Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 1, 1602 (2013)
www.sbfisica.org.br

A dinâmica na geometria (o cálculo da força centrífuga feito por Huygens)

(The dynamics in the geometry (Huygens's calculation of the centrifugal force))

Penha Maria Cardozo Dias[1]

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Recebido em 4/6/2012; Aceito em 26/9/2012; Publicado em 18/2/2013

Argumento que Christiaan Huygens pertence a uma mesma linha de pensamento dinâmico, juntamente com Isaac Newton e Leonhard Euler. Eles usaram o teorema de Galileu Galilei sobre a queda livre, como um substituto da dinâmica; a partir daí, foram capazes de formular categorias dinâmicas mais gerais, amalgamando a mecânica e a geometria de infinitesimais em uma "física geométrica". Embora Huygens seja bem estudado por historiadores, não acredito que devida ênfase tenha sido dada aos fundamentos da física. Para analizar a contribuição desse tipo de pensamento ao estabelecimento das categorias da dinâmica, sigo, passo a passo, os cálculos da força centrífuga, feitos por Huygens.
Palavras-chave: Huyghens, força centrífuga, teorema da Galileu, processos virtuais.

I claim that Christiaan Huygens, Isaac Newton and Leonhard Euler belongs in a same line of thinking in dynamics. They used Galileo Galilei's theorem on the free fall as a surrogate for dynamics; from there, they were able to formulate more general dynamic categories, blending mechanics and the geometry of infinitesimals in a "geometrical physics". Although Huygens has been studied by historians, I do not believe that due emphasis has been given to the foundations of physics. In order to analyze the import of his kind of thinking to the establishment of the categories of dynamics, I follow step by step Huygens's calculation of the centrifugal force.
Keywords: Huyghens, centrifugal force, Galileo's theorem, virtual processes.

1. Introdução

Em seu livro *Two New Sciences* [1], Galileu Galilei deduziu expressões para descrever um movimento uniformemente acelerado e as aplicou à queda vertical dos corpos na superfície da Terra. Ele parte do teorema medieval da "velocidade média" para provar (em termos modernos) que altura $\propto$ tempo^2; então, como corolário, ele deduz altura $\propto$ (módulo da velocidade)^2.

O teorema da velocidade média foi formulado no século XIV, em um contexto diferente do de Galileu: os medievais tratavam o problema do aumento ou da remissão de qualidades [2, p. 185-200], [3, p. 199-241]. Entretanto, a aplicação do teorema para descrever a queda dos corpos foi feita por Galileu, 200 anos depois [4, p. 203]. O teorema medieval diz que a distância percorrida em um movimento uniformemente acelerado (uniformemente diforme, na linguagem medieval) é igual à distância percorrida em um movimento uniforme feito com uma velocidade igual à velocidade média do movimento acelerado.

Isaac Newton e Leonhard Euler usaram o teorema de Galileu como um substituto para a dinâmica. Usando o teorema, foram capazes de formular princípios dinâmicos gerais [5, 6]:

1. Euler fundamentou a mecânica analítica em um novo princípio, que é o teorema de Galileu, na forma $v^2 \propto h$.
2. As equações diferenciais do movimento foram obtidas por Euler, a partir do teorema de Galileu.
3. Na estrutura conceitual da mecânica, desenvolvida no *Philosophiae Naturalis Principia Matematica*, o movimento em uma órbita é decomposto em dois outros: um movimento inercial ao longo da tangente e um movimento radial, uniformemente acelerado, em direção ou ao centro do círculo osculador (movimento circular) ou ao centro de forças (movimento sob força central).

Um ponto que emerge dessa fundamentação é o quanto a dinâmica deve à geometria. Uma crítica sofrida pela mecânica desenvolvida por Newton, no *Principia*, foi a suposta inferioridade do método geométrico

[1]E-mail: penha@if.ufrj.br.

(expressão de Newton) em relação ao método analítico (expressão de Newton), de Gottfried Wilhelm Leibniz. No entanto, se o algorítmo de Leibniz tornou os cálculos exequíveis e reduziu, falando simplificadamente, a mecânica à solução de equações diferenciais, parece que o que se ganhou em operacionalidade, perdeu-se em conceitualização, a ponto de parecer que "o bebê foi jogado fora, junto com a água do banho".

