e não a repetiremos aqui. Vamos descrever apenas sua análise de espelhos côncavos.

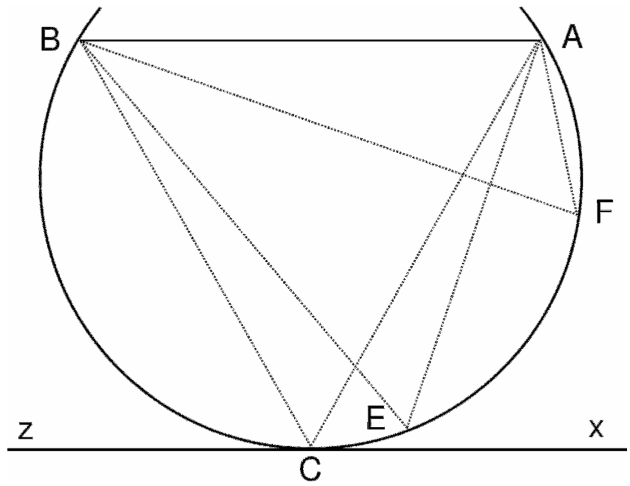

Figura 3 - Andreas Tacquet mostrou que em espelhos côncavos, mesmo que os ângulos de incidência e reflexão sejam iguais, algumas vezes o caminho seguido pela luz não é o mais curto.

Vamos considerar o espelho côncavo ACB (Fig. 3), onde ZX é uma linha reta paralela a AB, sendo tangente ao espelho no ponto C. Tacquet indicou que a luz vindo de A para B será refletida em C de tal forma que os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Esta conclusão pode ser obtida considerando a simetria da situação, mas Tacquet não fez menção a propriedades de simetria.

Neste caso, se comparamos o comprimento do caminho de luz $AC+CB$ com qualquer outro caminho que a luz poderia seguir em linha reta de A para o espelho e então para B (tal como $AE+EB$, ou $AF+FB$), é possível provar que $AC+CB$ é o *mais longo*, não o mais curto..

Tacquet não afirmou que a luz sempre segue o caminho mais longo; ele exibiu *uma situação* em que isto acontece, e concluiu que o axioma do caminho mais curto da luz não pode ser considerado universal.

Porém, mesmo no caso de espelhos côncavos, há situações em que a luz segue o caminho mais curto. Se os pontos extremos A e B não estão na superfície do espelho, mas em qualquer outra posição como na Fig. 4, o caminho seguido pela luz pode ser o mais curto.

Tacquet não analisou o caso geral dos espelhos côncavos nem determinou em que casos o princípio de Heron é válido ou inválido. Isto foi feito por Patrick d'Arcy, um século depois.

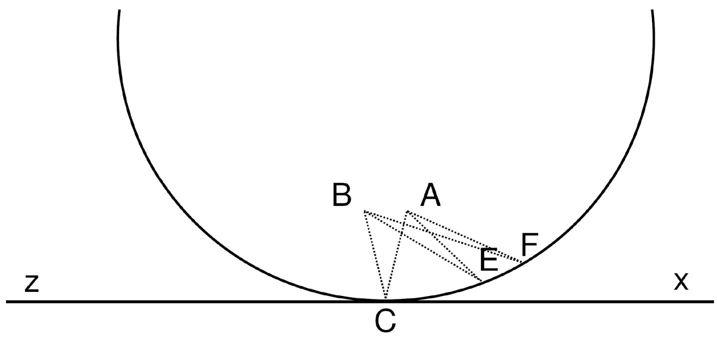

Figura 4 - No caso de espelhos côncavos, algumas vezes o caminho seguido pela luz pode ser o mais curto.

5.2. Patrick d'Arcy e os espelhos côncavos

Patrick d'Arcy (1723-1719) era um nobre irlandês que desenvolveu pesquisas em várias áreas. No período em que estava estudando a reflexão em espelhos, acabou por se envolver na controvérsia sobre o princípio de ação mínima de Maupertuis [19]. Em sua análise [20], d'Arcy utilizou uma propriedade bem conhecida da elipse (Fig. 5a). A soma das distâncias dos focos A e B de uma elipse a qualquer ponto sobre a elipse – como os pontos C ou D – é constante, sendo igual ao eixo maior da elipse: $AC+BC = AD+BD = 2a$. Além disso, as retas traçadas de A e de B até um ponto qualquer da elipse formam ângulos iguais com a tangente à curva naquele ponto. Portanto, se consideramos a elipse como um espelho, a luz emitida de um dos focos é refletida no espelho e retorna ao outro foco percorrendo sempre a mesma distância.