Neste artigo, mostro que Christiaan Huygens se insere na linha de pensamento dinâmico, de Newton e Euler, em que resultados gerais são obtidos do teorema de Galileu. Para fazê-lo, sigo, passo a passo, a derivação da força centrífuga, feita por Huygens. Eu já havia mostrado, em [5], uma paráfrase moderna construída em [2], do cálculo da força centrífuga, feito por Huygens; essa paráfrase permite introduzir o conceito de aceleração centrípeta como a aceleração uniforme do "processo instantâneo" de queda da tangente ao círculo. Embora a paráfrase não esconda o papel crucial da geometria, ela é uma leitura interpretada em linguagem moderna, cheia de elementos que não estavam accessíveis a Huygens. Huygens tem sido estudado por historiadores, mas não acredito que uma atenção especial seja dada dada à elaboração das categorias dinâmica, exceto por poucos historiadores.

2. A geometria dos processos instantâneos

Huygens não estava à procura de uma filosofia mecanicista [7, p. 609]. Joella Yoder [9, p. 169] descreve Huygens como um "resolvedor de problemas"; ela quer dizer que Huygens "trabalhava sob estímulo externo", em resposta a desafios postos por seus contemporâneos e "dificilmente poderia aderir a um programa de pesquisa consciente". Por exemplo, a descoberta da força centrífuga e do isocronismo da ciclóide foram feitos no contexto de um problema colocado pelo Padre Marin Mersenne, o da construção do relógio de pêndulo [9, p. 19].[2]

A força centrífuga de Huygens permaneceu uma "tendência" e não foi generalizada em um novo conceito, o de 'força' como algo que gera o movimento circular. Segundo Bos [7, p. 607], Huygens não aceitou o conceito newtoniano de força "como um princípio mecânico fundamental".[3] Em seu discurso comemorativo do término da edição de *Huygens's Collected Work*, Dijksterhuis [8, p. 274-275] observa que a contribuição de Huygens está "nos resultados alcançados" e nos "métodos aplicados". O método de Huygens para resolver problemas era a geometria: Uma geometria que se baseava no uso de infinitesimais ([9], p. 62-63), "[...] um exemplo ideal de colaboração entre matemática, física e técnicas, da qual a ciência natural moderna se originou" [8, p. 273]. Niccolò Guicciardini [10, p. 120] nota que, na época de Huygens, "os objetos de interesse para os matemáticos eram geométricos: Curvas, superfícies, volumes"; quando a álgebra cartesiana não podia ser usada, "era admissível usar infinitésimos geométricos; figuras podiam ser particionadas em componentes infinitesimais".

"Infinitesimais geométricos" e "processos instantâneos" são inerentes aos princípios dinâmicos gerais, formulados por Newton e Euler. Esses princípios são fundamentados no seguinte:

1. Teorema de Galileu.

   O leitor moderno reconhece que o teorema pode ser um substituto das leis dinâmicas, por uma propriedade do cálculo: Em cada instante do movimento, individualmente considerado, qualquer movimento é uniformemente acelerado. Essa propriedade nasce com a geometria do cálculo e é inerente ao conceito de curvatura.

   Geometricamente, o quanto uma curva desvia da tangente é medido pela curvatura; o raio de curvatura é igual ao raio do círculo osculador (o círculo tangente à curva). Ao mover em uma órbita curva, para que o corpo permaneça na órbita, a tangente (velocidade) tem de se "enrolar" em torno do círculo osculador. Como o processo de "enrolar" acontece em cada ponto da curva, individual e independentemente de qualquer outro ponto, é suficiente considerar o "puxão" para o centro do círculo em cada ponto, isolada e independentemente do "puxão" em outro ponto. Assim, o "puxão" em outro ponto é irrelevante ao "puxão no ponto sob consideração, o qual, então, pode ser considerado "localmente constante".

   Analiticamente, a propriedade expressa o fato de que as equações de movimento são de segunda ordem de derivada, no tempo.[4] Se as equações fossem de primeira ordem, a quantidade "instantaneamente constante" seria $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$; se de terceira ordem, $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$.

2. Para usar o teorema de Galileu, tem-se de considerar movimentos "instantaneos", ou processos virtuais. Esses processos permitem considerar a validade "instantânea" do teorema e o amálgama da geometria com a física, formando uma dinâmica geral: quantidades geométricas,

[2]Mersenne procurava o comprimento de um pêndulo cujo período fosse de 1 segundo.

[3]Apesar de René Descartes ter formulado a lei da inércia de modo correto, ela não implicava a existência de uma nova entidade – a força – em movimentos não uniformes. Em linguagem moderna, Descartes descreve (em palavras, não analiticamente) um movimento inercial usando coordenadas polares planas [11, p. 43-47], [12, p. 132-133]. Movimento circular ocorre, quando obstáculos impedem o movimento radial; assim, movimentos se tornam [11, p. 46] "irreguliers et courbes" devido a "les diverses dispositions de la matiere".

[4]Talvez seja ao contrário. Essa propriedade geométrica justifica por que as equações são de segunda ordem.

como a curvatura, adquirem sentido físico. "Processos instantâneos" foram frequentemente considerados nos séculos XVII e XVIII.

Huygens mede a força centrífuga pelo peso que a equilibra, no caso, o peso do corpo em rotação. A igualdade das forças só vale no instante em que o movimento começa, o que justifica o uso do teorema de Galileu e a interpretação da "tendência centrífuga" como "queda gravitacional" do círculo para a tangente. Porém, Huygens não associou a força à curvatura. Segundo Yoder [9, cap. 6], apesar de seu estudo de evolutas (lugar geométrico dos centros de curvatura), Huygens não formulou uma teoria geral de curvas e movimentos em curvas, o que Newton fez.

Huygens demonstrou o teorema de Galileu, com a idade de 17 anos; mais tarde, ele leu *Two New Sciences* [9, p. 9]. O teorema é apresentado na segunda parte do *Horollogium Oscillatorium* [13]; em notação e palavreado modernos:

1. **Proposição 1.** Alturas de queda, percorridas em tempos iguais, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, estão como: $\dfrac{h_{t_{n+1}} - h_{t_n}}{h_{t_{n+2}} - h_{t_{n+1}}} = \dfrac{n}{n+1}$.
2. **Proposição 2.** Alturas percorridas em um tempo t são iguais à metade da distância percorrida em um tempo igual, em um movimento uniforme com a velocidade adquirida no fim da queda: $d_{\text{uniforme}} = 2 \times h_{\text{queda}}$. Note que a proposição enuncia o mesmo que o teorema da velocidade média.
3. **Proposição 3.** $\dfrac{h_{t_1}}{h_{t_2}} = \left(\dfrac{t_1}{t_2}\right)^2$.
4. **Proposição 5.** Consiste em demonstrar que a distância percorrida na queda é a área do triângulo no gráfico $v \times t$.

3. A geometria dos infinitésimos e a tendência centrífuga

Na quinta parte do *Horollogium Oscillatorium* (1673) [13], Huygens enunciou 13 teoremas sobre a tendência dos corpos em rotação, de se afastarem do centro de rotação e criou a expressão 'força centrífuga'. Mas as demonstrações só foram apresentadas postumamente, em 1703, no *De Vi Centrifuga* [14].

O círculo vertical $\mathcal{BEFG}$ (Fig. 1, esquerda) representa uma roda.[5] Uma pessoa está em pé, em $\mathcal{B}$, e segura um barbante, do qual pende uma esfera pequena. Se a esfera escapar da mão, ela moverá ao longo da tangente, $\mathcal{BCDH}$, com a mesma velocidade da roda; logo, distâncias movidas, no mesmo tempo, pela pessoa, ao longo da roda, e pela esfera, na tangente, são iguais (Fig. 1, direita):

$$
\begin{aligned}
\text{esfera:}\quad & \overline{\mathcal{BK}} = \overline{\mathcal{KL}} = \overline{\mathcal{LN}} \\
\text{pessoa:}\quad & {}_{\text{arco}}\,\mathcal{BE} = {}_{\text{arco}}\,\mathcal{EF} = {}_{\text{arco}}\,\mathcal{FM} \\
\text{então:}\quad & \overline{\mathcal{BK}} = {}_{\text{arco}}\,\mathcal{BE} = \overline{\mathcal{KL}} = {}_{\text{arco}}\,\mathcal{EF} = \overline{\mathcal{LN}} = {}_{\text{arco}}\,\mathcal{FM}
\end{aligned}
$$