Vamos comparar a elipse com outras curvas, considerando que todas elas representam espelhos. Consideremos um ponto C comum a todas as curvas e no qual todas elas possuem a mesma tangente, de tal modo que a luz emitida de A seja refletida nesse ponto até B, tanto no caso da elipse quanto no caso das outras curvas. Se a curva é tangente à elipse em C e todos os outros pontos estão fora da elipse (Fig. 5b), então a soma das distâncias dos focos A,B a qualquer outro ponto desta curva será maior que $AC+CB$, ou seja, o caminho seguido pela luz de A para o espelho (em C) e para B será um mínimo. Porém, se a curva é tangente à elipse em C e todos os outros pontos estão dentro da elipse (Fig. 5c), então a soma das distâncias do foco a qualquer outro ponto desta curva será menor que $AC+CB$, ou seja, o caminho seguido pela luz de A para o espelho (em C) e para B será um máximo.

Portanto, d'Arcy determinou em quais casos o princípio de Heron é válido, e em quais ele é inválido. Fica claro, portanto, que não se deve assumir como uma verdade universal que a luz sempre segue o caminho mínimo, nos fenômenos de reflexão por espelhos.

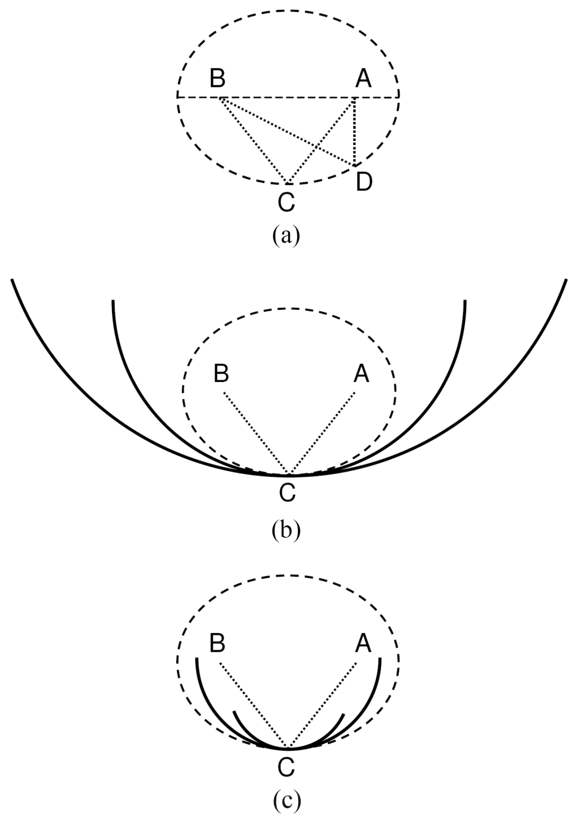

Figura 5 - (a) A soma das distâncias entre os focos A, B de uma elipse e qualquer ponto da curva é sempre a mesma. Para algumas curvas (b), o caminho ACB será o mais curto, mas para outras curvas (c) o caminho será o mais longo.

6. Extremos absolutos e condicionais

Os contra-exemplos de Tacquet e d'Arcy ao princípio de Heron provam, de fato, que algumas vezes os raios refletidos não seguem o caminho mais curto. Aparentemente, eles mostram que em alguns casos o caminho é um *máximo* em vez de um *mínimo* e alguns autores [21] mencionam isso como uma generalização do princípio de Heron (ou de Fermat).[10] Será isso válido, de fato?

[10]Bruno Rossi afirma que "em todos os casos (incluindo reflexão e refração em superfícies curvas e propagação em meios não homogêneos) a luz viaja de um ponto fixo até outro seguindo uma trajetória cujo caminho óptico é máximo ou mínimo, comparado com os caminhos vizinhos" [22]. Freeman e Hull afirmam que "algumas vezes, quando a superfície óptica é curva, o tempo pode ser um máximo em vez de um mínimo, mas é sempre um ou o outro" [23].

Haverá casos em que o caminho percorrido pela luz é o maior possível?