Huygens argumenta (secção 3.1, abaixo) que a trajetória da esfera, no referencial da pessoa, após abandonar a mão, é uma curva tangente ao raio vetor, no ponto onde a esfera escapa da mão.[6] Consequentemente (Fig. 1, direita), em intervalos iguais de tempo:

distância movida pela pessoa no círculo	distância movida pela esfera na curva tangente	distância ao longo do raio
arco $\mathcal{BE}$	arco $\mathcal{EK}$ (centro $\mathcal{B}$)	$\overline{\mathcal{EC}} \approx$ arco $\mathcal{EK}$
arco $\mathcal{EF}$	arco $\mathcal{FL}$ (centro $\mathcal{E}$)	$\overline{\mathcal{FD}} \approx$ arco $\mathcal{FL}$
arco $\mathcal{FM}$	arco $\mathcal{MN}$ (centro $\mathcal{F}$)	$\overline{\mathcal{MS}} \approx$ arco $\mathcal{MN}$

Assim, arcos percorridos pela esfera (descritos no começo do movimento), na curva tangente, são (aproximadamente) iguais a distâncias no raio, descritas no mesmo tempo, com que a esfera se afasta da curva [14, p. 264]:

> Comme le globe qui tourne avec la roue tend donc à decrire une courbe par rapport au rayon sur lequel il est situé, savoir une courbe telle qu'elle touche le rayon, il apparaît qu'en vertu de cette tendance le fil auquel le globe est lié ne doit pas être tendu d'autre façon que si le globe avait la tendance de se mouvoir suivant le prolonge-

[5] Yoder [9, p. 35] e os editores de *Oeuvres Complètes* (*Avertissement*, p. 240-241) comentam que o uso de uma roda lembra o tratamento dado por Galileu a um problema velho: Explicar por que corpos sobre a superfície da Terra não são expelidos, embora a Terra rode em torno de seu eixo. A solução de Galileu pode ser parafraseada [15]: É dada a tangente em, seja, P, e um segmento nela, PA; trace, de A, a secante através do centro do círculo (a maior secante); Galileu argumenta que o segmento da secante entre a tangente e o círculo tende a zero mais rapidamente que segmentos na tangente, na medida em que $A \to P$. É curioso observar que um ponto fundamental, no *Principia*, no desenvolvimento da dinâmica dos movimentos centrais, é a demonstração que, se segmentos na tangente comportam-se como t, segmentos entre a tangente e a órbita comportam-se como t^2 (lemma 10, no *Principia*).

[6] Huygens não usa a palavra 'referencial', nem chama atenção para o problema de referenciais.

ment même du rayon.
(Como o globo que gira com a roda tende, então, a descrever uma curva com relação ao raio sobre o qual está situado, a saber, uma curva que tangencia o raio, parece que, em razão dessa tendência, o fio ao qual o globo está ligado não poderá ser tensionado, a não ser que o globo tenha a tendência de se mover segundo o próprio prolongamento do raio.)

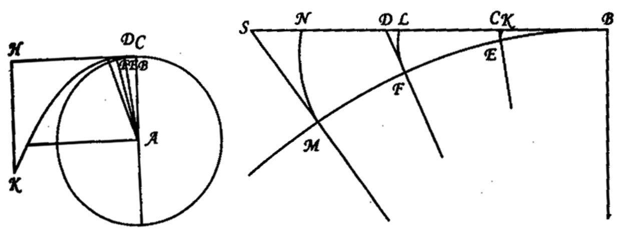

Figura 1 - A tendência centrífuga. A figura da esquerda mostra a roda. A figura da direita mostra as aproximações feitas por Huygens. O movimento de afastamento do círculo é dado pelas distâncias $\mathcal{EC}$, $\mathcal{FD}$ e $\mathcal{MS}$, sobre extensões dos raios.

3.1. Huygens argumenta que a trajetória da esfera é tangente ao círculo

Na Fig. 2, quando a pessoa está em $\mathcal{L}$, a esfera está em $\mathcal{O}$; quando a pessoa está em $\mathcal{N}$, a esfera está em $\mathcal{R}$. Como a pessoa e a esfera movem-se com velocidades iguais: $\mathcal{LO} =_{\text{arco}} \mathcal{BL}$, $\mathcal{NR} =_{\text{arco}} \mathcal{BN}$, $\mathcal{MS} =_{\text{arco}} \mathcal{BM}$, onde $\mathcal{LO}$, $\mathcal{NR}$ e $\mathcal{MS}$ são tangentes ao círculo; $\mathcal{LO} \perp \mathcal{AL}$, $\mathcal{NR} \perp \mathcal{AN}$ e $\mathcal{MS} \perp \mathcal{AM}$.

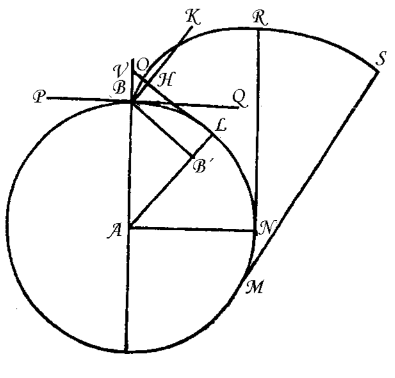

Figura 2 - A direção da tendência centrífuga. A linha $\mathcal{BB}' \perp \mathcal{AL}$ não existe no desenho de Huygens, mas ajuda a entender o argumento. Por construção: $\overline{\mathcal{BB}'} = \overline{\mathcal{AB}} \times \sin\widehat{\mathcal{BAL}}$ e $\overline{\mathcal{BB}'} = \overline{\mathcal{BL}} \times \sin\widehat{\mathcal{BLB}'}$; $\overline{\mathcal{LH}} = \overline{\mathcal{BB}'}$. Então: $\overline{\mathcal{LH}} = \overline{\mathcal{AB}} \times \sin\widehat{\mathcal{BAL}} = \overline{\mathcal{BL}} \times \sin\widehat{\mathcal{BLB}'} < \overline{\mathcal{BL}} <_{\text{arco}} \mathcal{BL}$.

Trace a linha $\mathcal{BHK} \parallel \mathcal{AL}$; ela encontra $\mathcal{LO}$ em $\mathcal{H}$. Mas (Fig. 2) $\mathcal{LH} <_{\text{arco}} \mathcal{BL} = \mathcal{OL}$; portanto o ponto $\mathcal{O}$, na curva, cai dentro do ângulo $\widehat{\mathcal{VBHK}}$. Mas a linha $\mathcal{BHK}$ é arbitrária; então, a partir de $\mathcal{B}$, sempre pode ser traçada uma linha reta paralela a um raio, a qual corta a curva e faz com a vertical ($\mathcal{ABV}$) um ângulo tão pequeno quanto se queira; portanto, sempre existe um ponto, na curva, interior ao ângulo $\widehat{\mathcal{VBHK}}$, não importa quão pequeno o ângulo seja; no limite, esse ponto é o próprio $\mathcal{B}$.

3.2. A natureza da força centrífuga: O teorema de Galileu

Enquanto a pessoa segura a esfera, o barbante permanece distendido. Como a força centrífuga age ao longo do raio, como visto, isto é, ao longo da vertical, no começo do movimento, ela só pode ser cancelada por outra força vertical, o peso. Então o teorema de Galileu é usado para achar a força [14, p. 266]:

> Par conséquant les espaces $\mathcal{EK}$, $\mathcal{FL}$ et $\mathcal{MN}$ doivent être considerées eux mêmes comme croissants suivant la série des quarrés depuis l'unité 1, 4, 9, 16. Et ainsi la force exercée par le globe attaché à la roue tournante ne sera pas autre que s'il tendait à se mouvoir suivant la droite qui relie le centre à lui, et cela d'un mouvement accéléré par lequel il parcourrait en des temps égaux des distances qui croissent suivant les nombres 1, 3, 5, 7, etc. [...]. Mais cette tendence dont nous avons parlé est absolument semblable à celle avec laquelle les corps pondérables suspendus à un fil aspirent à descendre.
>
> (Consequentemente, pode-se considerar que os próprios espaços $\mathcal{EK}$, $\mathcal{FL}$ et $\mathcal{MN}$ crescem segundo a série dos quadrados, a partir da unidade, 1, 4, 9, 16. Assim, a força exercida pelo globo afixado à roda que gira [atuará como se] ele tendesse a se mover segundo a reta que o liga ao centro, com um movimento acelerado, tal que ele percorre, em tempos iguais, distâncias que crescem segundo os números 1, 3, 5, 7, etc. [...]. Mas essa tendência, da qual falamos, é absolutamente igual àquela com a qual os corpos pesados suspensos por um fio tendem a cair.)