Vamos considerar o caso já discutido de uma curva contida na elipse. É possível provar que BC+CA é igual a BD+DA, e maior que BD'+$D'A$ (Fig. 6a), *mas apenas supondo* que a luz se move ao longo de trajetórias retas entre A,B e o espelho. Entretanto, não podemos supor que a luz *sempre* deveria viajar ao longo de linhas retas. Se retirarmos esta condição, é muito fácil encontrar caminhos curvos diferentes, de A para o espelho e então para B, tal como AE+EB, com um comprimento maior que BC+CA (Fig. 6b). Portanto, BC+CA não é um *máximo absoluto*.[11]

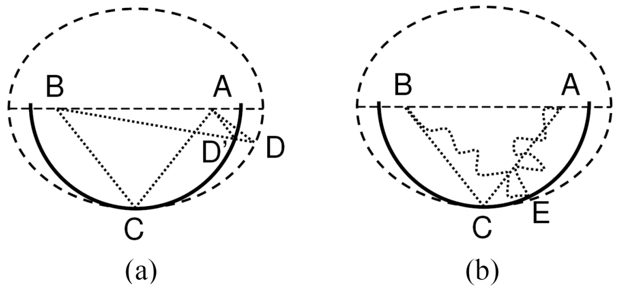

Figura 6 - (a) Nesta figura, AC+CB=AD+DB¿AD'+$D'B$. Porém, AC+CB não pode ser considerado um máximo absoluto, pois (b) sempre possível encontrar caminhos curvos tais como AE+EB mais longos que AC+CB.

O leitor pode pensar que o caminho escolhido AE+EB na Fig. 6b é um exemplo exagerado e desesperado dos autores, e que não é *natural* para a luz. O caminho mais *natural* para a luz seria seguir em linha reta entre os pontos A, Be o espelho, já que não há impedimentos.

Algumas vezes a luz se move em trajetórias curvas (por exemplo, quando ela atravessa meios não homogêneos como a atmosfera da Terra) e, portanto, a exclusão de trajetórias curvas não pode ser uma hipótese *a priori*. Mas o caso aqui analisado é diferente. Estamos considerando um meio homogêneo, portanto não se trata de um caso como o da atmosfera. Além disso, não estamos *pressupondo as propriedades da luz* e sim querendo *deduzir as propriedades da luz*. Nessa situação, não podemos *pressupor* que seria impossível a luz seguir um caminho tortuoso e, portanto, essa alternativa deve ser levada em consideração.

Contudo, poderíamos restringir os caminhos *alternativos* adicionando-se uma condição explícita como, por exemplo, impondo a condição de que apenas serão considerados caminhos que sejam retos, exceto quando a luz encontra algum obstáculo [26]. Com ou sem a adição explicita da condição, é inevitável aceitar que as situações em que a luz segue um caminho máximo são *condicionais* e não *absolutas*.

Podemos agora questionar: quando o princípio de Heron é obedecido, seriam essas situações de mínimo *absoluto*, ou há condições tácitas assumidas na prova?

Geralmente, qualquer demonstração ou prova tem algumas hipóteses implícitas. Assumimos que a luz segue linha reta em estudos sobre perspectiva, mas isto geralmente é uma hipótese implícita. Em todas as demonstrações apresentadas neste trabalho, assumimos a geometria euclidiana e, por este motivo, há de fato, um caminho mínimo. Entretanto, é possível escolher uma geometria não-euclidiana de tal forma que o caminho reto entre os pontos A e B não seja um mínimo, ou seja, uma geometria tal que caminhos curvos podem ser mais curtos do que uma reta entre eles (ver Apêndice). Como a escolha da geometria influi no resultado, qualquer prova de caminho mínimo é também *condicional*, e não *absoluta*, assim como no caso do caminho máximo.

7. Considerações finais

Apesar de ser apresentado muitas vezes como uma lei física inquestionável em obras didáticas, conforme foi mostrado, o princípio de Heron, que afirma que a luz percorre o caminho mais curto entre dois pontos, procurando assim explicar a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão em espelho, apresenta exceções. Uma das exceções se refere ao caso de espelhos côncavos, e foi apontada por estudiosos dos séculos XVII e XVIII.

No entanto, seja no caso do caminho mais curto ou no caso do caminho mais longo, são consideradas hipóteses implícitas que tornam o princípio condicionado, como o fato de supormos válida a geometria euclidiana.