Os editores de Huygens (*Avertissement*, p. 247) interpretam esse cancelamento como uma indicação de que a força centrífuga e o peso têm o "mesmo gênero". Eles citam passagens em que o palavreado de Huygens parece suportar essa interpretação. Essas passagens são:

1. A locução "absolument égale" na Ref. [14, p. 276]: "[...] il sera établi que la tendance du mobile suspendu à choir d'un mouvement accéléré est absolument égale à la tendance du même mobile par laquelle [...] il s'efforce à s'éloigner de son fil d'un mouvement semblablement accéléré".

   ("(...) será estabelecido que a tendência do móvel suspenso, em cair com um movimento acelerado é absolutamente igual à[quela] tendência do mesmo móvel, pela qual ele se esforça em se afastar de seu fio com um movimento semelhantemente acelerado".)

2. A locução "du même genre" em [14, p. 296]: "et que cette tendence est du même genre que celle avec laquelle les corps cherchent à tomber et que nous appelons gravité".

   ("e que essa tendência pertence ao mesmo gênero que aquela [tendência] com a qual os corpos tendem a cair e que nós chamamos gravidade".)

Os editores (*Avertissement*, p. 246) também defendem a tese, segundo a qual a identificação da força centrífuga com o peso estabelece um contexto em que a força centrífuga deve ser considerada: Ela existe – como, de fato, deve existir – somente no referencial em rotação, o da pessoa. Eles citam, em suporte, as palavras de Huygens [14, p. 264]: "par rapport au rayon sur lequel il [a esfera] est situé" ["com relação ao raio sobre o qual ela [a esfera] está situada"], na citação após a Fig. 1.

4. A expressão matemática da força centrífuga

Huygens [14, p. 266-272] apresenta três proposições que, juntas, estabelecem

$$\text{força centrífuga} \propto \frac{v^2}{r}.$$

A força age, por tudo que foi discutido, ao longo do raio e é equivalente a um peso; logo, se $\mathcal{G}$ for uma aceleração "gravitacional" genérica

$$\text{força centrífuga} = m\mathcal{G} = m\frac{2 \times \text{distância}}{(\text{tempo})^2},$$

onde a distância é o segmento ao longo do raio extendido, entre o círculo e a tangente.

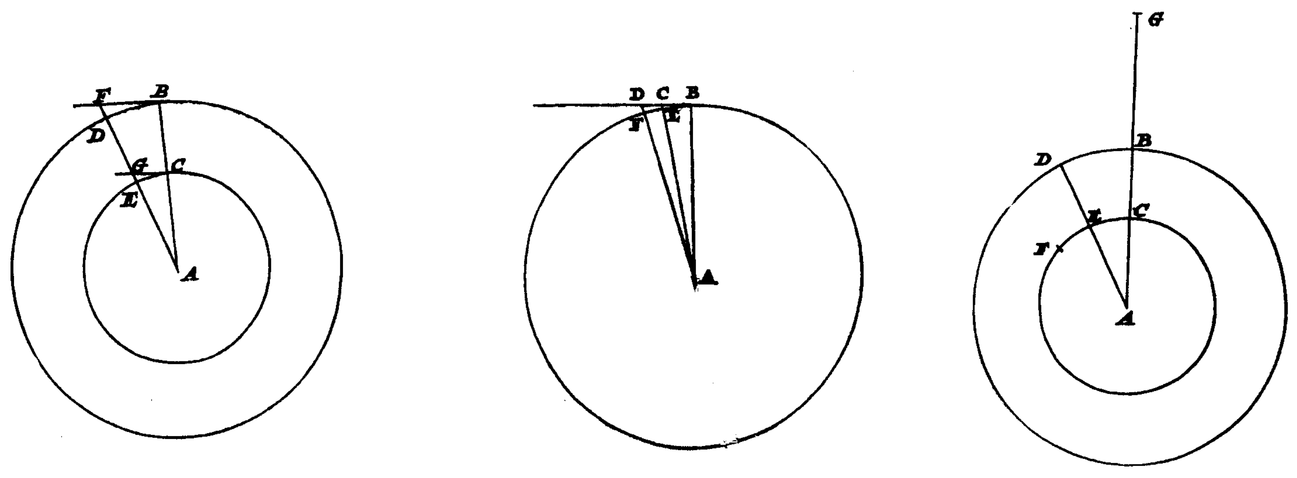

Figura 3 - Proposição 1 (esquerda). As circunferências e as velocidades são diferentes, mas as velocidades angulares são iguais, de modo que um corpo está em D, no mesmo instante em que o outro está em E; $\overline{BF} \approx {}_{\text{arco}}BD$. Proposição 2 (centro). As velocidades são diferentes, de modo que um corpo está em E, no mesmo instante em que o outro está em F; $\overline{BC} \approx {}_{\text{arco}}BE$, $\overline{BD} \approx {}_{\text{arco}}BF$. Proposição 3 (direita). As velocidades são iguais, em circunferências diferentes, de modo que um corpo está em D, no mesmo instante em que o outro está em F: ${}_{\text{arco}}CF = {}_{\text{arco}}BD$. Um terceiro corpo está em E, no mesmo instante; isto é, sua velocidade angular é igual à velocidade angular do corpo na circunferência maior.

4.1. Proposição 1

Proposition 1. Lorsque deux mobiles égaux parcourent en des temps égaux des circonférences inégales, la force centrifuge correspondant à la plus grande circonférence sera à celle de la plus petite circonférence dans un rapport égal à celui des circonférences elles-mêmes ou de leur diamètres.

(Quando dois [corpos] móveis iguais percorrem, em tempos iguais, duas circunferências desiguais, [respectivamente], a força centrífuga correspondente à circunferência maior está para aquela da circunferência menor em uma relação igual àquela das próprias circunferências ou de seus diâmetros.)

4.1.1. Demonstração da proposição 1 (Fig. 3, esquerda)

$$\text{triângulo}\, BFA \sim \text{triângulo}\, CGA \Longrightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EG}}$$

Então

$$\frac{\text{força}_1}{\text{força}_2} \equiv \frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2} \stackrel{def}{=} \frac{\overline{DF}}{\overline{EG}} = \frac{r_1}{r_2}.$$

4.1.2. Interpretation da proposição 1

Foi demonstrado que $\mathcal{G} = \Phi_1(\tau)\, r$, onde r é o raio, τ é o período, $\tau = 2\pi\frac{r}{v}$, e v é a velocidade; Φ_1 é uma função desconhecida de seu argumento.

4.2. Proposição 2

Proposition 2. Lorsque des mobiles égaux tournent dans les mêmes ou d'égales circunférences ou roues avec des vitesses différentes mais l'un et l'autre d'un mouvement uniforme, la force centrifuge du plus rapide sera à celle du plus lent dans un rapport égal à celui des carrés des vitesses. (Quando dois [corpos] móveis iguais se movem na mesma ou em circunferência iguais ou rodas, com velocidades diferentes, mas um e o outro com movimento uniforme, a força centrífuga do mais veloz está para aquela do mais lento em uma relação igual àquela dos quadrados das velocidades.)

4.2.1. Demonstração da proposição 2 (Fig. 3, centro)

O movimento é uniforme ao longo da tangente: $\frac{\text{arco}BE}{\text{arco}BF} \approx \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{v_1}{v_2}$. Considere as extensões de CA e DA até o lado oposto da circunferência,respectivamente, CAC' and DAD' (não desenhadas); então

$$\text{geometria} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} BD^2 = FD \times DAD' = FD \times 2r \\ BC^2 = EC \times CAC' = EC \times 2r \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{FD}{EC} = \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Longrightarrow \frac{\text{força}_2}{\text{força}_1} \equiv \frac{\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_1} \stackrel{def}{=} \frac{FD}{EC} = \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

Interpretação da proposição 2

Foi demonstrado que $\mathcal{G} = \Phi_2(r)\, v^2$, onde r é o raio, v é a velocidade; Φ_2 é uma função desconhecida de seu argumento.