Assim, assumindo a geometria euclidiana e supondo uma região homogênea opticamente, a versão moderna do princípio de Heron estabelece que o comprimento do caminho $\int ds$ seguido pelo raio de luz entre dois pontos dados é *estacionário*, quando comparado aos caminhos próximos. Em notação matemática,

$$\delta \int_A^B ds = 0. \quad (1)$$

Considerar a Eq. (1) como versão final do princípio de Heron, e desconsiderar as questões levantadas anteriormente, implica em apresentar uma visão distorcida da física, que passa a ser considerada pelos alunos como um conjunto de fórmulas "mágicas" de origem desconhecida. A análise de contra-exemplos como os apresentados aqui, permite a discussão da complexidade das teorias, leis e princípios físicos, e levanta questionamentos sobre a necessidade de revisão de conceitos simplistas, como o de "princípios" da física apresentados sem discussão de seus limites. Consideramos a discussão

[11]Constantin Carathéodory analisou as condições de validade do princípio de Fermat (que se reduz ao princípio de Heron no caso de meios homogêneos) e estabeleceu que o caminho óptico nunca é um máximo absoluto [24, 25].

detalhada desses aspectos como muito útil para uma compreensão mais profunda da física.

Apêndice

Apresentamos aqui um exemplo de uma métrica não-euclidiana, no plano, no qual uma trajetória em linha reta não é o caminho mais curto entre dois pontos.

Desejamos caracterizar a métrica de um espaço não-euclidiano, em uma superfície bidimensional, descrita pelas coordenadas $x - y$, de tal forma que o caminho entre dois pontos A e B situados sobre o eixo x seja *máximo* quando esse caminho é uma reta entre os dois pontos (Fig. 7). Não se trata de um máximo *absoluto*, pois sempre é possível encontrar caminhos mais longos do que qualquer caminho dado; mas um máximo *relativo*, quando se comparam *famílias de curvas* que tendem a uma reta, seguindo um procedimento que será exposto adiante.

Suponhamos que o elemento de linha seja do tipo

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2).f(y).$$

Para que a trajetória ao longo do eixo x seja o caminho máximo, a função $f(y)$ deve ter seu valor máximo para $y = 0$, ou seja, sobre o eixo x. Vamos supor que essa função é par, ou seja, $f(y) = f(-y)$, para estabelecer uma métrica que seja simétrica em relação ao eixo x. Supomos, também, que $f(0) = 1$, ou seja, sobre o eixo x as distâncias possuem o mesmo valor que se a métrica fosse euclidiana.

Vejamos, agora, quais as limitações que devem ser impostas sobre $f(y)$.

Consideremos dois pontos A e B sobre o eixo x, e uma curva $y = g(x)$ ligando os dois pontos (Fig. 7).

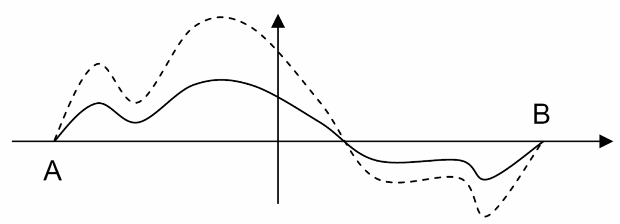

Figura 7 - Em certas métricas não-euclidianas, o comprimento da trajetória retilínea entre dois pontos A e B pode ser maior do que o comprimento de uma curva arbitrária entre esses dois pontos, quando a curva tende à reta considerada.

O comprimento total S da curva é dado por

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \left[\left(dx^2 + dy^2\right) f(y)\right]^{1/2} =$$

$$\int_A^B \left[\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) f(y)\right]^{1/2} dx$$

Suponhamos uma outra curva, semelhante à anterior, na qual todos os valores da coordenada y são iguais aos valores anteriores multiplicados por um mesmo fator n, ou seja, $y' = n.g(x)$. O comprimento S' dessa nova curva será

$$S' = \int_A^B \left[\left(dx^2 + n^2 dy^2\right) f(ny)\right]^{1/2} =$$

$$\int_A^B \left[\left(1 + n^2 \frac{dy^2}{dx^2}\right) f(ny)\right]^{1/2} dx.$$

Desejamos que, à medida que n tenda a zero, a integral S' seja *maior* do que a integral S. Ora, o primeiro fator do integrando, que é

$$\left(1 + n^2 \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2}$$

evidentemente diminui quando n tende a zero. Então, para que S' aumente quando n tende a zero, o segundo fator $[f(ny)]^{1/2}$ deve aumentar quando n tende a zero, e o aumento desse fator deve superar a redução do primeiro fator.

Como $f(y)$ se torna 1 quando y=0, podemos considerar que, para pequenos valores de y, essa função pode ser aproximada por $f(y) \approx 1\text{–}h(y)$, e nesse caso de pequenos valores de y, $[f(ny)]^{1/2} \approx [1\text{–}h(ny)]^{1/2}$.