4.3. Proposição 3

Proposition 3. Lorsque deux mobiles égaux se meuvent avec la même vitesse suivant des circonférences inégales, leurs forces centrifuges seront inversement proportionnelles aux diamètres, de sorte que dans le cas de la plus petite circonférence la force nommée est la plus grande. (Quando dois [corpos] móveis iguais se movem com a mesma velocidade em circunferências desiguais, [respectivamente], suas forças centrífugas serão inversamente proporcionais aos diâmetros, de modo que, no caso da circunferência menor, a referida força é a maior.)

4.3.1. Demonstração da proposição 3 (Fig. 3, direita)

O segmento $AG \equiv \xi$ é definido pela proporção: $AB^2 = (AC)\,(AG)$ or $r_1^2 = \xi r_2$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{\text{força}_1}{\text{força}_3} &\equiv \frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_3} \stackrel{\text{prop.1}}{=} \frac{r_1}{r_2} \\ \frac{\text{força}_3}{\text{força}_2} &\equiv \frac{\mathcal{G}_3}{\mathcal{G}_2} \stackrel{\text{prop.2}}{=} \frac{v_3^2}{v_2^2} \stackrel{v\,=\,\omega r}{=} \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{\xi \times r_2} = \frac{r_2}{\xi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{força}_1}{\text{força}_2} \equiv \frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2} = \frac{r_2}{\xi} \times \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{\xi} = \frac{r_2}{r_1}$$

4.3.2. Interpretação da proposição 3

Foi demonstrado que $\mathcal{G} = \frac{\Phi_3(v)}{r}$, onde r é o raio, v é a velocidade; Φ_3 é uma função desconhecida de seu argumento.

Referências

[1] Galileu Galilei (1638) *Dialogues Concerning the Two New Sciences*, in: *Great Books of the Western World*, 54 vols., (Chicago, Encyclopædia Britannica), v. 28

[2] Eduard Jan Dijksterhuis *The Mechanization of the World Picture (Pythagoras to Kepler).* (Oxford, Oxford University Press, 1961, 1969), (Princeton, Princeton University Press, 1986). Traduzido para o Inglês por C. Dikshoorn.

[3] Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, (Wisconsin, The University of Wisconsin Press, 1959).

[4] Isaac Bernard Cohen, *The Birth of a New Physics* (Penguin, New York, 1961; reprint, 1992).

[5] Penha Maria C. Dias, Revista Brasileira de Física **28**, 205 (2006).

[6] Penha Maria C. Dias, Archive for History of Exact Sciences **54**, 67 (1999).

[7] H.J.M. Bos, in: C.C. Gillispie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography* (1972), 8 vols., v. 5 & 6, 1981 edition, p. 597-613

[8] E.J. Dijksterhuis, Centaurus **2**, 265 (1953).

[9] J.G. Yoder, *Unrolling Time (Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature)* (Cambridge, Cambridge University Press, 1988).

[10] N. Guicciardini, *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, (Cambridge, Cambridge University Press, 1999).

[11] R. Descartes (1664), *Le Monde*, in: C. Adam e P. Tannery (editores), *Œuvres de Descartes*, 12 vols., (1897-1913) (Paris, J. Vrin/CNRS, edição revista edition, 1964-1976), v. XI, p. 1-118.

[12] R. Descartes (1644), *Principes de la Philosophie*, in: C. Adam e P. Tannery (editores), *Œuvres de Descartes*, 12 vols., (1897-1913) (Paris, J. Vrin/CNRS, edição revista edition, 1964-1976), v. IX-2.

[13] C. Huygens (1673) "Horologium Oscillatorium!, in: *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens* (Société Hollandaise des Sciences, 22 vols., 1888-1950), v. XVIII.

[14] C. Huygens (1703), "De Vi Centrifuga", in: *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens*, (Société Hollandaise des Sciences, 22 vols., 1888-1950), v. XVI.

[15] Galileu Galilei (1632), *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*, traduzido com notas por Stillman Drake (Los Angeles, University of California Press, 1953, 1962 and 1967).