Consideremos que, no intervalo considerado, os valores de y para a curva são todos finitos; e consideremos sucessivas curvas semelhantes a esta, com valores decrescentes de n, tendendo a zero. No limite, a curva se identifica com a reta $y = 0$, ou seja, com uma seção do eixo x. À medida que n tende a zero, os valores de ny se tornam muito menores do que 1. Queremos que a integral atinja o valor máximo quando n se torna zero. Para isso, é necessário e suficiente que $h(ny)$ tenda mais lentamente a zero do que $n^2(dy/dx)^2$, quando $n << 1$. Portanto, em primeira aproximação, $h(ny)$ deve ser uma função semelhante a $(ny)^k$, onde $k < 2$. Uma solução simples é obtida fazendo $k = 1$, mas tomando o cuidado de utilizar $|y|$ em vez de y, para que a função seja par. Assim, se a métrica for dada por

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2).[1\text{–}|y|/H]$$

todas as condições serão satisfeitas, e o caminho em linha reta entre A e B será mais longo do que o caminho ao longo de uma curva diferente – qualquer que ela seja – quando a curva tende à reta $y = 0$, pelo processo acima descrito.

É fácil, a partir desta análise, propor outras métricas que têm a mesma propriedade, ou analisar se uma dada métrica tem essa propriedade.

Agradecimentos

Um dos autores (RAM) agradece o apoio recebido por parte da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), sem o qual teria sido impossível a realização desta pesquisa.

Referências

[1] R. Rashed, Isis **91**, 464 (1990).

[2] A. Kwan, J. Dudley and E. Lanz, Physics World **15**, 64 (2002).

[3] I.C. Moreira, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 172 (1999).

[4] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1996), v. 1, cap. 26.

[5] J. Newman, *Physics of the Life Sciences* (Springer, New York, 2008), p. 507.

[6] E. Hecht, *Schaum's Outline of Optics* (McGraw-Hill Professional, New York, 1975), p. 36.

[7] R.A. Servay, *Physique 3: Optique et Physique Moderne* (De Boeck Supérieur, Laval, 1992), 3ª ed., p. 171.

[8] N. Mehta, *Applied Physics for Engineers* (PHI Learning, New Delhi, 2011), p. 148.

[9] L.S. Lerner, *Physics for Scientists and Engineers* (Jones & Bartlett Learning, London, 1997), v. 2, p. 968.

[10] D.C. Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindi to Kepler* (University of Chicago Press, Chicago, 1981), p. 12.

[11] A.G. Drachmann, in: *Dictionary of Scientific Biography*, ed. por C.C. Gillispie (Scribner's Sons, New York, 1972), v. 6, p. 310-314.

[12] E. Papadopoulos, History of Mechanism and Machine Science **1**, 1 (2007).

[13] P. Keyser, Archive for History of Exact Sciences, **44**, 107 (1992).

[14] Heron, de Alexandria, *Heronis Alexandrini Opera Quae Supersunt Omnia, v. II, Mechanica et Catoptrica*, edited by L.L.M. Nix and W. Schmidt (B.G. Teubner, Stuttgart, 1900).

[15] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University Press, Oxford, 1990), v. 2, p. 580.

[16] E. Witelo, *Vitellonis Thuringopoloni Opticae Libri Decem* (Episcopios, Basel, 1572), p. 192.

[17] A. Tacquet, *Opera Mathematica* (Iacobum Meursium, Antuerpia, 1969).

[18] A. Tacquet, *Opera Mathematica* (Iacobum Meursium, Antuerpia, 1969), p. 218-219.

[19] R.A. Martins and A.P.B. Silva, Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 455 (2007).

[20] P. d'Arcy, Histoire de l'Académie Royale des Sciences 531 (1753).

[21] C.G. Gray e E.F.Taylor, American Journal of Physics **75**, 434 (2007).

[22] B. Rossi, *Fundamentos de Óptica* (Editorial Reverté, Barcelona, 2003), p. 64.

[23] M.H. Freeman and C.C. Hull, *Optics* (Butterworth-Heinemann, New York, 2003), 11ª ed., p. 19.

[24] C. Carathéodory, *Geometrische Optik* (Springer, Berlin, 1937), p. 10-11.

[25] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7ª ed., p. 137.

[26] F.A. Jenkins and H.E. White, *Fundamentals of Optics* (McGraw Hill, New York, 1976), 4th ed., p. 15.